КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

І. М. Александрович
А. В. Анікушин
О. К. Боярчук
О. І. Молодцов
Д. А. Номіровський
Б. В. Рубльов
В. В. Семенов

Збірник задач та вправ з математичного аналізу

Глава 5

Функції багатьох змінних

Навчальний посібник

УДК 517.13
ББК 22. 161
М 34

Рецензенти:

доктор фіз.-мат. наук, професор Карлова О.
кандидат фіз.-мат. наук, доцент Нестеренко О. Н.

Рекомендовано до друку вченою радою факультету кібернетики (протокол № ___ від ___ вересня 2024 року)

Збірник задач та вправ з математичного аналізу

М34 Збірник задач та вправ з математичного аналізу. Глава 1. Похідна функція / І.М. Александрович, А.В. Анікушин, О.К. Боярчук, О.І. Молодцов, Д.А. Номіровський, Б.В. Рубльов, В.В. Семенов. – К.: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2024. - 140 с.

ISBN

Посібник присвячено вивченню функцій багатьох змінних та базовим поняттям функціонального аналізу. До кожного з 10 розділів посібника наводиться основний теоретичний матеріал та велика кількість задач. До усіх задач наведені відповіді, які дадуть читачам змогу перевіряти свої розв’язання.

Для студентів математичних та інформаційних спеціальностей університетів

УДК 517.13
ББК 22. 161

Зміст

ПЕРЕДМОВА

Умови задач

Розділ 5. Функції багатьох змінних

Розділ 5.1. Основні типи просторів

Короткі теоретичні відомості

Нехай E – деяка множина, K – числове поле (якщо про поле K нічого не додається, то ми вважаємо, що $K = R$). ***Лінійним (векторним) простором*** (***ЛП***) над полем K називається впорядкована четвірка $(E, K, +, \cdot)$, яка складається з множини E, елементи якої називаються ***векторами*** або ***точками***, поля K, елементи якого називаються ***числами*** або ***скалярами***, операції ***додавання*** довільних двох векторів та операції ***множення*** довільного вектора на числа поля K. Вказані операції мають задовольняти властивостям, які називають аксіомами векторного простору: $(\forall x, y, z \in E\ \forall \lambda, \mu \in K)$:

1) $x + y = y + x$ (*комутативність додавання*);
2) $(x + y) + z = x + (y + z)$ (*асоціативність додавання*);
3) $\exists \theta \in E: x + \theta = x$ (*існування нульового елементу ЛП*);
4) $\exists (-x): x + (-x) = \theta$ (*існування протилежного елементу ЛП*);
5) $(\lambda\mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x)$ (*асоціативність множення на скаляри*);
6) $1 \cdot x = x$ (*існування одиниці в числовому полі*);
7) $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$ (*дистрибутивність для скалярів*);
8) $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot y$ (*дистрибутивність для векторів*).

Елемент θ називають ***нульовим елементом ЛП***. Якщо це не призводить до плутанини пишуть $\theta = 0$. Для спрощення запису замість четвірки $(E, K, +, \cdot)$ ЛП позначають символом E. Також замість запису $\lambda \cdot x$ пишуть просто λx, замість $x + (-1) \cdot y$ пишуть $x - y$.

Якщо $x_1, x_2, \ldots, x_m$ – вектори ЛП E та існують такі числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, серед яких є ненульові, що справджується рівність $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i = \theta$, то вектори $x_1, x_2, \ldots, x_m$ називаються ***лінійно залежними***. Якщо ж рівність $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i = \theta$ справджується лише за умови $\lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0$, то вектори $x_1, x_2, \ldots, x_m$ називаються ***лінійно незалежними***. Нескінченну сукупність векторів $\{x_\alpha \mid \alpha \in A\}$ називають ***лінійно залежною***, якщо вона містить лінійно залежну скінченну підмножину. Інакше цю сукупність називають ***лінійно незалежною***.
Вектор $y \in E$ ***лінійно виражається*** через вектори сукупності $L = \{x_\alpha \mid \alpha \in A\} \subset E$, якщо існує скінченний набір векторів $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\} \subset L$ та набір чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, для яких справджується рівність: $y = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i$.

Скінченну або нескінченну систему векторів $\{x_\alpha \mid \alpha \in A\}$ ЛП E називають ***базисом*** (***алгебраїчним базисом***, ***базисом Гамеля***), якщо вона лінійно незалежна і кожний елемент ЛП E можна лінійно виразити через систему векторів $\{x_\alpha \mid \alpha \in A\}$.

Теорема 1. *(Поповнення до базису)*
Будь-яку лінійно незалежну систему векторів довільного ЛП E можна доповнити до базиса.

Теорема 2. *(Рівнопотужність базисів)*
Будь-які два базиса ЛП E є рівнопотужними.

Якщо ЛП E має базис, що складається із скінченної кількості елементів, то цей простір називається ***скінченновимірним***, інакше – ***нескінченновимірним***. Скінченновимірний простір, базис якого містить m елементів, називається ***m-вимірним***.

Приклад 1. *(R^m як ЛП)*

Розглянемо m-вимірний простір $E = R^m$, в якому

$$\forall(x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m, y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in R^m, \lambda \in R):$$
$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_m + y_m), \lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_m).$$

Лінійно незалежну систему векторів $e_i = (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{i-1}, 1, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{m-i})$, $i = \overline{1, m}$ називають ***стандартним базисом*** R^m. Якщо $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ – деякий базис простору R^m, то кожний вектор $x \in R^m$ однозначно подається у вигляді лінійної комбінації $x = \sum_{i=1}^{m} x_i e_i$, де $x_i \in R$, $i = \overline{1, m}$. Тоді коефіцієнти x_i називаються ***координатами*** вектора x відносно базису $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$.

Нехай E – ЛП. Тоді відображення $E \xrightarrow{||\cdot||} R^+$ називається ***нормою*** в цьому просторі, якщо $\forall x, y \in E$, $\lambda \in R$ справджуються такі аксіоми:

1) $||x|| = 0 \Rightarrow x = \theta$;

2) $||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||$ (*однорідність норми*);

3) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ (*нерівність трикутника*).

Упорядковану пару $(E, ||\cdot||)$, де E – ЛП з визначеною на ньому нормою $|\cdot|$ називають ***лінійним нормованим простором (ЛНП)***.

Приклад 2. *(ЛНП)*

1) У ЛП R^m визначимо на ньому норму таким чином

$$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{m} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

де $p \geq 1$. Надалі цей ЛНП будемо позначати символом L_p^m. При $p = 1$ норма називається *октаедрічною*, при $p = 2$ – *евклідовою*, при $p = +\infty$ – *кубічною*.

2) У ЛП обмежених (збіжних) послідовностей визначимо норму таким чином

$$\|x\| = \sup_{k \in N} |x_k|.$$

Надалі цей ЛНП будемо позначати символом m (c).

3) У ЛП збіжних до нуля послідовностей визначимо норму таким чином

$$\|x\| = \max_{k \in N} |x_k|.$$

Надалі цей ЛНП будемо позначати символом c_0.

4) У ЛП послідовностей $x = (x_1, x_2, \dots)$, для яких є обмеженою послідовність $S_n = \sum_{k=1}^{n} |x_k|^p$, де $p \geq 1$, визначимо на ньому норму таким чином

$$\|x\| = \left(\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Надалі цей ЛНП будемо позначати символом l_p.

5) У ЛП неперервних на сегменті $[a, b]$ функцій визначимо норму таким чином

$$\|x\| = \max_{t \in [a,b]} |x(t)|.$$

Надалі цей ЛНП будемо позначати символом $C[a, b]$.

6) У ЛП n разів неперервно диференційованих на сегменті $[a, b]$ функцій визначимо норму таким чином

$$\|x\| = \sum_{i=0}^{n} \max_{t\in[a,b]} \left|x^{(i)}(t)\right|.$$

Надалі цей ЛНП будемо позначати символом $C^{(n)}[a,b]$.

7) У ЛП неперервних на сегменті $[a,b]$ функцій визначимо норму таким чином

$$\|x\| = \left(\int_a^b |x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}},$$

де $p \geq 1$. Надалі цей ЛНП будемо позначати символом $\tilde{L}_p[a,b]$,.

8) У ЛП обмежених на сегменті $[a,b]$ функцій визначимо норму таким чином

$$\|x\| = \sup_{t\in[a,b]} |x(t)|.$$

Надалі цей ЛНП будемо позначати символом $M[a,b]$.

Функція $\langle \cdot,\cdot \rangle: E \times E \to R$, де E – ЛП називається ***скалярним добутком***, якщо $\forall x,y,z \in E, \lambda \in R$ виконуються такі умови (*аксіоми скалярного добутку*):

1) $\langle x,x\rangle \geq 0 \wedge \langle x,x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = \theta$;

2) $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$;

3) $\langle \lambda x,y\rangle = \lambda\langle x,y\rangle$;

4) $\langle x+y,z\rangle = \langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle$.

Упорядковану пару $(E, \langle \cdot,\cdot \rangle)$, де E – ЛП, в якому визначений скалярний добуток, називається ***предгільбертовим простором***. Скінченновимірний предгільбервтів простір називають також ***евклідовим простором***.

Теорема 3. *(Нерівність Шварца)*

У предгільбертовому просторі E справджується нерівність: $\langle x,y\rangle^2 \leq \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle$.

Теорема 4. *(Зв'язок предгільбертова простору та ЛНП)*

Будь-який предгільбертів простір E стає ЛНП, якщо покласти $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$.

Елементи x та y предгільбертова простору E називаються ***ортогональними***, якщо $\langle x,y\rangle = 0$. Систему ненульових елементів $\{h_\alpha \mid \alpha \in A\} \subset E$ називають ***ортогональною системою***, якщо $\forall(\alpha \in A, \beta \in A, \alpha \neq \beta)\ \langle h_\alpha, h_\beta\rangle = 0$. Ортогональна система $\{h_\alpha \mid \alpha \in A\} \subset E$ називається ***ортонормованою***, якщо $\forall \alpha \in A\ \|h_\alpha\| = 1$.

Нехай X – довільна множина. Відображення $X \times X \xrightarrow{\rho} R^+$ називається ***метрикою***, якщо $\forall x,y,z \in X$ справджуються аксіоми:

1) $\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

2) $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ (*симетричність*);

3) $\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y)$ (*нерівність трикутника*).

Упорядкована пара (X,ρ), де X множина, на якій задано метрику ρ, називається ***метричним простором***.

Теорема 5. *(Зв'язок метричного та нормованих просторів)*

Кожний ЛНП стає метричним, якщо в ньому метрику визначити за формулою $\rho(x,y) = \|x-y\|$.

Лінійний простір R^m стає евклідовим простором, якщо в ньому визначити скалярний добуток за формулою:

$$\langle x,y\rangle = \sum_{k=1}^{m} x_k y_k.$$

Узгоджена з цим скалярним добутком норма називається евклідовою визначається за формулою

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} x_k^2},$$

а узгоджена з цією нормою метрика задається за формулою:

$$\rho(x,y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} (x_k - y_k)^2}.$$

Задачі

1. Доведіть, що в ЛП E справджуються такі умови:

1) $\forall (x, y \in E, \lambda, \mu \in R)$

а) $0\theta = \theta$; ***б)*** $\lambda\theta = \theta$;

в) $x - x = \theta$; ***г)*** $x + \theta = x$;

д) $0x = \theta$; ***е)*** $(-1)x = -x$;

є) $\lambda(x - y) = \lambda x - \lambda y$; ***ж)*** $(\lambda - \mu)x = \lambda x - \mu x$;

з) $\underbrace{x + x + \cdots + x}_{m \text{ разів}} = mx$;

2) система усіх векторів ЛП завжди лінійно залежна;

3) якщо сукупність є лінійно залежна, то при додаванні до цієї сукупності довільної кількості векторів вона залишиться лінійно залежною;

4) якщо в довільному наборі векторів ЛП є нульовий, то ця система завжди лінійно залежна;

5) якщо сукупність є лінійно залежна, то принаймні один з векторів цієї сукупності лінійно виражається через інші;

6) якщо кожний з векторів $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ лінійно виражаються через вектори $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$, а кожний з векторів $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ лінійно виражається через вектори $\{z_1, z_2, \dots, z_k\}$, то кожний з векторів $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ лінійно виражаються через вектори $\{z_1, z_2, \dots, z_k\}$;

7) кожний вектор лінійно виражається через базис $\{x_\alpha \mid \alpha \in A\}$ однозначно, тобто якщо для деякого елемента $y \in E$

$$y = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_{k_i} = \sum_{j=1}^{n} \mu_j x_{l_j},$$

де $\lambda_1\lambda_2 \dots \lambda_m\mu_1\mu_2 \dots \mu_n \neq 0$, то $m = n$ та $\forall k_i \; \exists l_j$: $x_{k_i} = x_{l_j}$ та $\lambda_i = \mu_j$;

2. Чи буде наведена четвірка $(E, R, +, \cdot)$ ЛП, якщо

1) $E = Q$ із звичайними операціями додавання та множення;

2) $E = R$ та $\forall (x, y \in E, \lambda \in R)$ операції $x + y$ та λx визначаються таким чином:

а) $x + y = \{x + y\}, \lambda x = \{\lambda x\}$, де через $\{a\}$ позначена дробова частина числа a;

б) $x+y=[x+y], \lambda x=\lambda x$, де через $[a]$ позначена ціла частина числа a;

в) $x+y=x+y, \lambda x=\pi\lambda x$;

3) $E=R^m$, $m>1$ та $\forall(x,y\in E,\lambda\in R)$ операції $x+y$ та λx визначаються таким чином:

а) $x+y=(x_1+y_1,2x_2+2y_2,\dots,mx_m+my_m)$,
$\lambda x=(\lambda x_1,2\lambda x_2,\dots,m\lambda x_m)$;

б) $x+y=(x_m+y_m,x_{m-1}+y_{m-1},\dots,x_1+y_1)$,
$\lambda x=(\lambda x_1,\lambda x_2,\dots,\lambda x_m)$;

в) $x+y=(x_2+y_2,x_3+y_3,\dots,x_m+y_m,x_1+y_1)$,
$\lambda x=(\lambda x_2,\lambda x_3,\dots,\lambda x_m,\lambda x_1)$;

г) $x+y=(x_1+y_m,x_2+y_{m-1},\dots,x_m+y_1)$, $\lambda x=(\lambda x_1,\lambda x_2,\dots,\lambda x_m)$;

д) $x+y=(x_1+y_1,x_2+y_2,\dots,x_m+y_m)$,
$\lambda x=\begin{cases}\left(\frac{x_1}{\lambda},\frac{x_2}{\lambda},\dots,\frac{x_m}{\lambda}\right),\lambda\neq 0,\\ (0,0,\dots,0),\ \lambda=0;\end{cases}$

4) E – множина усіх матриць $A=(a_{i\,j})$ розмірності $m\times n$ та $\forall(A,B\in E,\lambda\in R)$ операції $A+B$ та λA визначаються таким чином:

а) $A+B=\left(a_{i\,j}+b_{i\,j}\right)$, $\lambda A=\left(\lambda a_{i\,j}\right)$;

б) $A+B=\left(a_{i\,j}\right)$, $\lambda A=\left(\lambda a_{i\,j}\right)$;

в) $A+B=\left(a_{j\,i}+b_{j\,i}\right)$, $\lambda A=\left(\lambda a_{j\,i}\right)$;

5) E – множина певних послідовностей $x=(x_n)$ та $\forall(x,y\in E,\lambda\in R)$ операції визначаються таким чином $x+y=(x_n+y_n)$ та $\lambda x=(\lambda x_n)$ та:

а) E – множина усіх послідовностей;

б) E – множина усіх обмежених послідовностей;

в) E – множина усіх збіжних послідовностей;

г) E – множина усіх збіжних до 0 послідовностей;

д) E – множина усіх збіжних до 1 послідовностей;

е) E – множина усіх збіжних до $+\infty$ послідовностей;

є) E – множина усіх послідовностей, у яких рівно один елемент дорівнює 0;

ж) E – множина усіх необмежених послідовностей;

з) E – множина усіх послідовностей, у яких скінченна кількість ненульових елементів;

6) E – множина певних функцій $[a,b]\xrightarrow{f}R$ та $\forall(f,g\in E,\lambda\in R)$ операції визначаються таким чином $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$ та $(\lambda f)(x)=\lambda f(x)$ та:

а) E – множина усіх визначених на $[a,b]$ функцій;

б) E – множина усіх обмежених на $[a,b]$ функцій;

в) E – множина усіх обмежених зверху на $[a,b]$ функцій;

г) E – множина усіх монотонних на $[a,b]$ функцій;

д) E – множина усіх неспадних на $[a,b]$ функцій;

е) E – множина усіх неперервних на $[a,b]$ функцій;

є) E – множина усіх n разів неперервно диференційованих на $[a,b]$ функцій;

ж) E – множина усіх функцій, що неперервні принаймні в одній точці проміжку $[a,b]$;

з) E – множина усіх розривних на $[a,b]$ функцій;

и) E – множина усіх інтегрованих за Ньютоном-Лейбніцем на $[a,b]$ функцій;

і) E – множина усіх інтегрованих за Ріманом на $[a,b]$ функцій;

ї) E – множина усіх функцій, що мають принаймні один нуль на $[a,b]$;

й) E – множина усіх функцій, множина значень яких міститься в проміжку $[-1,1]$;

к) E – множина усіх многочленів;

л) E – множина усіх многочленів степені n;

м) E – множина усіх многочленів степені не вище n;

н) E – множина усіх неперервних на $[a,b]$ функцій, у яких $E_f \subset [-1,1]$;

7) $E = 2^R$ – множина усіх підмножин R та $\forall(A,B \in E, \lambda \in R)$ операції $A + B$ та λA визначаються таким чином:
$A + B = A \cup B$ та $\lambda A = \{\lambda x |\ x \in A\}$.

а) $A + B = A \cup B$, $\lambda A = \{\lambda x |\ x \in A\}$;

б) $A + B = \{x + y |\ x \in A, y \in B\}$; $\lambda A = \{\lambda x |\ x \in A\}$;

3. Знайдіть деякий базис ЛП E, якщо;

1) E – множина усіх матриць $A = (a_{i\,j})$ розмірності $m \times n$ з операціями $\forall(A,B \in E, \lambda \in R)$, що визначаються таким чином: $A + B = \left(a_{i\,j} + b_{i\,j}\right)$, $\lambda A = \left(\lambda a_{i\,j}\right)$;

2) E – множина усіх многочленів степені не вище n з природніми операціями $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ та $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$;

3) E – множина усіх многочленів з природніми операціями $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ та $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$;

4) E – множина усіх послідовностей, у яких скінченна кількість ненульових елементів з природніми операціями $(x_n) + (y_n) = (x_n + y_n)$ та $\lambda(x_n) = (\lambda x_n)$

4. Перевірити, чи коректно визначена наведена норма у ЛП E, якщо:

1) E – це простір:

а) L_p^m; ***б)*** m; ***в)*** c;

г) c_0; ***д)*** l_p; ***е)*** $C[a,b]$;

є) $C^{(n)}[a,b]$; ***ж)*** $\tilde{L}_p[a,b]$; ***з)*** $M[a,b]$;

2) $E = R$ та $\forall x \in E$:

а) $\|x\| = |\operatorname{arctg} x|$; ***б)*** $\|x\| = x^2$;

3) $E = R^2$ та $\forall x = (x_1, x_2) \in E$:

а) $\|x\| = |2x_1 - 3x_2|$; ***б)*** $\|x\| = |2x_1 - 3x_2| + |x_1|$;

в) $\|x\| = \max\{|2x_1 - 3x_2|, |x_1 + x_2|\}$

г) $\|x\| = \sqrt[3]{x_1^3 + x_2^3}$; ***д)*** $\|x\| = \sqrt[3]{x_1^4 + x_2^4}$;

4) $E = R^m$, $m > 1$ та $\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in E$:

а) $\|x\| = \left(\sum\limits_{k=1}^{m}\sum\limits_{i=1}^{k} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$; б) $\|x\| = \max\limits_{1\le k\le m}\left|\sum\limits_{i=1}^{k} x_i\right|$;

в) $\|x\| = |x_1|$; г) $\|x\| = \left(\sum\limits_{k=1}^{n}|x_k|^{\frac{1}{4}}\right)^4$;

5) $E = C[a,b]$ та $\forall x = x(t) \in E$:

а) $\|x\| = \max\limits_{t\in[a,b]}\big(x(t)\big)^2$; б) $\|x\| = \left|\max\limits_{t\in[a,b]} x(t)\right|$;

в) $\|x\| = \left(\max\limits_{t\in[a,b]}\big(x(t)\big)^4\right)^{\frac{1}{4}}$; г) $\|x\| = \left(\int\limits_a^b \frac{\big(x(t)\big)^2}{1+t^2}\mathrm{dt}\right)^{\frac{1}{2}}$;

д) $\|x\| = \left|\int\limits_a^b x(t)\mathrm{dt}\right|$; е) $\|x\| = \max\limits_{t\in[a,b]}\int\limits_a^t |x(y)|\mathrm{dy}$;

є) $\|x\| = \int\limits_a^b \max\limits_{t\in[a,y]}|x(t)|\,\mathrm{dy}$; ж) $\|x\| = \int\limits_a^{\frac{2a+3b}{5}} |x(t)|\mathrm{dt}$;

з) $\|x\| = \left(\int\limits_a^b \cos^4 t\,\big(x(t)\big)^2\mathrm{dt}\right)^{\frac{1}{2}}$; и) $\|x\| = \min\limits_{t\in[a,b]}|x(t)|$;

і) $\|x\| = 2\max\limits_{t\in[a,b]}|x(t)| - \min\limits_{t\in[a,b]}|x(t)|$;

ї) $\|x\| = 2\max\limits_{t\in[a,b]}|x(t)| - \dfrac{1}{b-a}\left|\int\limits_a^b x(t)\mathrm{dt}\right|$;

й) $\|x\| = \int\limits_a^{\frac{a+b}{2}} |x(t)|\mathrm{dt} + \max\limits_{t\in\left[\frac{a+b}{2},b\right]}|x(t)|$;

к) $\|x\| = \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{|x(r_k)|}{2^k}$, де (r_k) – фіксована послідовність раціональних чисел проміжку $[a,b]$;

л) $\|x\| = \lim\limits_{y\to b-0}\max\limits_{t\in[a,y]}|x(t)|$; м) $\|x\| = \lim\limits_{y\to a+0}\int\limits_y^b |x(t)|\mathrm{dt}$;

н) $\|x\| = \max\limits_{t\in\left[a,\frac{a+b}{2}\right]} |x(t)|$;

6) $E = R[a,b]$ та $\forall x = x(t) \in E$:

а) $\|x\| = \max\limits_{t\in[a,b]} |x(t)|$; б) $\|x\| = \lim\limits_{y\to b-0} \max\limits_{t\in[a,y]} |x(t)|$;

в) $\|x\| = \lim\limits_{y\to a+0} \int\limits_{y}^{b} |x(t)|\mathrm{dt}$; г) $\|x\| = |x(b)| + \lim\limits_{y\to b-0} \max\limits_{t\in[a,y]} |x(t)|$;

д) $\|x\| = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{|x(r_k)|}{2^k}$, де (r_k) – фіксована послідовність раціональних чисел проміжку $[a,b]$;

7) $E = C^1[a,b]$ та $\forall x = x(t) \in E$:

а) $\|x\| = \max\limits_{t\in[a,b]} |x(t)|$; б) $\|x\| = \max\limits_{t\in[a,b]} |t\cdot x'(t)|$;

в) $\|x\| = |x(a)| + |x'(a)|$; г) $\|x\| = \max\limits_{t\in[a,b]} |x(t) + x'(t)|$;

д) $\|x\| = |x(a)| + \max\limits_{t\in[a,b]} \left|x'^{(t)}\right|$;

е) $\|x\| = |x(b) - x(a)| + \max\limits_{t\in[a,b]} |x'(t)|$;

є) $\|x\| = \int\limits_{a}^{b} |x(t)|\mathrm{dt} + \max\limits_{t\in[a,b]} |x'(t)|$;

ж) $\|x\| = |x(a)| + \left(\int\limits_{a}^{b} \left(x'(t)\right)^2 \mathrm{dt}\right)^{\frac{1}{2}}$;

8) $E = C^2[a,b]$ та $\forall x = x(t) \in E$:

а) $\|x\| = |x(a)| + |x'(a)| + \max\limits_{t\in[a,b]} |x''(t)|$;

б) $\|x\| = |x(a)| + |x(b)| + \left(\int\limits_{a}^{b} \left(x''(t)\right)^2 \mathrm{dt}\right)^{\frac{1}{2}}$;

в) $\|x\| = \left(\int\limits_{a}^{b} \cos^4 t \left(x(t)\right)^2 \mathrm{dt}\right)^{\frac{1}{2}} + \max\limits_{t\in[a,b]} |x''(t)|$;

5. Нехай ЛНП E. Доведіть, що $\forall x, y \in E$ справджуються такі твердження:

1) якщо $x = \theta$, то $\|x\| = 0$; ***2)*** $|\|x\| - \|y\|| \le \|x - y\|$;

3) $\|x\| \le \max\{\|x - y\|, \|x + y\|\}$;

6. Чи буде наведена функція $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \to R$ скалярним добутком, де:

1) ЛП $E = R^m$ та $\forall x, y \in E$:

а) $\langle x,y\rangle = \sum\limits_{k=1}^{m} x_k y_k$; б) $\langle x,y\rangle = \sum\limits_{k=1}^{m} (x_k + y_k)$;

в) $\langle x,y\rangle = \left(\sum\limits_{k=1}^{m} x_k\right)\cdot\left(\sum\limits_{k=1}^{m} y_k\right)$; г) $\langle x,y\rangle = \sum\limits_{k=1}^{m} k x_k y_k$;

д) $\langle x,y\rangle = \sum\limits_{k=1}^{m-1} x_k y_{k+1} + x_m y_1$; е) $\langle x,y\rangle = \sum\limits_{k=1}^{l} x_k y_k$, $l < m$;

є) $\langle x,y\rangle = \sum\limits_{k=1}^{m-1} x_k y_{m-k+1}$; ж) $\langle x,y\rangle = \sum\limits_{k=1}^{m} x_k^2 y_k^2$;

2) E – ЛП усіх матриць $x = \left(x_{i,j}\right)_{i=\overline{1,m},j=\overline{1,n}}$ завбільшки $m \times n$ та $\forall x,y \in E$:

а) $\langle x,y\rangle = \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} x_{i,j} y_{i,j}$; б) $\langle x,y\rangle = \det(x\cdot y^T)$;

в) $\langle x,y\rangle = \sum\limits_{i=1}^{m} x_{i,1} y_{i,1}$; г) $\langle x,y\rangle = \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{m} x_{i,i} y_{i,i}$, $m = n$;

3) E – ЛП неперервних на $[a,b]$ функцій та $\forall x,y \in E$:

а) $\langle x,y\rangle = \int\limits_a^b x(t)y(t)\,\mathrm{dt}$; б) $\langle x,y\rangle = \int\limits_a^b \mathrm{e}^t x(t)y(t)\,\mathrm{dt}$;

в) $\langle x,y\rangle = \int\limits_a^b \big(x(t)+y(t)\big)\,\mathrm{dt}$; г) $\langle x,y\rangle = \int\limits_a^{\frac{a+b}{2}} x(t)y(t)\,\mathrm{dt}$;

д) $\langle x,y\rangle = \int\limits_a^b y(t)\,\mathrm{dt}\cdot\int\limits_a^b x(t)\,\mathrm{dt}$; е) $\langle x,y\rangle = \int\limits_a^b x(t)y^3(t)\,\mathrm{dt}$;

є) $\langle x,y\rangle = x(a)y(a) + \int\limits_a^b x(t)y(t)\,\mathrm{dt}$;

ж) $\langle x,y\rangle = \int\limits_a^b \big(x(t)y(a+b-t) + x(a+b-t)y(t)\big)\,\mathrm{dt}$;

з) $\langle x,y\rangle = \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{x(r_k)y(r_k)}{2^k}$, де (r_k) – деяка послідовність усіх раціональних чисел з проміжку $[a,b]$;

4) E – ЛП $R[a,b]$ та $\forall x,y \in E$:

а) $\langle x,y\rangle = \int\limits_a^b x(t)y(t)\,\mathrm{dt}$; б) $\langle x,y\rangle = \sup\limits_{t\in[a,b]} |x(t)y(t)|$;

в) $\langle x,y\rangle = \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{x(r_k)y(r_k)}{2^k}$, де (r_k) – деяка послідовність усіх раціональних чисел з проміжку $[a,b]$;

5) E – ЛП неперервно диференційованих на $[a,b]$ функцій та $\forall x,y\in E$:

а) $\langle x,y\rangle = \int\limits_a^b x(t)y(t)\,\mathrm{dt}$; б) $\langle x,y\rangle = \int\limits_a^b x'(t)y'(t)\,\mathrm{dt}$;

в) $\langle x,y\rangle = x(b)y(b) + \int\limits_a^b \sin^2 t\cdot x'(t)y'(t)\,\mathrm{dt}$;

г) $\langle x,y\rangle = x(a)y(a) + \int\limits_a^b (y(t)x'(t) + x(t)y'(t))\,\mathrm{dt}$;

д) $\langle x,y\rangle = \int\limits_a^b (x(t)y(t) + x'(t)y'(t))\,\mathrm{dt}$;

7. Нехай E – предгільбертів простів, в якому визначений скалярний добуток $\langle\cdot,\cdot\rangle: E\times E\to R$. Доведіть, що:

1) $\forall x,y,z\in E, \lambda\in R$ справджуються рівності:

а) $\langle\theta,x\rangle = 0$; ***б)*** $\langle y,\theta\rangle = 0$;

в) $\langle x,\lambda y\rangle = \lambda\langle x,y\rangle$; ***г)*** $\langle x,y+z\rangle = \langle x,y\rangle + \langle x,z\rangle$;

2) предгільбертів простір E стає ЛНП, якщо $\forall x\in E$ покласти $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$, ця норма зветься *узгодженою* з скалярним добутком;

3) у предгільбертовому просторі E справджується нерівність: $\langle x,y\rangle^2 \le \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle$;

4) для узгодженої норми в предгільбертовому просторі E $\forall x,y,z,t\in E$, $(x_k)\subset E$, $\lambda\in R$ справджуються твердження:

а) $\|z-x\|^2 + \|z-y\|^2 = \frac{1}{2}\|x-y\|^2 + 2\left\|z-\frac{x+y}{2}\right\|^2$

б) $\|x-z\|\cdot\|y-t\| \le \|x-y\|\|z-t\| + \|x-t\|\|y-z\|$ (*нерівність Птолемея*);

в) $\langle x,y\rangle = 0 \Leftrightarrow \|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x+y\|^2$ (*теорема Піфагора*);

г) якщо $\{x_k \mid k=\overline{1,n}\}$ – ортогональна система векторів та $x = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$, то $\|x\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{n}\|x_k\|^2$ (теорема Піфагора);

д) $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$ (*рівність паралелограма*);

е) $\|x\| + \|y\| = \|x+y\| \Leftrightarrow x = \theta$ або $y = \lambda x$ для деякого $\lambda \ge 0$.

8. Нехай E – ЛНП. Доведіть, що:

1) якщо для $\forall x,y\in E$ справджується рівність паралелограма (дивись задачу № **6** пункт ***4)*** підпункт ***д)***) $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$,

то вираз $\frac{1}{4}(\|x+y\|^2+\|x-y\|^2)$ визначає скалярний добуток $\langle x,y\rangle$, що є узгодженим з нормою ЛНП E;

2) для наведених ЛНП E не можна визначити скалярний добуток $\langle x,y\rangle$, що є узгодженим з нормою цього простору, де:

а) $E=C[0,1]$; ***б)*** $E=c$;

в) $E=c_0$; ***г)*** $E=m$;

д) $E=L_p^m,\ p\neq 2$; ***б)*** $E=\tilde{L}_p[a,b],.\ p\neq 2.$

9. Чи є задана сукупність функцій H у предгільбертовому просторі E ортогональною, ортонормованою за нормою $\|x\|=\sqrt{\langle x,x\rangle}$, де

1) $H=\left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin nt \mid n\in N\right\}$ та

а) $E=\tilde{L}_p[0,\pi]$; ***б)*** $E=\tilde{L}_p[-\pi,\pi]$;

2) $H=\{1,\sin nt\,,\cos nt \mid n\in N\}$ та

а) $E=\tilde{L}_p[0,\pi]$; ***б)*** $E=\tilde{L}_p[0,2\pi]$;

3) $H=\left\{\frac{d^n}{dt^n}((t-a)(b-t))^n \mid n\in N\right\}$ та $=\tilde{L}_p[a,b]$;

10. Чи буде упорядкована пара (X,ρ) метричним простором, де множина X та функція $X\times X\xrightarrow{\rho}R$ такі, що:

1) $X=R$ та $\forall x,y\in X$:

а) $\rho(x,y)=|f(x)-f(y)|$ та $f\in C(R)$;

б) $\rho(x,y)=\sin^2(x-y)$; ***в)*** $\rho(x,y)=\operatorname{arctg}|x-y|$;

г) $\rho(x,y)=\sqrt{|x-y|}$; ***д)*** $\rho(x,y)=|\cos(x-y)|$;

е) $\rho(x,y)=\mathrm{e}^{|x-y|}$; ***є)*** $\rho(x,y)=\mathrm{e}^{|x-y|}-1$;

ж) $\rho(x,y)=(x-y)^2$; ***з)*** $\rho(x,y)=\frac{|x-y|}{\sqrt{1+x^2}\cdot\sqrt{1+t^2}}$;

и) $\rho(x,y)=\begin{cases}0, & x=y,\\ 1, & 0<|x-y|<1,\\ 2, & |x-y|\geq 1;\end{cases}$

й) $\rho(x,y)=\begin{cases}0, & x=y,\\ 1, & 0<|x-y|<1,\\ 3, & |x-y|\geq 1;\end{cases}$

к) $\rho(x,y)=\begin{cases}0, & x=y,\\ 3, & 0<|x-y|<1,\\ 1, & |x-y|\geq 1;\end{cases}$

л) $\rho(x,y)=\begin{cases}0, & x=y,\\ 3, & 0<|x-y|<1,\\ 2, & |x-y|\geq 1;\end{cases}$

2) $X=N$ та $\forall x,y\in X$:

а) $\rho(x,y)=\begin{cases}1+\frac{1}{x+y}, x\neq y,\\ 0, \quad x=y;\end{cases}$ ***б)*** $\rho(x,y)=\begin{cases}\min\{x,y\}, x\neq y,\\ 0, \quad x=y;\end{cases}$

в) $\rho(x,y)=\begin{cases}\max\{x,y\}, x\neq y,\\ 0, \quad x=y;\end{cases}$ ***г)*** $\rho(x,y)=\frac{|x-y|}{xy}$;

д) $\rho(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{k}, \text{де у числа } |x-y| \text{ рівними є останні } k \text{ цифр}, x\neq y,\\ 0, \quad x=y;\end{cases}$

е) $\rho(x,y)=|x-y|$; ***є)*** $\rho(x,y)=|x^2-y^2|$;

3) $\forall x,y\in X\ \rho(x,y)=|x-y|$ та:

а) $X=Q$; ***б)*** $X=R\backslash Q$;

4) X – довільна множина та $\forall x,y\in X$:

а) $\rho(x,y)=\begin{cases}1, x\neq y,\\ 0, x=y,\end{cases}$ (*дискретний простір*);

б) $\rho(x,y)=\begin{cases}-1, x\neq y,\\ 0, x=y;\end{cases}$ ***в)*** $\rho(x,y)=\begin{cases}2, x\neq y,\\ 1, x=y;\end{cases}$

5) (X,ρ_1) – деякий метричний простір та $\forall x,y\in X$:

а) $\rho(x,y)=\frac{\rho_1(x,y)}{1+\rho_1(x,y)}$; ***б)*** $\rho(x,y)=\ln\big(1+\rho_1(x,y)\big)$;

в) $\rho(x,y)=\min\{1,\rho_1(x,y)\}$; ***г)*** $\rho(x,y)=\big(\rho_1(x,y)\big)^2$;

д) $\rho(x,y)=\max\{1,\rho_1(x,y)\}$; ***е)*** $\rho(x,y)=\sqrt{\rho_1(x,y)}$;

6) X – довільна множина та функція $\rho\ \forall x,y,z\in X$ задовольняє умови: $\rho(x,y)=0\ \Leftrightarrow x=y$ та $\rho(x,y)\leq\rho(x,z)+\rho(z,y)$;

7) X – множина усіх прямих в просторі R^m, що проходять через початок координат, $\forall x,y\in X$ позначимо через α – найменший кут між прямими x,y та:

а) $\rho(x,y)=\alpha$; ***б)*** $\rho(x,y)=\sin\alpha$;

в) $\rho(x,y)=\cos\alpha$; ***г)*** $\rho(x,y)=\alpha-\sin\alpha$;

8) X – множина усіх прямих на декартовій площині X_1OX_2, що не проходять через початок координат та $\forall x,y\in X$, де x: $x_1\cos\alpha+x_2\sin\alpha=a$, y: $x_1\cos\beta+x_2\sin\beta=b$, $a,b>0$, $0\leq\alpha,\beta<2\pi$:

а) $\rho(x,y)=\sqrt{(a-b)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2+(\cos\alpha-\cos\beta)^2}$;

б) $\rho(x,y)=|a-b|+|\sin\alpha-\sin\beta|+|\cos\alpha-\cos\beta|$;

в) $\rho(x,y)=|a-b|+|\sin\alpha-\sin\beta|$;

9) X – множина усіх прямих на площині та $\forall x,y\in X$ через $\alpha>0$ позначимо менший кут між прямими x,y, якщо вони перетинаються та:

а) $\rho(x,y)=\begin{cases}\alpha, \text{ якщо прямі } x \text{ та } y \text{ перетинаються},\\ 0, \text{якщо прямі } x \text{ та } y \text{ не перетинаються};\end{cases}$

б) $\rho(x,y)=\begin{cases}0, \quad \text{якщо } x=y,\\ 1, \text{якщо прямі } x \text{ та } y \text{ не перетинаються},\\ \alpha, \text{ якщо прямі } x \text{ та } y \text{ перетинаються};\end{cases}$

в) $\rho(x,y)=d(A,x)+d(A,y)+f(x,y)$, де

$f(x,y)=\begin{cases}\alpha, \text{ якщо прямі } x \text{ та } y \text{ перетинаються},\\ 0, \text{якщо прямі } x \text{ та } y \text{ не перетинаються};\end{cases}$ та A деяка фіксована точка на площині;

10) X – множина усіх пар неперервних на $[a,b]$ функцій, $\forall x,y\in X$, де $x=\big(f_1(t),g_1(t)\big)$, $y=\big(f_2(t),g_2(t)\big)$:

$$\rho(x,y)=\sup_{t\in[a,b]}\left(|f_1(t)-f_2(t)|+|g_1(t)-g_2(t)|\right)$$

11) X – множина усіх сегментів на R, $\forall x,y\in X$, де $x=[a,b]$, $y=[c,d]$:

а) $\rho(x,y)=|c-a|+|d-b|$; ***б)*** $\rho(x,y)=b+d-a-c$;

в) $\rho(x,y)=b+d-a-c+|a+b-c-d|$;

г) $\rho(x,y)=\max\limits_{u\in\{a,b\}}\min\limits_{v\in\{c,d\}}\{|u-v|\}+\max\limits_{v\in\{c,d\}}\min\limits_{u\in\{a,b\}}\{|u-v|\}$;

12) X – множина точок деякого кола, $\forall x,y\in X$ величина $\rho(x,y)$ – довжина меншої з двох дуг кола X, що з'єднує точки x та y;

13) X – множина точок деякої сфери, $\forall x,y\in X$ величина $\rho(x,y)$ – довжина меншої з двох дуг кола, що проходить через точки x, y та центр сфери;

14) X – множина усіх *фінітних послідовностей*, тобто $(x_n)\in X$, якщо $\exists n_0$: $\forall n\geq n_0\ x_n=0$, $\forall x,y\in X$, де $x=(x_n),y=(y_n)$:

а) $\rho(x,y)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}|x_k(t)-y_k(t)|^p\right)^{\frac{1}{p}},p\geq 1$;

б) $\rho(x,y)=\max\limits_{n\in N}|x_n|+\max\limits_{n\in N}|y_n|$; ***в)*** $\rho(x,y)=\max\limits_{n\in N}|x_n-y_n|$;

15) X – множина усіх послідовностей, $\forall x,y\in X$, де $x=(x_n),y=(y_n)$:

а) $\rho(x,y)=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{|x_k-y_k|}{1+|x_k-y_k|}$; б) $\rho(x,y)=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{|x_k-y_k|}{1+|x_k-y_k|}$;

в) $\rho(x,y)=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{|x_k-y_k|}{2^k\cdot(1+|x_k-y_k|)}$;

г) $\rho(x,y)=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{|x_k-y_k|}{n^2\cdot(1+|x_k-y_k|)}$;

д) $\rho(x,y)=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{|x_k-y_k|}{n\cdot(1+|x_k-y_k|)}$;

16) X – множина усіх компактів в метричному просторі (R^m,ρ_1), де $\forall a,b\in R^m$ $\rho_1(a,b)=\|a-b\|_2$ – евклідова норма, $\forall x,y\in X$ величини $r_1=\max\limits_{a\in x}\min\limits_{b\in y}\rho_1(a,b)$, $r_2=\max\limits_{b\in y}\min\limits_{a\in x}\rho_1(a,b)$ та

а) $\rho(x,y)=\max\{r_1,r_2\}$; ***б)*** $\rho(x,y)=r_1$;

в) $\rho(x,y)=r_2$; ***г)*** $\rho(x,y)=r_1+r_2$;

17) X – множина усіх послідовностей натуральних чисел, $\forall x,y\in X$, де $x=(x_n),y=(y_n)$; $\rho(x,y)=\begin{cases}0,x=y,\\ \frac{1}{k},x\neq y,\end{cases}$ де k – найменший індекс, при якому $x_k\neq y_k$.

11. Нехай X – довільна множина, для якого визначене відображення $X\times X\xrightarrow{\rho}R^+$, що задовольняє умови:

- $x = y \Rightarrow \rho(x,y) = 0$;
- $\rho(x,y) = \rho(y,x)$;
- $\rho(x,y) \le \rho(x,z) + \rho(z,y)$.

Назвемо *класом елемента* $x \in X$ множину $K_x = \{y|\ \rho(x,y) =)\}$. Доведіть, що справджуються твердження:

1) якщо $y \in K_x$, то $K_x \cap K_y = \emptyset$;

2) $\bigcup_{x \in X} K_x = X$

3) якщо визначити функцію $\rho_1(K_x, K_y) = \rho(x,y)$, то множина усіх класів K_x разом з функцією ρ_1 є метричним простором.

12. Нехай X лінійний простір, для якого упорядкована пара (X,ρ) є метричним простором, в якому $\forall x,y,z \in E, \lambda \in R$ метрика ρ задовольняє умови:

- $\rho(x+z, y+z) = \rho(x,y)$;
- $\rho(\theta, \lambda x) = |\lambda| \rho(\theta, x)$;

Доведіть, що X стає ЛНП з нормою $\|x\| = \rho(\theta, x)$.

13. Чи існує для заданого X лінійного простору, для якого упорядкована пара (X,ρ) є метричним простором, такий елемент $x_0 \in X$, для якого X стає ЛНП з нормою $\|x\| = \rho(x_0, x)$, де

1) $X = R$ та:

а) $\rho(x,y) = \operatorname{arctg}|x-y|$; ***б)*** $\rho(x,y) = \sqrt{|x-y|}$;

в) $\rho(x,y) = \frac{|x-y|}{\sqrt{1+x^2}\cdot\sqrt{1+y^2}}$; ***г)*** $\rho(x,y) = |x-y|$;

2) $X = N$ та:

а) $\rho(x,y) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{x+y}, x \ne y, \\ 0, \quad x = y; \end{cases}$ ***б)*** $\rho(x,y) = \begin{cases} 1, x \ne y, \\ 0, x = y; \end{cases}$

3) (X,ρ) – це є метричний простір, що визначений в задачі:

а) № **9** пункт **10)**; ***б)*** № **9** пункт **14)** підпункт ***а)***;

в) № **9** пункт **15)** підпункт ***в)***;

14. Доведіть, що в метричному просторі (X,ρ) $\forall x,y,z,u \in X$ справджуються властивості:

1) $|\rho(x,z) - \rho(y,z)| \le \rho(x,y)$;

2) $|\rho(x,z) - \rho(y,u)| \le \rho(x,y) + \rho(z,u)$;

Розділ 5.2. Збіжності послідовностей

Короткі теоретичні відомості

Нехай E – ЛНП, послідовність $(x_n) \subset E$ називається ***збіжною до елементу*** $x \in E$, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$. В такому випадку елемент x називається ***границею послідовності*** (x_n) і позначати це будемо таким чином: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ або $x_n \to x,\ n \to \infty$.

Послідовність $(x_n) \subset E$ називається ***обмеженою***, якщо $\exists C \in R: \forall n \in N\ \|x_n\| \le C$.
Послідовність $(x_n) \subset E$ називається фундаментальною $\Leftrightarrow\ \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in N\ \forall n \ge n_0\ \|x_n - x\| < \varepsilon$.

Повністю аналогічно визначаються збіжні, обмежені, фундаментальні послідовності в предгільбертових чи метричних просторах, наприклад, в метричному просторі (X, ρ)

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \ \Leftrightarrow\ \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x) = 0.$$

ЛНП E (метричний простір (X, ρ)) називається ***повним***, якщо кожна фундаментальна послідовність збіжна в цьому просторі. Повний ЛНП називається ***банаховим простором***, повний предгільбертів простір, що є повним відносно норми $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ називається ***гільбертовим простором***.

Нехай E – лінійний простір в якому визначено дві різні норми $\|\cdot\|_1$ та $\|\cdot\|_2$. Якщо існують такі додатні сталі c та C, що $\forall x \in E$ справджуються умови $c\|x\|_1 \le \|x\|_2 \le C\|x\|_1$, то ці норми називаються ***еквівалентними***. Таким чином норми є еквівалентними, якщо вони задають однаковий набір збіжних послідовностей. Аналогічним чином визначаються еквівалентні метрики.

Теорема 6. *(Picca)*
У скінченновимірному лінійному просторі будь-які норми еквівалентні.

Задачі

15. Доведіть, що у предгільбертовому просторі E з нормою $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}\ \forall x, y \in E,\ \forall (x_n), (y_n) \subset E$ справджуються твердження при $n \to \infty$:
1) якщо $\langle x_n, x_n\rangle \to \langle x, x\rangle$, то $\langle x_n, y\rangle \to \langle x, y\rangle$;
2) якщо $\langle x_n, x_n\rangle \to \langle x, x\rangle$, $\langle y_n, y_n\rangle \to \langle y, y\rangle$то $\langle x_n, y_n\rangle \to \langle x, y\rangle$;
3) якщо $\|x_n + y_n\| \to 2$, $\|x_n\| = \|y_n\| = 1$, то $\|x_n - y_n\| \to 0$;

16. Доведіть, що у ЛНП $E\ \ \forall x, y \in E,\ \ \forall (x_n), (y_n) \subset E,\ \ \lambda \in R,\ \ (\lambda_n) \subset R$ справджуються твердження при $n \to \infty$:
1) якщо $x_n \to x$, то (x_n) – обмежена послідовність;
2) якщо $x_n \to x$, $y_n \to y$, то:
а) $x_n + y_n \to x + y$; ***б)*** $\|x_n - y_n\| \to \|x - y\|$;
3) якщо $x_n \to x$, $\lambda_n \to \lambda$, то $\lambda_n x_n \to \lambda x$;
4) якщо $x_n \to x$, то $\|x_n\| \to \|x\|$;
5) якщо $x_n \to x$, $\|x_n - y_n\| \to 0$, то $y_n \to x$;

17. Перевірте, чи у вказаному ЛНП E із збіжності $x_n \to x$ випливає *покоординатна* збіжність, тобто, якщо:

1) $E = R^m$, $x_n = \left(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)}\right)$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$, то $\forall k = \overline{1,m}$ $x_k^{(n)} \to x_k$;

2) $x_n = \left(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots,\right)$, $x = (x_1, x_2, \dots)$,то $\forall k \in N$ $x_k^{(n)} \to x_k$, де:

а) c_0; ***б)*** m; ***в)*** c;

3) $x_n = x_n(t)$, $x = x(t)$,то $\forall t \in [a,b]$ $x_n(t) \to x(t)$, де:

а) $C[a,b]$; ***б)*** $C^{(n)}[a,b]$; ***в)*** $M[a,b]$;

г) $\tilde{L}_1[0,1]$; ***д)*** $\tilde{L}_p[0,1]$;

18. Дослідити на збіжність у ЛНП E послідовність $x_n = x_n(t)$, якщо:

1) $E = C[0,1]$,

а) $x_n(t) = \frac{t}{n}$;

в) $x_n(t) = t^n - t^{n+1}$;

д) $x_n(t) = \frac{t^{n+1}}{n+1} - \frac{t^{n+2}}{n+2}$;

є) $x_n(t) = \sin t - \sin\frac{t}{n}$;

з) $x_n(t) = \frac{nt}{n+t+1}$;

і) $x_n(t) = \frac{2nt}{1+n^2t^2}$;

й) $x_n(t) = e^{-(t-n)^2}$;

2) $E = C^{(1)}[0,1]$,

б) $x_n(t) = t^n$;

г) $x_n(t) = t^n - t^{2n}$;

е) $\frac{t^{n+1}}{n+1} - \frac{t^{2n+1}}{2n+1}$;

ж) $x_n(t) = e^{-nt}$;

и) $x_n(t) = \frac{t^n}{1+t^n}$;

ї) $x_n(t) = e^{t(n-1)}$;

к) $x_n(t) = \sqrt[n]{1+t^n}$;

3) $\tilde{L}_1[0,1]$,

а) $x_n(t) = ne^{-nt}$;

в) $x_n(t) = t^n - t^{n+1}$;

д) $x_n(t) = \begin{cases} n, t \in \left[0, \frac{1}{n}\right), \\ \frac{1}{t}, t \in \left[\frac{1}{n}, 1\right]; \end{cases}$

є) $x_n(t) = \begin{cases} n^{\frac{2}{3}}, & t \in \left[0, \frac{1}{n} - \frac{1}{n^4}\right], \\ -\frac{1}{2}n^{\frac{14}{3}}\left(t - \frac{1}{n} - \frac{1}{n^4}\right), & t \in \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^4}, \frac{1}{n} + \frac{1}{n^4}\right), n \geq 2, \\ 0, & t \in \left[\frac{1}{n} + \frac{1}{n^4}, 1\right], \end{cases}$

$x_1(t) = 0$, $t \in [0,1]$;

ж) $x_n(t) = \begin{cases} -n^{\frac{7}{4}}\left(t - \frac{1}{n}\right), t \in \left[0, \frac{1}{n}\right), \\ 0, \quad t \in \left[\frac{1}{n}, 1\right]; \end{cases}$

4) $\tilde{L}_2[0,1]$,

б) $x_n(t) = t^n$;

г) $x_n(t) = t^n - t^{2n}$;

е) $x_n(t) = \begin{cases} 1 - nt, t \in \left[0, \frac{1}{n}\right), \\ 0, \quad t \in \left[\frac{1}{n}, 1\right]; \end{cases}$

5) $E = C[-1,1]$,

а) $x_n(t) = \operatorname{sgn} t$;

в) $x_n(t) = \operatorname{sgn}\left(t - \frac{1}{n}\right)$;

6) $E = M[-1,1]$,

б) $x_n(t) = \operatorname{sgn}(t - 2n)$;

г) $x_n(t) = |t|^n$;

д) $x_n(t) = \begin{cases} -\frac{1}{n} - \frac{t}{n}, t \in [-1, 0), \\ \frac{1}{n} - \frac{t}{n}, \ t \in [0, 1]; \end{cases}$

е) $x_n(t) = \begin{cases} \frac{t}{n}, t \in (-1, 1), \\ 0, \ t \in \{-1, 1\}; \end{cases}$ ***є)*** $x_n(t) = \frac{t}{n}$;

7) $E = c_0$, ***8)*** $E = c$, ***9)*** $E = m$,

а) $x_n = (\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{n}, 0, 0, \dots)$; ***б)*** $x_n = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, 0, 0, \dots\right)$;

в) $x_n = (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n}, 1, 1, \dots)$; ***г)*** $x_n = (1, 2, 3, \dots, n, 0, 0, \dots)$;

д) $x_n = (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n-1}, 1, 0, 0, 0, \ \dots)$; ***е)*** $x_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \right)$;

є) $x_n = (1 + \frac{1}{n}, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{n-2}, \frac{1}{n}, 0, 0, 0, \ \dots)$;

ж) $x_n = \left(1 + 1, 1 + \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{3}, \dots, 1 + \frac{1}{n}, 1, 1, 1, \ \dots\right)$;

з) $x_n = \left(2 + 1, -2 - \frac{1}{2}, 2 + \frac{1}{3}, -2 - \frac{1}{4}, \dots, 2 + \frac{1}{2n-1}, -2 - \frac{1}{2n}, 2, -2, 2, -2, \ \dots\right)$;

и) $x_n = \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}, 1, 1, 1, \ \dots\right)$;

й) $x_n = \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}, 2, 2, 2, \ \dots\right)$;

і) $x_n = (0, 1, 0, 1, 0, 1, \ \dots)$;

ї) $x_n = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n-1}, \frac{1}{\ln n}, \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2}, \ \dots\right)$;

к) $x_n = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, a, a, a, \ \dots)$, де послідовність$(a_n)$ збіжна до числа a;

л) $x_n = (a_1, b_2, a_3, b_4, a_5, b_6, a_{2n-1}, b_{2n}, a, b, a, b, \ \dots)$, де послідовність (a_n) збіжна до числа a, а послідовність (b_n) збіжна до числа b;

19. Знайдіть декілька пар ЛНП E_1 та E_2, для яких справджується така властивість: якщо послідовність $x_n \to x$ у просторі E_1, то $x_n \to x$ і у просторі E_2, а зворотна властивість може не справджуватися.

20. Чи є наведена норма еквівалентною стандартній нормі вказаного ЛНП E:

1) $E = C[a, b]$ та

а) $\|x\| = \left(\max\limits_{t \in [a,b]} x^4(t)\right)^{\frac{1}{4}}$; б) $\|x\| = \left(\int\limits_a^b \frac{x^2(t)\mathrm{dt}}{1 + t^2}\right)^{\frac{1}{2}}$;

в) $\|x\| = \max\limits_{t \in [a,b]} \int\limits_a^t |x(z)|dz$; г) $\|x\| = \int\limits_a^b \max\limits_{t \in [a,z]} |x(t)|dz$;

д) $\|x\| = \left(\int\limits_a^b \cos^4 t\, x^2(t)\mathrm{dt}\right)^{\frac{1}{2}}$; е) $\|x\| = \lim\limits_{z\to b-0} \max\limits_{t\in[a,z]} |x(t)|$;

є) $\|x\| = \lim\limits_{y\to a+0} \int\limits_y^b |x(t)|\mathrm{dt}$; ж) $\|x\| = \int\limits_a^{\frac{a+b}{2}} |x(t)|\mathrm{dt} + \max\limits_{t\in\left[\frac{a+b}{2},b\right]} |x(t)|$;

з) $\|x\| = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{|x(r_k)|}{2^k}$, де (r_k) – фіксована послідовність раціональних чисел проміжку $[a,b]$;

2) $E = C^{(1)}[a,b]$ та

а) $\|x\| = \max\limits_{t\in[a,b]} |x(t)|$; б) $\|x\| = |x(a)| + \max\limits_{t\in[a,b]} |x'(t)|$;

в) $\|x\| = |x(a) - x(b)| + \max\limits_{t\in[a,b]} \left|x'^{(t)}\right|$

г) $\|x\| = \int\limits_a^b |x(t)|\mathrm{dt} + \max\limits_{t\in[a,b]} |x'(t)|$;

д) $\|x\| = |x(a)| + \left(\int\limits_a^b \left(x'(t)\right)^2 \mathrm{dt}\right)^{\frac{1}{2}}$;

3) $E = C^{(2)}[a,b]$ та

а) $\|x\| = |x(a)| + |x'(a)| + \max\limits_{t\in[a,b]} |x''(t)|$;

б) $\|x\| = |x(a)| + |x(b)| + \left(\int\limits_a^b \left(x''(t)\right)^2 \mathrm{dt}\right)^{\frac{1}{2}}$;

в) $\|x\| = \left(\int\limits_a^b \cos^4 t\, x^2(t)\mathrm{dt}\right)^{\frac{1}{2}} + \max\limits_{t\in[a,b]} |x''(t)|$;

21. Чи є наведені метрики, що визначені на множині X, еквівалентними, де:

1) $X = R$ та $\rho_1(x,y) = \mathrm{arctg}\,|x-y|$, $\rho_2(x,y) = |x-y|$;

2) $X = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ та $\rho_1(x,y) = \mathrm{tg}\,|x-y|$, $\rho_2(x,y) = |x-y|$;

3) X – множина усіх многочленів степені n, що визначені на $[0,1]$ та $\forall x(t) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k t^k \in X$, $\forall y(t) = \sum_{k=0}^{n} \beta_k t^k \in X$ $\rho_1(x,y) = \max\limits_{t\in[0,1]} |x(t) - y(t)|$, $\rho_2(x,y) = \sum_{k=0}^{n} |\alpha_k - \beta_k|$;

22. Доведіть твердження:

1) нехай E – лінійний простір в якому визначено дві різні норми $\|\cdot\|_1$ та $\|\cdot\|_2$.; якщо з умови $\|x_n - x\|_1 \to 0$ випливає, що $\|x_n - x\|_2 \to 0$ при $n \to \infty$ та навпаки, то ці норми є еквівалентними, тобто норми є еквівалентними, якщо вони задають однаковий набір збіжних послідовностей;

2) для довільного $x \in R^m$ справджуються умови:

а) $\frac{1}{\sqrt{m}} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{m} x_k^2} \le \max_{1\le k\le m} |x_k| \le \sqrt{\sum_{k=1}^{m} x_k^2}$;

б) $\sqrt{\sum_{k=1}^{m} x_k^2} \le \sum_{k=1}^{m} |x_k| \le \sqrt{m} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{m} x_k^2}$;

в) $\frac{1}{m} \cdot \sum_{k=1}^{m} |x_k| \le \max_{1\le k\le m} |x_k| \le \sum_{k=1}^{m} |x_k|$;

г) $\lim_{p\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{m} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \max_{1\le k\le m} |x_k|$;

3) довільні норми в R^m еквівалентні;

4) якщо в ЛНП E визначено дві еквівалентні норми $\|\cdot\|_1$ та $\|\cdot\|_2$ і цей простір є повним в одній з них, то він є повним і в іншій нормі;

23. Нехай $(E, \|\cdot\|)$ – ЛНП або (E, ρ) – МП. Перевірити, чи справджуються такі твердження в просторі E для фундаментальна послідовність елементів (x_n):

1) умова фундаментальності послідовності (x_n) є необхідною і достатньою умовою збіжності послідовності (x_n);

2) будь-яка підпослідовність послідовності (x_n) є фундаментальною;

3) якщо деяка підпослідовність послідовності (x_n) є збіжною, то і сама послідовність (x_n) є збіжною;

4) умова фундаментальності послідовності (x_n) є необхідною і достатньою умовою збіжності послідовності (y_n), де

$$y_n = \sum_{k=1}^{n} \|x_{k+1} - x_k\| \left(y_n = \sum_{k=1}^{n} \rho(x_{k+1}, x_k) \right);$$

5) якщо (z_n) така послідовність, що $\|x_n - z_n\| \to 0$ $(\rho(x_n, z_n) \to 0)$ при $n \to \infty$, то (z_n) – фундаментальна послідовність;

6) (x_n) буде фундаментальною послідовністю в будь-якій нормі (метриці), яка є еквівалентною заданій нормі (метриці);

24. Чи є повними такі простори:

1) усі ЛНП, що перелічені в задачі № **4** пункт ***1)***;

2) МП (R,ρ), де $\forall x,y\in R$:

а) $\rho(x,y)=\operatorname{arctg}|x-y|$; ***б)*** $\rho(x,y)=\sqrt{|x-y|}$;

3) МП (N,ρ), де $\forall x,y\in N$:

а) $\rho(x,y)=\begin{cases}1+\frac{1}{x+y}, x\neq y,\\ 0, \quad x=y;\end{cases}$ ***б)*** $\rho(x,y)=\begin{cases}\max\{x,y\}, x\neq y,\\ 0, \quad x=y;\end{cases}$

в) $\rho(x,y)=\frac{|x-y|}{xy}$; ***г)*** $\rho(x,y)=|x-y|$;

д) $\rho(x,y)=|x^2-y^2|$;

4) МП (N,ρ), де $\forall x,y\in Q$ $\rho(x,y)=|x-y|$;

5) МП (X,ρ), де X – довільна множина і $\forall x,y\in X$:

а) $\rho(x,y)=\begin{cases}1, x\neq y,\\ 0, x=y,\end{cases}$ ***б)*** $\rho(x,y)=\begin{cases}1, x\neq y,\\ 2, x=y;\end{cases}$

6) МП (X,ρ), де (X,ρ_1) – повний МП в метриці ρ_1 і $\forall x,y\in X$:

а) $\rho(x,y)=\frac{\rho_1(x,y)}{1+\rho_1(x,y)}$; ***б)*** $\rho(x,y)=\ln\big(1+\rho_1(x,y)\big)$;

в) $\rho(x,y)=\min\{1,\rho_1(x,y)\}$;

7) МП (X,ρ), що визначений в задачі: № 4 пункт 1);

а) № **9** пункт ***9)*** підпункт ***а)***; ***б)*** № **9** пункт ***10)***;

в) № **9** пункт ***11)*** підпункт ***а)***; ***г)*** № **9** пункт ***12)***;

д) № **9** пункт ***13)***; ***е)*** № **9** пункт ***14)*** підпункт ***а)***;

є) № **9** пункт ***14)*** підпункт ***б)***; ***ж)*** № **9** пункт ***14)*** підпункт ***в)***;

з) № **9** пункт ***15)*** підпункт ***в)***; ***и)*** № **9** пункт ***15)*** підпункт ***г)***;

8) предгільбертів простір $E=R^m$, де $\forall x,y\in E$:

а) № **6** пункт ***1)*** підпункт ***а)***; ***б)*** № **6** пункт ***1)*** підпункт ***г)***;

в) № **6** пункт ***2)*** підпункт ***а)***; ***г)*** № **6** пункт ***3)*** підпункт ***а)***;

д) № **6** пункт ***3)*** підпункт ***б)***; ***е)*** № **6** пункт ***3)*** підпункт ***є)***;

є) № **6** пункт ***3)*** підпункт ***з)***; ***ж)*** № **6** пункт ***5)*** підпункт ***а)***;

з) № **6** пункт ***5)*** підпункт ***в)***; ***и)*** № **6** пункт ***5)*** підпункт ***д)***;

25. Доведіть твердження:

1) якщо X_1 та X_2 – ЛП, то $X=X_1\times X_2$ є ЛП, якщо визначити на ньому операції таким чином: $\forall x=(x_1,x_2),y=(y_1,y_2)\in X,\ \ \forall\lambda\in R\ \ x+y=(x_1+y_1,x_2+y_2)$, $\lambda x=(\lambda x_1,\lambda\, x_2)$;

2) якщо $(X_1,\|x\|_1)$ та $(X_2,\|x\|_2)$ – ЛНП, то ЛП $X=X_1\times X_2$, визначений як в пункті ***1)*** цієї задачі, стає ЛНП, якщо $\forall x=(x_1,x_2)$ визначити норму в X таким чином:

а) $\|x\|=\sqrt{\|x_1\|_1^2+\|x_2\|_2^2}$; ***б)*** $\|x\|=\|x_1\|_1+\|x_2\|_2$;

в) $\|x\|=\max\{\|x_1\|_1,\|x_2\|_2\}$;

3) якщо (X_1,ρ_1) та (X_2,ρ_2) – МП, то множина $X=X_1\times X_2$ стає МП, якщо $\forall x=(x_1,x_2),y=(y_1,y_2)\in X$ визначити метрику ρ таким чином:

а) $\rho(x,y)=\sqrt{\rho_1^2(x,y)+\rho_2^2(x,y)}$;

б) $\rho(x,y)=\rho_1(x,y)+\rho_2(x,y)$;

в) $\rho(x,y)=\max\{\rho_1(x,y),\rho_2(x,y)\}$;

4) якщо в пунктах 2) або 3) цієї задачі ЛНП $(X_1, \|x\|_1)$ та $(X_2, \|x\|_2)$ або МП (X_1, ρ_1) та (X_2, ρ_2) є повними відповідно у вказаних нормах або метриках, то ЛНП $(X, \|\cdot\|)$ або МП (X, ρ) є БП або повним МП відповідно;

5) якщо в пунктах ***1)–4)*** замість двох просторів (множин) X_1 та X_2 розглянути довільну скінченну X_1, X_2, …, X_m або злічену кількість X_1, X_2, ... просторів (множин), то усі твердження лишаються чинними, якщо норму та метрику визначити відповідно таким чином:

$$\|x\| = \max_{1\le k\le m} \|x_k\|_k \left(\|x\| = \sup_{k\in N} \|x_k\|_k\right) \text{ або}$$

$$\rho(x,y) = \max_{1\le k\le m} \rho_k(x,y) \left(\rho(x,y) = \sup_{k\in N} \rho_k(x,y)\right).$$

Розділ 5.3. Топологія в ЛНП та МП

Короткі теоретичні відомості

Нехай E – ЛНП (МП), ***відкритою (заманеною) кулею з центром у точці*** x_0 ***та радіусом*** r ***в*** E називають множину

$$S(x_0,r) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in E \mid \|x_0 - x\| < r \; (\text{cl}\, S(x_0,r) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in E \mid \|x_0 - x\| \le r)$$
$$\big(S(x_0,r) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in E \mid \rho(x_0,x) < r \; (\text{cl}\, S(x_0,r) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in E \mid \rho(x_0,x) \le r)\big).$$

Сферою з центром у точці x_0 ***та радіусом*** r ***в*** просторі E називають множину

$$\sigma(x_0,r) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in E \mid \|x_0 - x\| = r = \text{cl}\, S(x_0,r) \backslash S(x_0,r).$$

Множина $A \subset E$ називається ***обмеженою*** якщо $\exists S(x_0,r)\colon A \subset S(x_0,r)$. ***Діаметром*** множини $A \subset E$ називається величина

$$\text{diam}\, A \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x,y\in A} \|x-y\| \left(\sup_{x,y\in A} \rho(x,y)\right).$$

Відстанню від точки $x_0 \in E$ ***до множини*** $A \subset E$ називається величина

$$\rho(x_0,A) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{y\in A} \|x_0 - y\| \left(\inf_{y\in A} \rho(x_0,y)\right).$$

Відстанню між множинами $A, B \subset E$ називається величина

$$\rho(A,B) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{x\in A, y\in B} \|x-y\| \left(\inf_{x\in A, y\in B} \rho(x,y)\right).$$

Відкрита куля $S(x_0,\varepsilon)$ називається ***ε-околом точки*** x_0 в просторі E. ***Околом точки*** x_0 називається довільна множина $M \subset E$, для якої $\exists \varepsilon > 0\colon S(x_0,\varepsilon) \subset M$.

Точка x_0 називається ***внутрішньою точкою*** множини $A \subset E$, якщо ця множина є околом точки x_0. Сукупність усіх внутрішніх точок множини A називається ***внутрішністю множини*** A і позначається $\text{int}\, A$. Множина $A \subset E$ називається ***відкритою*** в просторі E, якщо справджується рівність: $A = \text{int}\, A$.

Точка x_0 називається ***точкою дотикання*** або ***точкою дотику*** множини $A \subset E$, якщо $\forall \varepsilon > 0$: $S(x_0,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$. Сукупність усіх точок дотикання множини A називається ***замиканням множини*** A і позначається $\text{cl}\, A$. Множина $A \subset E$ називається ***замкненою*** в просторі E, якщо справджується рівність: $A = \text{cl}\, A$.

Точка x_0 називається ***граничною точкою*** множини $A \subset E$, якщо $\forall \varepsilon > 0$: $(S(x_0,\varepsilon) \cap A)\{x_0\} \neq \emptyset$. Сукупність усіх граничних точок множини A називається ***похідною множиною*** множини A і позначається A'. Множина $A \subset E$ називається ***досконалою*** в просторі E, якщо справджується рівність: $A = A'$.

Точка x_0 називається ***межовою точкою*** або ***точкою межі*** множини $A \subset E$, якщо $\forall \varepsilon > 0$ множина $S(x_0,\varepsilon)$ містить як точки множини A так і точки сножини доповнення $\complement A$. Сукупність усіх межових точок множини A називається ***межею множиною*** множини A і позначається $\text{fr}\, A$.

Точка x_0 називається ***ізольованою точкою*** множини $A \subset E$, якщо $x_0 \in A$ та x_0 не є граничною точкою множини A.

Множина $A \subset E$ називається ***щільною в множині*** $B \subset E$, якщо $B \subset \text{cl}\, A$. Множина $A \subset E$ називається ***скрізь щільною*** або ***всюди щільною*** в просторі E, якщо $E = \text{cl}\, A$. Множина $A \subset E$ називається ***ніде не щільною*** в просторі E, якщо вона не є щільною в жодній відкритій кулі простору E. Простір E називається ***сепарабельним***, якщо в ньому існує злічена скрізь щільна підмножина.

Послідовність множин $(A_n) \subset E$ називається ***вкладеною***, якщо $\forall n \in N$ справджується умова $A_{n+1} \subset A_n$.

Теорема 7. *(Принцип вкладених куль)*

Простір E є повним тоді і тільки тоді, коли будь-яка послідовність замкнених вкладених куль $\mathrm{cl}\, S(x_n, r_n)$, у якої $r_n \to 0$ при $n \to \infty$ має непорожній перетин.

Множина M ЛНП E називається ***опуклою***, якщо $\forall x, y \in M$ та $\forall \lambda \in (0,1)$ елемент $\lambda x + (1-\lambda) \in M$. ***Опуклою оболонкою*** множини M називається перетин усіх опуклих множин ЛНП E, що містять M та позначається $\mathrm{conv}\, M$.

Задачі

26. В ЛНП E опишіть множини $S(\theta,1)$, $\mathrm{cl}\, S(\theta,1)$ та $\sigma(\theta,1)$, де

1) $E = L_1^2$; ***2)*** $E = L_2^2$; ***3)*** $E = L_\infty^2$; ***4)*** $E = L_1^3$;
5) $E = L_2^3$; ***6)*** $E = L_\infty^3$; ***7)*** $E = m$; ***8)*** $E = c$;
9) $E = c_0$; ***10)*** $E = C[0,1]$; ***11)*** $E = M[0,1]$;

27. Доведіть, що у ЛНП (МП) E справджуються твердження:

1) для довільної множини A мають місце включення:

а) $\mathrm{int}\, A \subset A \subset \mathrm{cl}\, A$; ***б)*** $\mathrm{int}\, A \subset A' \subset \mathrm{cl}\, A$;

2) існують простори E та множини A, для яких усі включення пункту ***1)*** є строгими;

3) існують простори E та множини $A \neq E$ та $A \neq \emptyset$, для яких у пункті ***1)*** справджуються рівності;

4) точка x_0 є точкою дотику множини $A \subset E$, якщо існує послідовність точок (x_n) множини A, що збігається до x_0;

5) точка x_0 є граничною точкою множини $A \subset E$, якщо існує послідовність точок (x_n) множини $A \backslash \{x_0\}$, що збігається до x_0;

6) для довільної множини $A \subset E$ мають місце умови:

а) множина A' є замкненою;

б) $A' \supset A''$ ... $\supset A^{(n)} \supset \cdots$;

28. Перевірте, чи справджуються у ЛНП (МП) E твердження:

1) для множин $A, B \subset E$ множина $A \backslash B$ обов'язково буде відкритою, якщо:

а) A, B – відкриті ; ***б)*** A – відкрита, B – замкнена;

в) A, B – замкнені ; ***г)*** A – замкнена, B – відкрита;

2) замкненою є такі множини:

а) $\mathrm{cl}\, A$ для довільної множини A;

б) перетин скінченної кількості замкнених множин;

в) об'єднання скінченної кількості замкнених множин;

г) перетин зліченої кількості замкнених множин;

д) об'єднання зліченої кількості замкнених множин;

е) та, що містить усі свої граничні точки;

є) доповнення до яких відкрите;

ж) fr A для довільної множини A;

з) множина A, для якої fr $A \subset A$;

3) відкритими є множини:

а) int A для довільної множини A;

б) перетин скінченної кількості відкритих множин;

в) об'єднання скінченної кількості відкритих множин;

г) перетин зліченої кількості відкритих множин;

д) об'єднання зліченої кількості відкритих множин;

4) cl A – найменша замкнена множина, що містить множину A;

5) int A – найбільша відкрита множина, що міститься в множині A;

6) досконалими є такі множини:

а) A' для довільної множини A;

б) перетин скінченної кількості досконалих множин;

в) об'єднання скінченної кількості досконалих множин;

г) перетин зліченої кількості досконалих множин;

д) об'єднання зліченої кількості досконалих множин;

7) існує множина A, для якої:

а) $A \neq \emptyset$ та fr $A = \emptyset$;

а) fr $A \neq \emptyset$ та $A \cap$ fr $A = \emptyset$;

8) якщо в E визначено дві різні норми $\|\cdot\|_1$ та $\|\cdot\|_2$ (метрики ρ_1 та ρ_2), то ці норми (метрики) є еквівалентними, тоді і тільки тоді, коли сукупність усіх множин, що є замкненими відносно однієї норми (метрики) співпадає з сукупністю усіх множин, що є замкненими відносно другої норми (метрики);

9) якщо множини A_n обмежені $\forall n \in N$, то обмеженою є і множина B, де:

а) $B = A_1 \cup A_2$; ***б)*** $B = X \backslash A_1$; ***в)*** $B = A_1 \cap A_2$

г) $A = A_1 \backslash A_2$; д) $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$; е) $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$;

10) наступні три умови еквівалентні:

а) A – обмежена множина;

б) diam $A < \infty$;

в) $\forall (x_n) \subset A$, $\forall (\lambda_n) \subset R$ з умови $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = 0$ випливає, що $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n x_n = \theta$;

11) з умови $\rho(x, A) = 0$ випливає, що $x \in A$, якщо:

а) A – відкрита множина;

б) A – замкнена множина;

12) з умови $\rho(x, A) = a > 0$ випливає, що $\exists y \in A$, для якого $\|x - y\| = a$ $(\rho(x, y) = a)$, якщо:

а) A – відкрита множина;

б) A – замкнена множина;

13) існують множини A та B, що не перетинаються, та такі множини C та D, що також не перетинаються, для яких $A \subset C$ та $B \subset D$, якщо

а) A, B – відкриті множини, C та D – замкнені;

б) A, B – замкнені множини, C та D – відкриті;

14) $\forall x_0 \in E$, $\forall r > 0$ справджуються умови:

а) $\mathrm{cl}\, S(x_0, r) = \mathrm{cl}\left(S(x_0, r)\right)$;

б) $\mathrm{diam}\left(S(x_0, r)\right) = 2r$;

в) $\forall y \in E$, $\forall R > 0$ включення $S(x_0, r) \subset S(y, R)$ неможливо при $r > R$;

15) для довільних множин $A, B \in E$ та довільної точок $x, y \in E$ справджуються рівності:

а) $\rho(x, A) = \rho(x, \mathrm{cl}\, A)$; ***б)*** $\rho(x, A) = \rho(x, \mathrm{int}\, A)$;

в) $\rho(A, B) = \inf\limits_{x \in A} \rho(x, B) = \inf\limits_{y \in B} \rho(y, A) = \max\{\inf\limits_{x \in A} \rho(x, B), \inf\limits_{y \in B} \rho(y, A)\}$;

г) $\rho(A, B) = \rho(A, \mathrm{cl}\, B) = \rho(\mathrm{cl}\, A, B) = \rho(\mathrm{cl}\, A, \mathrm{cl}\, B) = \rho(\mathrm{int}\, A, \mathrm{int}\, B)$;

д) $|\rho(x, A) - \rho(x, B)| \leq \rho(x, y)$;

16) $\forall A \subset E$, $\forall x_0 \in E$ справджуються умови:

а) $\mathrm{diam}\, A = \mathrm{diam}\, (\mathrm{cl}\, A) = \mathrm{diam}\, (\mathrm{int}\, A) = \mathrm{diam}\, (A')$;

б) $\rho(x_0, A) = 0 \Leftrightarrow x_0 \in \mathrm{cl}\, A$;

17) для довільної відкритої множини $A \in E$ існує така послідовність замкнених множин (B_n), що справджується рівність:

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\,;$$

18) для довільної замкненої множини $A \in E$ існує така послідовність відкритих множин (B_n), що справджується рівність:

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\,;$$

19) існує простір, в якому справджуються такі умови:

а) $\exists x_0 \in E$, $\exists r > 0$: $S(x_0, r) = \mathrm{cl}\, S(x_0, r)$;

б) $\forall x_0 \in E$, $\forall r > 0$: $S(x_0, r) = \mathrm{cl}\, S(x_0, r)$;

в) існує більш ніж злічена множина, в якій усі точки є ізольовані;

г) існують замкнені множини A та B, для яких $A \cap B = \emptyset$ та $\rho(A, B) = 0$;

29. З'ясуйте, яке з тверджень $X \subset Y$, $X = Y$ або $X \supset Y$ завжди справджується для довільних множин A, B, (A_n) з E, якщо

1) $X = \mathrm{cl}\, (A \cup B)$ та $Y = \mathrm{cl}\, A \cup \mathrm{cl}\, B$;

2) $X = \mathrm{cl}\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right)$ та $Y = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathrm{cl}\, A_n$;

3) $X = \mathrm{cl}\, (A \cap B)$ та $Y = \mathrm{cl}\, A \cap \mathrm{cl}\, B$;

4) $X = \mathrm{int}\, (A \cap B)$ та $Y = \mathrm{int}\, A \cap \mathrm{int}\, B$;

5) $X = \mathrm{int}\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right)$ та $Y = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \mathrm{int}\, A_n$;

6) $X = \mathrm{int}\, (A \cup B)$ та $Y = \mathrm{int}\, A \cup \mathrm{int}\, B$;

7) $X = A$ та $Y = \mathrm{cl}\,(\mathrm{int}\,A)$ та
   а) A замкнена множина A;
   б) A відкрита множина A;
8) $X = A$ та $Y = \mathrm{int}\,(\mathrm{cl}\,A)$ та
   а) A замкнена множина A;
   б) A відкрита множина A;
9) $X = \mathrm{int}\,A$ та $Y = \mathrm{int}\left(\mathrm{cl}\,(\mathrm{int}\,A)\right)$;
10) $X = \mathrm{cl}\,A$ та $Y = \mathrm{cl}\left(\mathrm{int}\,(\mathrm{cl}\,A)\right)$;
11) $X = \mathrm{C}(\mathrm{int}\,A)$ та $Y = \mathrm{cl}\,(\mathrm{C}A)$;
12) $X = \mathrm{C}(\mathrm{cl}\,A)$ та $Y = \mathrm{int}\,(\mathrm{C}A)$;
13) $X = \mathrm{cl}\,A$ та $Y = \mathrm{fr}\,A \cup \mathrm{int}\,\mathrm{A}$;
14) $X = \mathrm{fr}\,A$ та $Y = \mathrm{cl}\,A \setminus \mathrm{int}\,\mathrm{A}$;
15) $X = \mathrm{fr}\,(A \cup B)$ та $Y = \mathrm{fr}\,A \cup \mathrm{cl}\,B$;
16) $X = \mathrm{fr}\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right)$ та $Y = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathrm{fr}\,A_n$;
17) $X = \mathrm{fr}\,(A \cap B)$ та $Y = \mathrm{fr}\,A \cap \mathrm{cl}\,B$;
18) $X = \mathrm{fr}\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right)$ та $Y = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \mathrm{fr}\,A_n$;
19) $X = \mathrm{fr}\,(\mathrm{cl}\,A)$ та $Y = \mathrm{fr}\,(\mathrm{fr}\,A)$ та
   а) A замкнена множина A;
   б) A відкрита множина A;
20) $X = \mathrm{fr}\,A$ та $Y = \mathrm{fr}\,(\mathrm{fr}\,A)$ та

30. Для наведеної множини A у ЛНП (МП) E та точок $x_1, x_2, \dots, x_n \in E$ з'ясуйте:
1) чи є вказані точки внутрішніми для множини A;
2) чи є вказані точки граничними для множини A;
3) чи є вказані точки точками дотикання для множини A;
4) чи є вказані точки межовими для множини A;
5) чи буде множина A скрізь щільною, ніде не щільною, якщо:
   а) $E = L_1^2$, $A = ([-2,1] \times [0,3]) \cup \big((2,4) \times (0,2)\big) \cup (0,-1)$; $x_1 = (0,-1)$, $x_2 = (1,1)$, $x_3 = (0,1)$, $x_4 = (1,2)$, $x_5 = (-2,1)$, $x_6 = (-1,-1)$, $x_7 = (3,1)$;
   б) $E = L_1^2$, $A = ([-2,1] \times [0,3]) \cup \big((2,4) \times (0,2)\big) \cup (0,-1)$; $x_1 = (0,-1)$, $x_2 = (1,1)$, $x_3 = (0,1)$, $x_4 = (1,2)$, $x_5 = (-2,1)$, $x_6 = (-1,-1)$, $x_7 = (3,1)$;

31. Перевірте, чи буде у ЛНП (МП) E задана множина X відкритою чи замкненою:
1) E довільний ЛНП (МП) та:
   а) $A = S(\theta, 1)$; ***б)*** $A = \mathrm{cl}\,S(\theta, 1)$;
   в) $A = \sigma(\theta, 1)$; ***г)*** $A = \{\,\theta\,\}$; ***д)*** $A = E \setminus \{\,\theta\,\}$;
2) $E = C[a, b]$:

а) A – множина усіх многочленів;

б) A – множина усіх многочленів, степені не більше n;

в) A – множина усіх многочленів, степені n;

г) A – множина усіх неперервних на $[a,b]$ функцій $x(t)$, для яких справджується умова $|x(t)|<1, \forall t\in[a,b]$;

д) A – множина усіх неперервних на $[a,b]$ функцій $x(t)$, для яких справджується умова $\sup\limits_{t\in[a,b]} x(t)>1$;

3) $E=M[a,b]$ та:

а) A – множина усіх неперервних на $[a,b]$ функцій;

б) A – множина усіх обмежених на $[a,b]$ функцій $x(t)$, для яких справджується умова $|x(t)|\le 1$, $\forall t\in[a,b]$;

в) A – множина усіх обмежених на $[a,b]$ функцій $x(t)$, для яких справджується умова $x(t)>1$, $\forall t\in[a,b]$;

4) E довільний ЛНП (МП) та:

а) $A=\{x\in E \mid \rho(x,B)<2\}$, де B – довільна підмножина простору E;

б) $A=\{x\in E \mid \rho(x,B)\ge 2$, де B – довільна підмножина простору E;

в) $A=\{x\in E \mid \rho(x,a)+\rho(x,b)<1\}$, де a,b – довільні точки простору E;

г) $A=\{x\in E \mid \rho(x,a)+\rho(x,b)\ge 1\}$, де a,b – довільні точки простору E;

4) $E=L_2^m$ та:

а) $A=\bigcup\limits_{x\in B}\operatorname{cl} S(x,1)$, де $B-$ деяка відкрита множина;

б) $A=\bigcup\limits_{x\in B}\operatorname{cl} S(x,1)$, де $B-$ деяка замкнена множина;

5) $E=Q$ та:

а) $A=[0,3]\cap Q$; ***б)*** $A=[-\pi,\pi]\cap Q$;

6) $E=L_2^2$ та:

а) $A=([0,1]\times[0,1])\cap\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n\right)$, де $A_n=([0,1]\times[0,1])\backslash C_n$ та

$$C_n=\bigcup_{k=1}^{3^{n-1}}\bigcup_{i=1}^{3^{n-1}}\left(\frac{3k-2}{3^n},\frac{3k-1}{3^n}\right)\times\left(\frac{3i-2}{3^n},\frac{3i-1}{3^n}\right)$$

(*килим Серпінського*);

б) $A=([0,1]\times[0,1])\cap\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}B_n\right)$, де

$$B_n=\bigcup_{k=1}^{3^{n-1}}\bigcup_{i=1}^{3^{n-1}}\left(\left[\frac{3k-3}{3^n},\frac{3k-2}{3^n}\right]\times\left[\frac{3i-3}{3^n},\frac{3i-2}{3^n}\right]\cup\right.$$

$$\cup\left[\frac{3k-1}{3^n},\frac{3k}{3^n}\right]\times\left[\frac{3i-3}{3^n},\frac{3i-2}{3^n}\right]\cup\left[\frac{3k-3}{3^n},\frac{3k-2}{3^n}\right]\times\left[\frac{3i-1}{3^n},\frac{3i}{3^n}\right]\cup$$

$\cup \left[\frac{3k-1}{3^n}, \frac{3k}{3^n}\right] \times \left[\frac{3i-1}{3^n}, \frac{3i}{3^n}\right]\Big), n \in N$
(*кладовище Серпінського*);

32. Перевірте, чи обов'язково буде у ЛНП (МП) E задана множина X ніде не щільною або скрізь щільною, якщо:

1) $X = \mathrm{cl}\, A$ та:
- ***а)*** A ніде не щільна в E;
- ***б)*** A скрізь щільна в E;

2) $X = \mathrm{C}A$ та:
- ***а)*** A ніде не щільна в E;
- ***б)*** A скрізь щільна в E;
- ***в)*** A – відкрита та скрізь щільна в E;

3) $X = A \backslash B$, де A скрізь щільна в E та:
- ***а)*** B скінченна множина;
- ***б)*** B злічена множина;
- ***в)*** B ніде не щільна в E;

4) $X = E \backslash \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ та $\forall n \in N$:
- ***а)*** A_n ніде не щільна в E;
- ***б)*** A_n скрізь щільна в E;

5) $X = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ та $\forall n \in N$:
- ***а)*** A_n ніде не щільна в E;
- ***б)*** A_n скрізь щільна в E;

33. Дослідить на ніде не щільність та скрізь щільність множини A у ЛНП (МП) E, якщо:

1) $E = C[a, b]$ та:
- ***а)*** A – множина усіх кусково лінійних та неперервних на $[a, b]$ функцій;
- ***б)*** A – множина усіх многочленів;
- ***в)*** A – множина усіх многочленів, степені не більше n;

2) $E = M[a, b]$ та:
- ***а)*** A – множина усіх неперервних на $[a, b]$ функцій;
- ***б)*** A – множина усіх обмежених на $[a, b]$ функцій f, у яких $E_f \subset \left\{\frac{2k+1}{2^n} \,\middle|\, k \in Z, n \in N\right\}$;

3) $E = m$ та:
- ***а)*** A – множина усіх збіжних послідовностей;
- ***б)*** A – множина усіх обмежених послідовностей раціональних чисел;
- ***в)*** A – множина усіх обмежених послідовностей цілих чисел;

4) $E = c$ та:
- ***а)*** A – множина усіх збіжних до 0 послідовностей;
- ***б)*** A – множина послідовностей, що збігаються до цілих чисел;
- ***в)*** A – множина усіх стаціонарних послідовностей;
- ***г)*** A – множина усіх збіжних послідовностей раціональних чисел;

5) $E = [0, 1]$ та:

а) $A = \{0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots \mid \alpha_i \in \{0,1,2,3,4,6,7,8,9\}, i \in N\}$;
б) $A = \{0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots \mid \alpha_i \in \{0,1,2,3,5,7,8,9\}, i \in N\}$;
в) $A = \{0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots \mid \alpha_i \in \{0,1,2,3,6,7,8,9\}, i \in N\}$;
г) $A = \left\{\frac{2k-1}{2^n} \mid k, n \in N, 2k-1 < 2^n\right\}$;
д) $A = \left\{\frac{1}{n} \mid n \in N\right\}$; ***е)*** $A = [0,1]\backslash(R\backslash Q)$;

6) $E = R$ та:
а) $A = \{0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots \mid \alpha_i \in \{0,1,2,3,4,6,7,8,9\}, i \in N\}$;
б) $A = \bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} [2n, 2n+1]$;
в) $A = \big((-\infty, 0) \cap (R\backslash Q)\big) \cup ([0, +\infty) \cap Q)$;

7) $E = [f(a), f(b)]$, де $a < b$, f – зростаюча на $[a,b]$ функція та :
а) $A = f(B)$, де B – скрізь щільна на $[a,b]$ множина і функція f – неперервна на $[a,b]$;
б) $A = f(B)$, де B – ніде щільна на $[a,b]$ множина і функція f – неперервна на $[a,b]$;
в) $A = f(B)$, де B – скрізь щільна на $[a,b]$ множина;
г) $A = f(B)$, де B – ніде щільна на $[a,b]$ множина;

34. Доведіть, що у ЛНП (МП) E справджуються твердження:
1) якщо існує більш ніж злічена множина A та $\exists \varepsilon > 0 \ \ \forall x, y \in A$ справджується умова $\|x - y\| \geq \varepsilon$ $(\rho(x,y) \geq \varepsilon)$, то E – не сепарабельний простір;
2) E – не сепарабельний простір тоді і тільки тоді, коли в ньому існує більш ніж злічена сукупність відкритих куль одиничного радіуса, які попарно не перетинаються;
3) якщо E – сепарабельний гільбертів простір тоді і $\{l_\alpha \mid \alpha \in A\}$ – ортонормована система елементів в E, то множина A не більш ніж злічена;
4) рівно один з наведених нижче просторів є несепарабельним:
а) L_p^m; ***б)*** m; ***в)*** c;
г) c_0; ***д)*** l_p; ***е)*** $C[a,b]$;
є) $C^{(n)}[a,b]$; ***ж)*** $\tilde{L}_p[a,b]$; ***з)*** $M[a,b]$;
5) несепарабельним є дискретний МП, що визначений в задачі **10** пункт ***4)*** підпункт ***а)***:
6) принцип вкладених куль не буде справджуватися, якщо відмовитися від умови, що:
а) кулі не є замкненими; ***б)*** простір не є повним;
7) перетин вкладених куль, про які йдеться в теоремі 7, має в перетині єдину точку;
8) у повному просторі E є послідовність замкнених вкладених множин A_n, у яких $\operatorname{diam} A_n \to 0$ при $n \to \infty$ має непорожній перетин;
9) у повному просторі E існує послідовність замкнених вкладених множин A_n, що має порожній перетин;

35. Доведіть, що у ЛНП E справджуються твердження:

1) нерівність трикутника у визначенні норми ЛНП еквівалентна умові опуклості кулі $S(\theta, 1)$;

2) опукла оболонка відкритої множини є відкритою множиною;

3) опукла оболонка замкненої обмеженої множини є замкненою множиною;

4) $\forall A \subset E$ справджується рівність:

$$conv\ A = \left\{ x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \mid \left| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, n \in N, \lambda_i \in R, x_i \in A, i = \overline{1,n} \right. \right\};$$

36. Дослідить на опуклість множину M у ЛНП (МП) E, якщо:

1) E – довільний простір, $x_0 \in E, r > 0$ та множина M це:

а) $S(x_0, r)$; ***б)*** $\mathrm{cl}\, S(x_0, r)$; ***в)*** $\sigma(x_0, r)$;

2) E – довільний простір, множини $A, B, \{A_i |\ i = \overline{1,n}\}, \{A_\alpha |\ \alpha \in J\}$, де J нескінченна множина, є опуклими, множина D – довільна та множина M це:

а) $A \cup B$; ***б)*** $A \cap B$;

в) $A \backslash B$; ***г)*** $A \Delta B$;

д) $\{a + b |\ a \in A, b \in B\}$; ***е)*** $\{\lambda a |\ a \in A, \lambda \in R\}$;

є) $\mathrm{cl}\, A$; ***ж)*** $\mathrm{conv}\, D$;

з) $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$; и) $\bigcap_{\alpha \in J} A_\alpha$;

3) $E = C[0,1]$ та:

а) A – множина усіх многочленів;;

б) A – множина усіх многочленів степені n;

в) A – множина усіх многочленів степені не більше n;

г) $A -$ множина усіх неперервних на $[0,1]$ функцій, що задовольняють умові $\int_0^1 |x(t)|\mathrm{dt} \le 1$;

д) $A -$ множина усіх неперервних на $[0,1]$ функцій, що задовольняють умові $\int_0^1 x^2(t)\mathrm{dt} \le 1$;

е) $A -$ множина усіх неперервно диференційованих на $[0,1]$ функцій, що задовольняють умові $\max_{t\in[0,1]} |x(t)| + \max_{t\in[0,1]} |x'(t)| \le 1$;

Розділ 5.4. Границя функції векторного аргументу

Короткі теоретичні відомості

Нагадаємо, що в просторі R^m усі норми еквівалентні, тому в більшості тверджень в якості норми простору R^m можна розглядати будь-яку з норм цього простору, наприклад,

$$\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m \ \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} x_i^2}.$$

Тут і надалі будь-яку норму простору R^m будемо позначати просто через $\|\cdot\|_m$.

Функцію $f: R^m \to R$ називається ***функцією векторного аргументу*** або ***функцією багатьох змінних*** (**ФБЗ**). Скінченний упорядкований набір $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ функцій векторного аргументу $f_k: R^m \to R,\ D_{f_k} = D,\ k = \overline{1,n}$ називають ***вектор ФБЗ*** або просто ***вектор-функцією***, тобто функцію $f = (f_1, f_2, \dots, f_n): R^m \to R^n,\ D_f = D^n$.

Нехай $f: R^m \to R^n$ вектор ФБЗ, x_0 – гранична точка D_f. Елемент $A \in R^n$ називається ***границею вектор ФБЗ*** f при $x \to x_0$ і позначається, як $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, якщо справджується одне з таких двох означень:

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0: \forall x \in D_f\{x_0\}\ \|x - x_0\|_m < \delta \ \Rightarrow\ \|f(x) - A\|_n < \varepsilon$ (означення Коші), або

$\forall (x_k) \subset D_f\{x_0\}: \lim\limits_{k \to \infty} \|x_k - x_0\|_m = 0 \ \Rightarrow\ \lim\limits_{k \to \infty} \|f(x_k) - A\|_n = 0$ (означення Гейне).

Використовуючи означення Гейне, можна аналогічно визначити поняття границі вектор ФБЗ для випадків $x_0 \in \overline{R^m}$ та $A \in \overline{R^n}$.

В якості іншої форми запису $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ при $x_0 = \left(x_1^{(0)}, \dots, x_m^{(0)}\right)$ будемо вживати таке позначення:

$$\lim_{\substack{x_1 \to x_1^{(0)} \\ \dots \\ x_m \to x_m^{(0)}}} f(x).$$

У випадку $m = 2$ та $m = 3$ границі

$$\lim_{\substack{x \to x_1^{(0)} \\ x_2 \to x_2^{(0)}}} f(x) \ \text{ та } \ \lim_{\substack{x_1 \to x_1^{(0)} \\ x_2 \to x_2^{(0)} \\ x_3 \to x_3^{(0)}}} f(x).$$

називаються відповідно ***подвійною*** та ***потрійною*** границями. Якщо це не викликатиме непорозумінь чи суперечності замість елемента (x_1, x_2) чи (x_1, x_2, x_3) будемо також вживати позначення (x, y) та (x, y, z) відповідно, і подвійну та потрійну границі позначатимемо як

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) \ \text{ та } \ \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0 \\ z \to z_0}} f(x, y, z).$$

Границі вигляду

$$\lim_{x_{i_1} \to x_{i_1}^{(0)}} \left(\lim_{x_{i_2} \to x_{i_2}^{(0)}} \left(\dots \left(\lim_{x_{i_m} \to x_{i_m}^{(0)}} f(x_1, x_2, \dots, x_m) \right) \right) \right),$$

$(i_1, i_2, \dots, i_m)$ – це перестановка чисел $(1, 2, \ \dots, m)$, називаються ***повторними***.

Вектор-функція $f: R^m \to R^n$ називається ***неперервною в точці*** $x_0 \in D_f$, що будемо позначати, як $f \in C(x_0)$, якщо справджується одне з таких двох означень:

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0: \forall x \in D_f\{x_0\}\ \|x - x_0\|_m < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\|_n < \varepsilon$ (означення Коші), або
$\forall (x_k) \subset D_f\{x_0\}: \lim\limits_{k\to\infty} \|x_k - x_0\|_m = 0 \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} \|f(x_k) - f(x_0)\|_n = 0$ (означення Гейне).

Якщо x_0 – ізольована точка D_f, то вектор-функція f неперервна в цій точці. В усіх інших точках, тобто граничних точках D_f, вектор-функція f неперервна в точці x_0 тоді і тільки тоді, коли $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Якщо вектор-функція f неперервна в кожній точці множини $M \subset D_f$, то вона називається ***неперервною на множині*** M і позначатимемо це як $f \in C(M)$.

Множина $K \subset R^m$ називається ***компактною в собі*** або ***компактом***, якщо з будь-якої послідовності точок $(x_n) \subset K$ можна виділити підпослідовність (x_{n_k}), яка збігається до деякого значення $x_0 \in K$.

Теорема 8. (*Критерій компакту*).
Множина $K \subset R^m$ є компактом тоді і тільки тоді, коли множина K є замкненою та обмеженою.

Теорема 9. *(Веєрштрасса)*
Якщо функція $f: R^m \to R^n$ неперервна на компакті $K \subset D_f$, то вона обмежена на цій множині і досягає свого найбільшого та найменшого значень.

Вектор-функція $f: R^m \to R^n$ називається ***рівномірно неперервною на множині*** $M \subset D_f$, якщо справджується одне з таких двох означень:
$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0: \forall x, y \in M\ \|x - y\|_m < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\|_n < \varepsilon$ (означення Коші), або
$\forall (x_k), (y_k) \subset M: \lim\limits_{k\to\infty} \|x_k - y_k\|_m = 0 \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} \|f(x_k) - f(y_k)\|_n = 0$ (означення Гейне).

Теорема 10. *(Кантора)*
Неперервна на компакті $K \subset R^m$ вектор функція f є рівномірно неперервною на K.

Задачі

37. Доведіть твердження:

1) нехай для функції $f: R^m \to R$ справджуються такі умови:

- $\exists \delta > 0$, для якого $S(x_0, \delta) \subset D_f$, $x_0 = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_m^{(0)}\right)$;
- для довільного $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ та довільних $x_i \in \left(x_i^{(0)} - \delta, x_i^{(0)} + \delta\right)$, $i \in \{1, \dots, k-1, k+1, \dots, n\}$ функції $g_k(t) = (x_1, \dots, x_{k-1}, t, x_{k+1}, \dots, x_m)$ є неперервними на проміжку $(x_k - \delta, x_k + \delta)$;

тоді $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$;

2) якщо для $f: R^m \to R$ існують принаймні дві різні повторні границі, тобто

$$A = \lim_{x_{i_1}\to x_{i_1}^{(0)}} \left(\lim_{x_{i_2}\to x_{i_2}^{(0)}} \left(\dots \left(\lim_{x_{i_m}\to x_{i_m}^{(0)}} f(x_1, x_2, \dots, x_m) \right) \right) \right) \neq$$

$$\neq B = \lim_{x_{j_1}\to x_{j_1}^{(0)}} \left(\lim_{x_{j_2}\to x_{j_2}^{(0)}} \left(\dots \left(\lim_{x_{j_m}\to x_{j_m}^{(0)}} f(x_1, x_2, \dots, x_m) \right) \right) \right),$$

де $(i_1, i_2, \dots, i_m) \neq (j_1, j_2, \dots, j_m)$, то не існує $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$;

3) нехай для функції $f: R^2 \to R$ справджуються такі умови:

- $\exists \delta > 0$, для якого $S\big((x_0, y_0), \delta\big) \subset D_f$, за виключенням, можливо, точок вигляду (x_0, y) та (x, y_0);
- $\exists \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0 \\ x \neq x_0, y \neq y_0}} f(x, y) = A \in \overline{R}$;
- $\forall y \in (y_0 - \delta, y_0 + \delta) \backslash \{y_0\}\ \exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x, y) = g(y)$;

тоді $\exists \lim\limits_{y \to y_0} \lim\limits_{x \to x_0} f(x, y) = A$;

38. Для функції $f: R^2 \to R$ знайдіть, якщо вони існують, відповідно повторні границі та подвійну границю:

$$A_{xy} = B = \lim_{x \to a} \left(\lim_{y \to b} f(x, y) \right), A_{yx} = \lim_{y \to b} \left(\lim_{x \to a} f(x, y) \right) \text{ та } B = \lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x, y),$$

якщо:

1) $f(x, y) = \dfrac{x - y}{x + y}$ та:

а) $a = 1, b = 0$; ***б)*** $a = b = 0$;
в) $a = b = +\infty$; ***г)*** $a = +\infty, b = -\infty$;
д) $a = 0, b = +\infty$; ***е)*** $a = -1 + 0, b = 1 + 0$;
є) $a = -1 - 0, b = 1 + 0$;

2) $f(x, y) = (x + y) \cdot \sin\dfrac{1}{x} \cdot \sin\dfrac{1}{y}$ та:

а) $a = b = 0$; ***б)*** $a = \frac{1}{\pi}, b = 0$;
в) $a = b = \frac{1}{\pi}$; ***г)*** $a = +\infty, b = 0$;
д) $a = b = +\infty$;

3) $f(x, y) = \dfrac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2}$ та:

а) $a = b = +\infty$; ***б)*** $a = b = 0$;
в) $a = 0, b = +\infty$; ***г)*** $a = +\infty, b = -\infty$;

4) $f(x, y) = x + y \sin\dfrac{1}{x}$ та:

а) $a = b = 0$; ***б)*** $a = b = +\infty$;
в) $a = 0, b = +\infty$; ***г)*** $a = +\infty, b = 0$;
д) $a = b = \frac{1}{\pi}$; ***е)*** $a = \frac{1}{\pi}, b = +\infty$;

5) $f(x, y) = \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}$ та:

а) $a = b = 0$; ***б)*** $a = b = +\infty$;
в) $a = 0, b = +\infty$; ***г)*** $a = +\infty, b = 1$;

6) $f(x, y) = \dfrac{x^2}{\mathrm{e}^{(x^2 - y)^2}}$ та:

а) $a = b = 0$; ***б)*** $a = b = +\infty$;

в) $a = 0, b = +\infty$; ***г)*** $a = +\infty, b = -\infty$;

7) $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^4}$ та:

а) $a = b = +\infty$; ***б)*** $a = b = 0$;

в) $a = 0, b = +\infty$; ***г)*** $a = +\infty, b = 0$;

8) $f(x,y) = \dfrac{x^y}{1+x^y}$ та:

а) $a = 1, b = 0$; ***б)*** $a = b = +\infty$;

в) $a = +\infty, b = -1$; ***г)*** $a = +\infty, b = 0$;

д) $a = +\infty, b = -0$; ***е)*** $a = +\infty, b = -0$;

є) $a = +0, b = -0$; ***ж)*** $a = +0, b = +0$;

з) $a = 1, b = -\infty$; ***и)*** $a = 1, b = +\infty$;

9) $f(x,y) = \dfrac{\sin y}{x+3y}$ та:

а) $a = b = +\infty$; ***б)*** $a = b = 0$;

в) $a = 0, b = +\infty$; ***г)*** $a = +\infty, b = 0$;

10) $f(x,y) = \dfrac{\sin \pi x}{2x+y}$ та:

а) $a = b = +\infty$; ***б)*** $a = b = 0$;

в) $a = 0, b = +\infty$; ***г)*** $a = +\infty, b = 0$;

11) $f(x,y) = \log_x(x+y)$ та:

а) $a = b = +\infty$; ***б)*** $a = b = +0$;

в) $a = 0, b = +\infty$; ***г)*** $a = +\infty, b = 0$;

д) $a = 1+0, b = -0$; ***е)*** $a = +0, b = 1$;

12) $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}$ та:

а) $a = b = +\infty$; ***б)*** $a = b = 0$;

в) $a = 0, b = +\infty$; ***г)*** $a = +\infty, b = -\infty$;

13) $f(x,y) = \dfrac{\sin xy}{x}$ та:

а) $a = b = +\infty$; ***б)*** $a = b = 0$;

в) $a = 0, b = +\infty$; ***г)*** $a = +\infty, b = 0$;

14) $f(x,y) = \left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$ та:

а) $a = b = +0$; ***б)*** $a = b = +\infty$;

в) $a = +0, b = +\infty$; ***г)*** $a = +\infty, b = +0$;

15) $f(x,y) = (x^2+y^2)e^{-x-y}$ та:

а) $a = b = +0$; ***б)*** $a = b = +\infty$;

в) $a = -\infty, b = +\infty$; ***г)*** $a = b = -\infty$;

16) $f(x,y) = (x^2+y^2)^{x^2y^2}$ та:

а) $a = b = 0$; ***б)*** $a = 0, b = +\infty$;

17) $f(x,y)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$ та:

а) $a=+0, b=0$; ***б)*** $a=+\infty, b=1$;

в) $a=+0, b=+\infty$; ***г)*** $a=+\infty, b=-\infty$;

18) $f(x,y)=\frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ та:

а) $a=b=0$; ***б)*** $a=b=+\infty$;

в) $a=b=+0$; ***г)*** $a=1, b=-\infty$;

д) $a=0, b=-\infty$;

19) $f(x,y)=\frac{x^4y^4}{(x^2+y^4)^3}$ та:

а) $a=b=+\infty$; ***б)*** $a=b=0$;

в) $a=0, b=+\infty$; ***г)*** $a=+\infty, b=0$;

20) $f(x,y)=\frac{x^5y^5}{(x^2+y^4)^3}$ та:

а) $a=b=+\infty$; ***б)*** $a=b=0$;

в) $a=0, b=+\infty$; ***г)*** $a=+\infty, b=0$;

21) $f(x,y)=\frac{x^5y^4}{(x^2+y^4)^3}$ та:

а) $a=b=+\infty$; ***б)*** $a=b=0$;

в) $a=0, b=+\infty$; ***г)*** $a=+\infty, b=0$;

22) $f(x,y)=\frac{x^2}{x^2+y^2-x}$ та:

а) $a=b=0$; ***б)*** $a=b=-0$;

в) $a=0, b=+\infty$; ***г)*** $a=-\infty, b=+\infty$;

д) $a=b=+\infty$; ***е)*** $a=+\infty, b=0$;

39. Для функції $f: R^3 \to R$ знайдіть, якщо вони існують, відповідно усі 6 повторних границь та потрійну границю:

$$A_{xyz}=\lim_{x\to a}\left(\lim_{y\to b}\left(\lim_{z\to c} f(x,y,z)\right)\right), A_{xzy}=\lim_{x\to a}\left(\lim_{z\to c}\left(\lim_{y\to b} f(x,y,z)\right)\right),$$
$$A_{yxz}=\lim_{y\to b}\left(\lim_{x\to a}\left(\lim_{z\to c} f(x,y,z)\right)\right), A_{yzx}=\lim_{y\to b}\left(\lim_{z\to c}\left(\lim_{x\to a} f(x,y,z)\right)\right),$$
$$A_{zxy}=\lim_{z\to c}\left(\lim_{x\to a}\left(\lim_{y\to b} f(x,y,z)\right)\right), A_{zyx}=\lim_{z\to c}\left(\lim_{y\to b}\left(\lim_{x\to a} f(x,y,z)\right)\right),$$
$$\text{та } \lim_{\substack{x\to a\\ y\to b\\ z\to c}} f(x,y,z),$$

якщо:

1) $f(x,y,z)=\frac{x^2+y^2+z^2}{x+y+z+x^4+y^4+z^4}$ та:

а) $a=b=c=0$; ***б)*** $a=b=c=+\infty$;

в) $a = b = 0, c = +\infty$; ***г)*** $a = 0, b = +\infty, c = -\infty$;
д) $a = b = c = -1$; ***е)*** $a = 0, b = c = -1$;

2) $f(x,y,z) = \dfrac{xyz}{(\mathrm{e}^x - 1)(\mathrm{e}^y - 1)(\mathrm{e}^z - 1)}$ та:

а) $a = b = c = 0$; ***б)*** $a = b = c = +\infty$;
в) $a = b = c = -\infty$; ***г)*** $a = 0, b = +\infty, c = -\infty$;

3) $f(x,y,z) = \dfrac{x^2 + y^3 + z}{x + y - z}$ та:

а) $a = b = c = 0$; ***б)*** $a = b = c = +\infty$;
в) $a = b = c = -\infty$; ***г)*** $a = 0, b = +\infty, c = 0$;

4) $f(x,y,z) = \dfrac{e^{xy^2z^3} - 1}{e^{x^3y^2z} - 1}$ та:

а) $a = b = c = 0$; ***б)*** $a = b = c = +\infty$;
в) $a = b = +\infty, c = -\infty$; ***г)*** $a = b = -\infty, c = +\infty$;
д) $a = 0, b = +\infty, c = -\infty$; ***е)*** $a = b = 0, c = -\infty$;

5) $f(x,y,z) = \dfrac{\sin(xy) \cdot \mathrm{sh}\,(xz)}{(e^x - 1)\ln(1 + yz)}$ та:

а) $a = b = c = 0$; ***б)*** $a = b = c = +\infty$;
в) $a = b = 0, c = +\infty$; ***г)*** $a = +\infty, b = c = 0$;
д) $a = -\infty, b = +\infty, c = +0$; ***е)*** $a = -\infty, b = +0, c = +\infty$;

6) $f(x,y,z) = \dfrac{(x + y + z)^2}{x^2 + y^2 + z^2}$ та:

а) $a = b = c = 0$; ***б)*** $a = b = c = +\infty$;
в) $a = -\infty, b = 0, c = +\infty$;

7) $f(x,y,z) = \dfrac{(xyz)^3}{(x^2 + y^4 + z^6)^2}$ та:

а) $a = b = c = 0$; ***б)*** $a = b = c = +\infty$;
в) $a = b = 0, c = +\infty$;

8) $f(x,y,z) = \dfrac{(xyz)^2}{(x^2 + y^4 + z^6)^2}$ та:

а) $a = b = c = 0$; ***б)*** $a = b = c = +\infty$;
в) $a = b = 0, c = +\infty$;

9) $f(x,y,z) = \dfrac{x + y - z}{x - y + z}$ та:

а) $a = b = c = 0$; ***б)*** $a = b = c = +\infty$;
в) $a = b = +\infty, c = -\infty$; ***г)*** $a = +\infty, b = -\infty, c = +\infty$;

40) Для функції $f: R^2 \to R$ знайдіть $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x,y)$, якщо вона існує, де:

1) $f(x,y) = \dfrac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$; 2) $f(x,y) = \dfrac{x^4 + y^2}{\sqrt{x^4 + y^2 + 1} - 1}$;

3) $f(x,y)=\dfrac{e^{-\frac{1}{x^4+y^4}}}{\sqrt{x^4+y^4}}$;

4) $f(x,y)=\dfrac{e^{x^2+y}}{\ln(x^2+1+y)}$;

5) $f(x,y)=\dfrac{1-\cos(x^4+y^4)}{x^6+y^6}$;

6) $f(x,y)=\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$;

7) $f(x,y)=\dfrac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}}{x^4+y^6}$;

8) $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{x^2y^2+1}-1}{\ln(x^2+1+y^2)}$;

9) $f(x,y)=\dfrac{\mathrm{sh}(x^4+y^5)}{x^2+|y|^3}$;

10) $f(x,y)=\dfrac{\mathrm{tg}\,(x^4+y^2)}{|x|^3+|y|}$;

11) $f(x,y)=\dfrac{1-\mathrm{ch}(|x|+|y|)}{x^4+y^6}$;

12) $f(x,y)=\dfrac{x^4+y^2}{x^2+y^{\,2}}$;

13) $f(x,y)=\dfrac{xy}{x+y}$;

14) $f(x,y)=(1+x^2y^2)^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$;

15) $f(x,y)=\dfrac{\sqrt[3]{xy}}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

16) $f(x,y)=\dfrac{2x+y}{\sqrt{x^2+4y^{\,2}}}$;

17) $f(x,y)=\dfrac{\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}\right)^3}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

18) $f(x,y)=\dfrac{\sqrt[3]{x^3+y^3}}{\sqrt[4]{x^4+y^4}}$;

19) $f(x,y)=\dfrac{x+y^3}{\sin(x^2+y^2)}$;

20) $f(x,y)=\left(x^3+\sqrt{y}\right)\sin\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}+y^2}$;

21) $f(x,y)=\dfrac{x^2\sin\dfrac{1}{x}+y^2}{\mathrm{sh}(x^2+y^2)}$;

22) $f(x,y)=\dfrac{x^3\sin\dfrac{1}{x}+y^3\cos\dfrac{1}{y}}{x^2+y^2}$;

23) $f(x,y)=\sin(x+y)\ln(x^2+y^2)$;

24) $f(x,y)=\dfrac{\ln(|x|+|y|)}{y}$;

25) $f(x,y)=(x^2+y^2)^{|x|}$;

26) $f(x,y)=\dfrac{\cos x-\cos y}{x^2+y^2}$;

27) $f(x,y)=\dfrac{\cos(x+y)-\mathrm{ch}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$;

28) $f(x,y)=\dfrac{\sin x-\sin y}{\mathrm{sh}\,x-\mathrm{sh}\,y}$;

41) Для функції $f\colon R^m\to R$ знайдіть $\lim\limits_{x\to\theta} f(x)$, якщо вона існує, де:

1) $f(x)=\left(1+\sum\limits_{k=1}^{m}x_k^2\right)^{\frac{1}{\sum_{k=1}^m x_k^2}}$;

2) $f(x,y)=\dfrac{e^{-\frac{1}{\sum_{k=1}^m x_k^2}}}{\sum_{k=1}^m x_k^4}$;

3) $f(x)=\dfrac{\sum_{k=1}^m |x_k|}{\sum_{k=1}^m x_k^2}$;

4) $f(x,y)=\dfrac{\sum_{k=1}^m |x_k|}{\sqrt{\sum_{k=1}^m x_k^2}}$;

5) $f(x)=\dfrac{\sum_{k=1}^m |x_k|^k}{\sum_{k=1}^m |x_k|}$;

6) $f(x,y)=\dfrac{\sum_{k=1}^m |x_k|}{\sqrt{\sum_{k=1}^m x_k^2}}$;

7) $f(x) = \frac{\sum_{k=1}^{m} {x_k}^{2k}}{\sum_{k=1}^{m} {x_k}^{k}}$; 6) $f(x,y) = \frac{\sum_{k=1}^{m} {x_k}^{4k}}{\sum_{k=1}^{m} {x_k}^{2k}}$;

42. Перевірте, чи справджуються такі твердження:

1) якщо функція $f: R^m \to R$ рівномірно неперервна на множині $E \subset R^m$, то існує єдина функція $g \in C(\text{cl } E)$, для якої $g\Big|_E = f$. Якщо функція $f: R^m \to R$ рівномірно неперервна на множині $E \subset R^m$, то існує єдина функція $g \in C(\text{cl } E)$, для якої $g\Big|_E = f$.

2) якщо функція $f: R^2 \to R$

- неперервна на множині $E \subset D_f$ по змінній x, тобто $\forall (x_0, y_0) \in D_f$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$: $\forall (x, y_0) \in D_f$: $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x, y_0) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$;
- рівномірно неперервна на множині $E \subset D_f$ по змінній y, тобто $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$: $\forall (x, y) \in D_f$: $|y - y_0| < \delta \Rightarrow |f(x, y) - f(x, y_0)| < \varepsilon$

тоді $f \in C(E)$;

3) якщо функція $f: R^2 \to R$

- неперервна на множині $E \subset D_f$ по змінній x (дивись пункт ***2)***);
- задовольняє на множині $E \subset D_f$ по змінній y умову Ліпшиця, тобто $\exists C$: $\forall (x, y_1), (x, y_2) \in D_f \Rightarrow |f(x, y_1) - f(x, y_2)| < C|y_1 - y_2|$;

тоді $f \in C(E)$;

4) якщо функція $f: R^2 \to R$

- неперервна на множині $E \subset D_f$ по змінній x (дивись пункт ***2)***);
- задовольняє на множині $E \subset D_f$ по змінній y умову Ліпшиця (дивись пункт ***3)***);

тоді $\exists L$: $\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in D_f \Rightarrow |f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < L|y_1 - y_2|$;

5) якщо функція $f: R^2 \to R$

- неперервна на множині $E \subset D_f$ по обом змінним x та y (дивись пункт ***2)***);
- монотонно не спадає (не зростає) на множині $E \subset D_f$ по змінній y, тобто: $\forall (x, y_1), (x, y_2) \in D_f$: $y_1 < y_2 \Rightarrow f(x, y_1) \le f(x, y_2)$ $\big(f(x, y_1) \ge f(x, y_2)\big)$;

тоді $f \in C(E)$;

6) якщо функція $f \in C((a, A) \times (b, B))$, $\varphi \in C(a, A)$, $E_\varphi \subset (b, B)$, то функція $F(x) = f\big(x, \varphi(x)\big) \in C(a, A)$;

43. Для функції $f: R^2 \to R$ знайдіть множину D_f, а також усі граничні точки D_f, в яких вона не є неперервною, де:

1) $f(x) = \sqrt{x^2 + y^2}$; 2) $f(x, y) = \ln(x + y)$;

3) $f(x) = \arcsin\frac{x}{y}$;

4) $f(x,y) = \dfrac{\ln(1+x^2+y^2)}{x^2+y^2}$;

5) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}, (x,y) \neq (0,0), \\ 0, \quad (x,y) = (0,0); \end{cases}$

6) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}, (x,y) \neq (0,0), \\ 0, \quad (x,y) = (0,0); \end{cases}$

7) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4-y^4}{x^4+y^4}, (x,y) \neq (0,0), \\ 0, \quad (x,y) = (0,0); \end{cases}$

8) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4-y^4}{x^2+y^2}, (x,y) \neq (0,0), \\ 0, \quad (x,y) = (0,0); \end{cases}$

9) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+2x^2y+3xy^2+3y^3}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}, (x,y) \neq (0,0), \\ 0, \quad (x,y) = (0,0); \end{cases}$

10) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x+y)}{x+y}, (x,y) \neq (t,-t), \\ 1, \quad (x,y) = (t,-t), \end{cases} t \in R;$

11) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x+y)}{x}, (x,y) \neq (0,t), \\ 1, \quad (x,y) = (0,-t), \end{cases} t \in R;$

12) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2+2x}{y^2-2x}, (x,y) \neq (t^2,2t), \\ 0, \quad (x,y) \neq (t^2,2t), \end{cases} t \in R;$

13) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x-y}{x^3-y^3}, (x,y) \neq (t,t), \\ 1, \quad (x,y) = (t,t), \end{cases} t \in R;$

14) $f(x,y) = \begin{cases} x \cdot \sin\dfrac{1}{y}, (x,y) \neq (t,0), \\ 0, \quad (x,y) = (t,0), \end{cases} t \in R;$

15) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sin^2 \pi x + \sin^2 \pi y}, (x,y) \notin Z^2, \\ 1, \quad (x,y) \in Z^2; \end{cases}$

16) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{2xy}, (x,y) \neq (0,t) \vee (t,0), \\ 2, \quad (x,y) = (0,t) \vee (t,0), \end{cases} t \in Z;$

17) $f(x,y) = \begin{cases} 1, (x,y) \in Q^2, \\ 0, (x,y) \notin Q^2; \end{cases}$

$$18)\ f(x,y)=\begin{cases}0,(x,y)\in(R\backslash Q)^2\vee(x,y)\in Q^2\vee(x,y)=(0,0),\\ \dfrac{1}{n},(x,y)\in Q\times(R\backslash Q),x=\dfrac{m}{n},n\in N,m\in Z,\\ \dfrac{1}{q},(x,y)\in(R\backslash Q)\times Q,y=\dfrac{p}{q},q\in N,p\in Z;\end{cases}$$

44. Побудуємо відображення $f:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$, графік якої називається ***кривою Пеано***. Позначимо множини $I_1^{(0)}=[0,1]$ та $K_1^{(0)}=[0,1]\times[0,1]$. На першому кроці поділимо $I_1^{(0)}$ на 4 рівних відрізки першого рівня $I_i^{(1)}$, $i=\overline{1,4}$, а квадрат $K_1^{(0)}$ на 4 однакових квадрати першого рівня $K_i^{(1)}$, $i=\overline{1,4}$. На другому кроці поділимо кожний з відрізків першого рівня на 4 рівних відрізки другого рівня, так, що $I_1^{(0)}$ поділений на відрізки $I_j^{(2)}$, $j=\overline{1,4^2}$, а кожний з квадратів першого рівня на 4 рівних квадрати другого рівня, так, що $K_1^{(0)}$ поділений на відрізки $K_j^{(2)}$, $j=\overline{1,4^2}$, при цьому квадрат $K_j^{(2)}\subset K_i^{(1)}$ тоді і тільки тоді, коли $I_j^{(2)}\subset I_i^{(1)}$, $i=\overline{1,4}$, $j=\overline{1,4^2}$, при цьому кожні два квадрати $K_j^{(2)}$ та $K_{j+1}^{(2)}$, $j=\overline{1,4^2-1}$ мають суміжну сторону. Далі аналогічно на n-му кроці поділимо кожний з відрізків $(n-1)$-го рівня на 4 рівних відрізки n-го рівня, так, що $I_1^{(0)}$ поділений на відрізки $I_j^{(2)}$, $j=\overline{1,4^n}$, а кожний з квадратів $(n-1)$-го рівня на 4 рівних квадрати n-го рівня, так, що $K_1^{(0)}$ поділений на відрізки $K_j^{(n)}$, $j=\overline{1,4^n}$, при цьому квадрат $K_j^{(n)}\subset K_i^{(n-1)}$ тоді і тільки тоді, коли $I_j^{(n)}\subset I_i^{(n-1)}$, $i=\overline{1,4^{n-1}}$, $j=\overline{1,4^n}$, при цьому кожні два квадрати $K_j^{(n)}$ та $K_{j+1}^{(n+1)}$, $j=\overline{1,4^n-1}$ мають суміжну сторону (рис. 1). Кожний з відрізків $I_j^{(n)}$ та квадратів $K_j^{(n)}$ вважаємо замкненими множинами, тобто межові точки належать одночасно обом

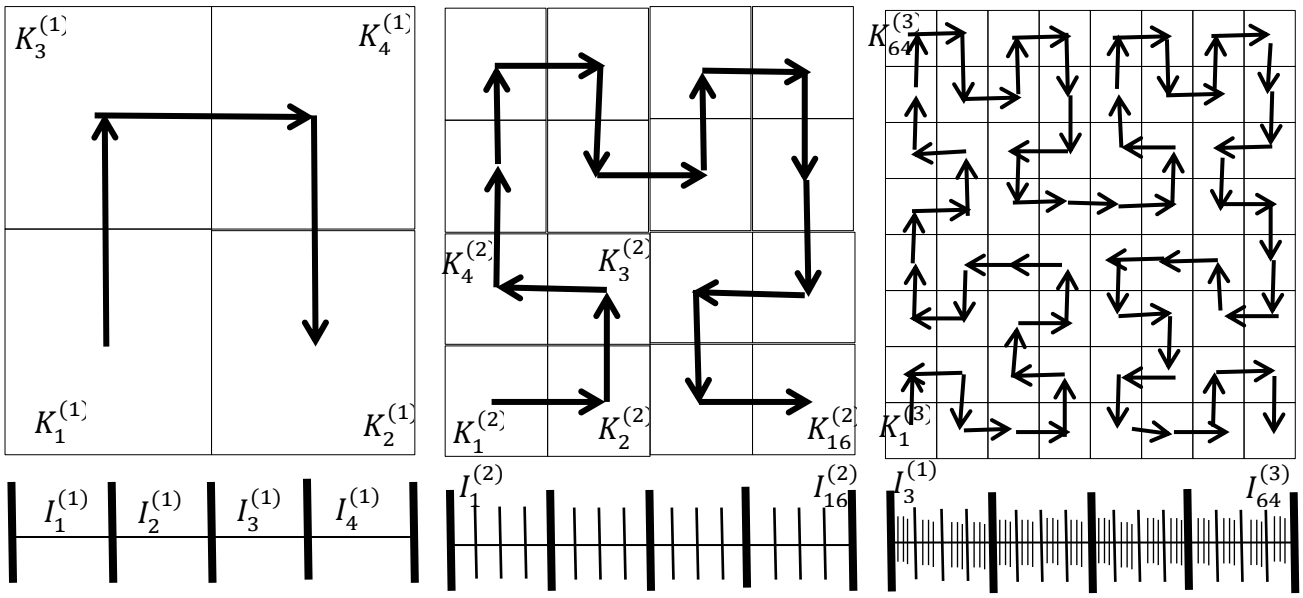

Рис. 1

суміжним множинам. Поставимо у відповідність один одному відрізок $I_j^{(n)}$ та квадрат $K_j^{(n)}$ $\forall j = \overline{1,4^n}$. Розглянемо довільну точку $t_0 \in I_1^{(0)}$ та послідовність вкладених відрізків $\left(I_{i_n}^{(n)}\right)$: $\forall n \in N$ $t_0 \in I_{i_n}^{(n)}$. Тоді послідовність вкладених квадратів $\left(K_{i_n}^{(n)}\right)$ має єдину спільну точку (x_0, y_0), яку ми позначимо через $f(t_0)$. Таким чином ми визначили зазначене на початку відображення $f: [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$. Доведіть такі властивості функції f:

1) $D_f = [0,1]$; ***2)*** $E_f = [0,1] \times [0,1]$;

3) $\forall t_0 \in [0,1]\ \exists!\ (x_0, y_0)$: $f(t_0) = (x_0, y_0) \in [0,1] \times [0,1]$;

4) $\exists (x_0, y_0) \in [0,1] \times [0,1]$: $\exists t_1, t_2 \in [0,1]$, $t_1 \neq t_2$: $f(t_1) = f(t_2) = (x_0, y_0)$;

5) $f \in C[0,1]$;

45. Чи є функція $f: X \to R$ рівномірно неперервною на множині $E \subset D_f$, де:

1) $X = E = R^2$;

а) $f(x,y) = 2x - 3y + 5$; ***б)*** $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$;

в) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, (x,y) \neq (0,0), \\ 0, \quad (x,y) = (0,0); \end{cases}$

г) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2}, (x,y) \neq (0,0), \\ 0, \quad (x,y) = (0,0); \end{cases}$

д) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, (x,y) \neq (0,0), \\ 0, \quad (x,y) = (0,0); \end{cases}$

2) $X = R^2$;

а) $f(x,y) = \sqrt{x^4+y^4}$, $E = \{(x,y) |\ x^2 + y^2 \leq 10\}$;

б) $f(x,y) = x^4 + y^4$, $E = \{(x,y) |\ x^2 + y^2 \leq 2x - 4y\}$;

в) $f(x,y) = x^3 + y^3$, $E = \{(x,y) |\ x^3 + y^3 \leq 1\}$;

г) $f(x,y) = \sin\frac{\pi}{4-x^2-y^2}$, $E = \{(x,y) |\ x^4 + y^4 \leq 1\}$;

д) $f(x,y) = \cos\frac{\pi}{1-x^2-y^2}$, $E = \{(x,y) |\ |x| + |y| \leq 1\}$;

е) $f(x,y) = \arcsin\frac{x}{y}$, $E = D_f$;

є) $f(x,y) = x\sin\frac{1}{y}$, $E = [0,1] \times [0,1]$;

ж) $f(x,y) = xy\sin\frac{1}{y}$, $E = [0,1] \times [0,1]$;

з) $f(x,y) = \frac{x^5-y^5}{x^2+y^2}$, $E = \{(x,y) |\ 0 < x^2 + y^2 < 1\}$;

3) $X = E = R^3$;

а) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^4+y^4+z^4}{x^2+y^2+z^2+x^6+y^6+z^6}, (x,y,z)\neq(0,0,0),\\ 0, \qquad (x,y,z)=(0,0,0);\end{cases}$

б) $f(x,y,z)=\sin x+\sin y+\sin z$;

в) $f(x,y,z)=\cos xyz$; ***г)*** $f(x,y,z)=\sqrt[5]{x^2y^2z^2}$;

д) $f(x,y,z)=xy+yz+zx$ ***е)*** $f(x,y,z)=\sqrt[7]{xyz}$;

є) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+y^2+z^3}{x^2+y^2+z^2}, (x,y,z)\neq(0,0,0),\\ 0, \qquad (x,y,z)=(0,0,0);\end{cases}$

4) $X=R^3$;

а) $f(x)=\dfrac{x-y+z}{x+y-z}, E=\{(x,y,z)|\ x>0, y>0, z<0\}$;

б) $f(x,y,z)=\sqrt[3]{xyz}$, $E=\{(x,y,z)|\ (x-y)^2+(y-z)^2\leq 1\}$;

в) $f(x,y,z)=xy+yz+zx$, $E=\{(x,y,z)|\ x^2+y^4+z^6<1\}$;

46. З'ясуйте, чи буде для функції $f: R^2\to R$ обмеженою множина E_f, якщо:

1) $f(x,y)=x^2-y^2$ та:

а) $D_f=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leq 25\}$;

б) $D_f=\{(x,y)\mid -1<x+y<1\}$;

2) $f(x,y)=\dfrac{2x^2-3y^2}{x^2+y^2}$ та $D_f=\{(x,y)\mid x^2+y^2\neq 0\}$;

3) $f(x,y)=\dfrac{\ln x-\ln y}{x-y}$ та:

а) $D_f=\{(x,y)\mid x>y>0\}$;

б) $D_f=\{(x,y)\mid 1<x<2, 2<y<3\}$;

4) $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^4+y^4}$ та $D_f=\{(x,y)\mid x^2+y^2\neq 0\}$;

5) $f(x,y)=\dfrac{x^5+y^5}{x^2+y^2}$ та:

а) $D_f=\{(x,y)\mid x^2+y^2\neq 0\}$;

б) $D_f=\{(x,y)\mid 1<x+y<2\}$;

6) $f(x,y)=xye^{-xy}$ та $D_f=R^2$;

7) $f(x,y)=\dfrac{\sin(x+y)-\sin(x-y)}{xy}$ та $D_f=(0,+\infty)^2$;

8) $f(x,y)=\dfrac{\sin(x+y)-\sin(x-y)}{y}$ та $D_f=R\times(0,+\infty)$;

Розділ 5.5. Похідні та диференціали функції векторного аргументу

Короткі теоретичні відомості

Нехай $E = R^m$ – ЛНП, відображення $E^n \xrightarrow{T} R$ називають ***n-лінійною формою***, якщо вона є лінійною по кожній змінній при фіксованих інших змінних, тобто

$$\forall x_1 = \left(x_1^{(1)}, \dots, x_m^{(1)}\right), \dots, x_n = \left(x_1^{(n)}, \dots, x_m^{(n)}\right), y = (y_1, \dots, y_m), z = (z_1, \dots, z_m),$$
$$\forall \alpha, \beta \in R, \forall i \in \{1, \dots, n\}$$
$$T(x_1, \dots, x_{i-1}, \alpha y + \beta z, x_{i+1} \dots, x_n) =$$
$$= \alpha T(x_1, \dots, x_{i-1}, y, x_{i+1} \dots, x_n) + \beta T(x_1, \dots, x_{i-1}, z, x_{i+1} \dots, x_n).$$

При цьому при $n = 1$ форму T називають ***лінійною***, а при $n = 2$ – ***білінійною***.

Нехай $R^m \xrightarrow{L} R$ – лінійна форма, $B = \{e_i \mid i = \overline{1,m}\}$ – базис ЛНП R^m, $x \in R^m$ – довільна точка, тоді $x = \sum_{i=1}^m x_i e_i$, де x_i, $i = \overline{1,m}$ – координати точки x в базисі B. Якщо $\alpha_i = Le_i$, $i = \overline{1,m}$, -- коефіцієнти лінійної форми L, то

$$Lx = L\left(\sum_{i=1}^m x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^m x_i L e_i = \sum_{i=1}^m \alpha_i e_i.$$

Аналогічно для білінійної форми $R^{2m} \xrightarrow{T} R$ маємо, що $\forall x \in R^m, y \in R^m$, де $x = \sum_{i=1}^m x_i e_i$, $y = \sum_{i=1}^m y_i e_i$

$$T(x,y) = \sum_{i,j=1}^m \alpha_{ij} x_i y_j = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \alpha_{ij} x_i y_j,$$

де $\alpha_{ij} = T(e_i, e_j)$, $i,j = \overline{1,m}$, T. Матрицю $A = (\alpha_{ij})_{i,j=\overline{1,m}}$ називають ***матрицею білінійної форми*** T. Таку білінійну форму називають ***симетричною***, якщо $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$, $i,j = \overline{1,m}$, тобто за таких умов $T(x,y) = T(y,x)$.

Функцію $R^m \xrightarrow{K} R$, де $K(x) = T(x,x)$, а T – симетрична білінійна форма, називають ***квадратичною формою***. Вона має вигляд

$$K(x) = T(x,x) = \sum_{i,j=1}^m \alpha_{ij} x_i x_j.$$

Нехай $G \subset R^m$ – відкрита множина. Вектор ФБЗ $G \xrightarrow{f} R^n$ називається ***диференційованою в точці*** $x_0 \in G$, якщо існує лінійне відображення $R^m \xrightarrow{L} R^n$, для якого справджується рівність:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\|f(x) - f(x_0) - L(x - x_0)\|_n}{\|x - x_0\|_m} = 0.$$

Останню рівність часто записують у вигляді

$$\|f(x) - f(x_0) - L(x - x_0)\|_n = o(\|x - x_0\|_m), x \to x_0.$$

Якщо функція $G \xrightarrow{f} R^n$, диференційована в точці $x_0 \in G$, де відкрита множина $G \subset R^m$, то лінійне відображення L називають диференціалом функції f в цій точці і позначають символом $df(x_0)$. Таким чином $\forall h \in R^m \; df(x_0)(h) = Lh$.

Функцію $f: R^m \to R^n$ називають ***диференційованою на множині*** $G \subset R^m$, якщо вона диференційована в кожній точці цієї множини.

Нехай функція $G \xrightarrow{f} R^n$, диференційована в точці $x_0 \in G$, де $G \subset R^m$ – відкрита множина, L – його диференціал в цій точці. Покладемо:

$$\alpha(x,x_0)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-f(x_0)-L(x-x_0)}{\|x-x_0\|_m}, x\neq x_0,\\ 0,\quad x=x_0.\end{cases}$$

Тоді приріст диференційованої в точці x_0 функції $G\xrightarrow{f}R^n$ набуває вигляду:

$$f(x)-f(x_0)=A(x-x_0)+\alpha(x,x_0)\cdot\|x-x_0\|_m,$$

де $\alpha(x,x_0)\to\theta$ при $x\to x_0$ та $\alpha(x_0,x_0)=\theta$. Тут $A\sim L$ – матриця оператора L. Матрицю $A=\left(\alpha_{ij}\right)_{i,j=\overline{1,m}}$ називають ***повною похідною функції*** f в точці x_0 і позначають $f'(x_0)$. Матрицю A також називають матрицею Якобі, а за умови $m=n$ її визначник називають ***якобіаном***.

При $m=n=1$ $A=f'(x_0)$ – число. При $m=1,n>1$ $f=\begin{pmatrix}f_1\\ \vdots\\ f_n\end{pmatrix}$ та $A=f'(x_0)=\begin{pmatrix}f_1'(x_0)\\ \vdots\\ f_n'(x_0)\end{pmatrix}$ – матриця-стовпчик. При $m>1,n=1$ та $A=f'(x_0)=(a_1,\dots,a_m)$ – матриця-рядок:

Нехай функція $f:R^m\to R$, диференційована в точці $x_0\in G\subset D_f$, де G – відкрита множина. Тоді $\forall h\in R^m$ при $h\to\theta$

$$f(x_0+h)-f(x_0)=f'(x_0)h+o(\|h\|_m)=\sum_{j=1}^{m}a_jh_j+o(\|h\|_m).$$

При $h=te_j$, де $t\in R$, $e_j=\left(\underbrace{0,\dots,0}_{j-1},1,\underbrace{0,\dots,0}_{n-j}\right)$ – вектор стандартного базиса ЛНП R^m, маємо, що

$$f(x_0+te_j)-f(x_0)=a_jt+o(t),t\to0\ \Rightarrow\ a_j=\lim_{t\to0}\frac{f(x_0+te_j)-f(x_0)}{t}.$$

Якщо існує границя $\lim\limits_{t\to0}\frac{f(x_0+te_j)-f(x_0)}{t}=a_j\in R$, то її називають ***<u>частинною похідною функції f в точці x_0 по змінній x_j</u>*** і позначають одним з можливих варіантів:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)\ \text{або}\ f'_{x_j}(x_0),\text{або}\ D_j^1(x_0).$$

Якщо існує $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)\ \forall j=\overline{1,m}$, то вектор з компонентами $\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0)\\ \vdots\\ \frac{\partial f}{\partial x_m}(x_0)\end{pmatrix}$ називається ***<u>градієнтом функції f в точці x_0</u>*** і позначається через $\operatorname{grad}f(x_0)$ або $\nabla f(x_0)$.

Розглянемо функцію $G\xrightarrow{f}R$, де G – відкрита множина, та деякий орт $e=(\cos\alpha_1,\dots,\cos\alpha_m)$. Якщо існує границя $\lim\limits_{t\to+0}\frac{f(x_0+te)-f(x_0)}{t}\in R$, то її називають ***<u>похідною функції f в точці x_0 в напрямі e</u>*** і позначають як $\frac{\partial f}{\partial e}(x_0)$.

Теорема 11. *(Зв'язок похідної в напрямі та градієнта)*

Якщо функція f диференційована в точці x_0, то вона диференційована в напрямі довільного орта e і справджується формула:

$$\frac{\partial f}{\partial e}(x_0)=\langle\nabla f(x_0),e\rangle.$$

Значення диференціала диференційованої в точці x_0 функції f на векторі $h\in R^m$ записують у вигляді $df(x_0)(h)=\langle\nabla f(x_0),h\rangle$.

Теорема 12. *(Похідна складної функції)*

Нехай $G \xrightarrow{f} R^n$, де $G \subset R^m$ – відкрита множина і кожна компонента функції $f = (f_1, \dots, f_n)$, тобто функції $y_k = f_k$, $k = \overline{1,n}$, диференційовані в точці $x_0 \in G$. Функція $g: R^n \to R$ має $D_g \supset f(G)$ та диференційована в точці $y_0 = f(x_0)$. Тоді композиція $F = g \circ f$, диференційована в точці x_0, а її частинні похідні обчислюються за формулами:

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(x_0) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g(y_0)}{\partial y_k} \cdot \frac{\partial f_k(x_0)}{\partial x_j}, j = \overline{1,m}.$$

Якщо $f_k = x_k: t \mapsto x_k(t)$, $t \in (a,b)$, то остання формула набуває такого вигляду:

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(t_0) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f(y_0)}{\partial x_k} \cdot \frac{dx_k(t_0)}{dt}.$$

Якщо ж $g: R^n \to R^p$, $p > 1$, то формулу диференціювання складної вектор ФБЗ записують у такому вигляді:

$$F'(x_0) = (g \circ f)'(x_0) = g'(y_0) f'(x_0),$$

де $g'(y_0)$ та $f'(x_0)$ – матриці Якобі функцій g та f в точках y_0 та x_0 відповідно.

Нехай $\varphi(x) = x_j$, $x \in R^m$, $1 \le j \le m$. Тоді

$$\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_k} = \begin{cases} 0, k \neq j, \\ 1, k = j. \end{cases}$$

Тоді $\varphi'(x_0) = \left(\underbrace{0, \dots, 0}_{j-1}, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{m-j} \right)$, $d\varphi(x_0)(h) = h_j$,

$$df(x_0)(h) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_j} dx_j(h),$$

тобто диференціал, як функцію, записують таким чином:

$$df(x_0) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_j} dx_j.$$

В умовах теореми 12 диференціал композиції функцій $F = g \circ f$ набуває вигляду:

$$dg(y_0) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g(y_0)}{\partial y_k} dy_k,$$

тобто форма першого диференціалу не змінюється, а лишається такою саме, як і у випадку незалежних змінних y_k.

Нехай функція $g = \frac{\partial f}{\partial x_j}: R^m \to R, j \in \{1, \dots, m\}$ визначена на деякій відкритій множині $G \subset R^m$. Якщо для деякого $k \in \{1, \dots, m\}$ існує границя $\lim\limits_{t \to 0} \frac{g(x_0 + te_k) - g(x_0)}{t} \in R$, то вона називається ***другою частинною похідною функції*** f ***в точці*** x_0 ***по змінній*** x_j ***та*** x_k і позначають одним з можливих варіантів:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(x_0) \text{ або } f''_{x_j x_k}(x_0), \text{або } D^2_{j,k}(x_0).$$

Якщо $k = j$, то відповідна друга похідна називається ***прямою***, в усіх інших випадках – ***мішаною***.

Далі застосовуємо принцип математичної індукції. Якщо для функції $g = \frac{\partial^p f}{\partial x_{j_p} \dots \partial x_{j_1}}: R^m \to R$, $j_1, \dots, j_p \in \{1, \dots, m\}$ існує границя $\lim\limits_{t \to 0} \frac{g(x_0 + te_k) - g(x_0)}{t} \in R$, то вона називається ***другою*** $(\boldsymbol{p+1})$***-ою частинною похідною функції*** f ***в точці*** x_0 ***по змінним*** x_{j_1}, …, x_{j_p} ***та*** x_k і позначають одним з можливих варіантів:

$$\frac{\partial^{p+1} f}{\partial x_k \partial x_{j_p} \dots \partial x_{j_1}}(x_0) \text{ або } f^{(p+1)}_{x_{j_1}\dots x_{j_p} x_k}(x_0), \text{або } D^{(p+1)}_{j_1,\dots,j_p,k}(x_0).$$

Якщо $k = j_1 = \dots = j_p$, то відповідна кратна похідна називається ***прямою***, в усіх інших випадках – ***мішаною***.

Теорема 13. *(Шварца)*

Якщо для функції $f: R^m \to R$ мішані похідні $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}$ та $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}$ існують в деякій відкритій множині G, де $x_0 \in G \subset D_f$, і неперервні в точці x_0, то $\frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_k \partial x_j} = \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_j \partial x_k}$, тобто значення другої мішаної похідної не залежить від порядку змінних, в якому проводиться диференціювання.

Якщо похідна $\frac{\partial^p f}{\partial x_{j_p} \dots \partial x_{j_1}}(x_0)$ не залежить від порядку, в якому проводиться диференціювання, то цю похідну записують у такому вигляді:

$$\frac{\partial^p f}{\partial x_{j_p} \dots \partial x_{j_1}}(x_0) = \frac{\partial^p f}{\partial x_m^{i_m} \dots \partial x_1^{i_1}}(x_0), 0 \le i_k \le p, k = \overline{1,m}: i_1 + \dots + i_m = p.$$

Якщо усі функції $\frac{\partial f}{\partial x_j}$, $j = \overline{1,m}$ визначені на деякій відкритій множині $G \subset R^m$ та диференційовані в точці $x_0 \in G$, то функція f називається ***<u>двічі диференційованою в точці</u>*** $\boldsymbol{x_0}$. Нехай функція f є p разів диференційованою в точці x_0, усі функції $\frac{\partial^p f}{\partial x_{j_p} \dots \partial x_{j_1}}$ для усіх наборів $j_1, \dots, j_p \in \{1, \dots, m\}$ визначені на деякій відкритій множині $G \subset R^m$ та диференційовані в точці $x_0 \in G$, то функція f називається $(\boldsymbol{p+1})$ ***<u>разів диференційованою в точці</u>*** $\boldsymbol{x_0}$.

Теорема 14. *(Про рівність мішаних похідних)*

Якщо для функція $f: R^m \to R$ двічі диференційована в точці x_0, то $\forall i, k \in \{1, \dots, m\}$ справджується рівність: $\frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_k \partial x_j} = \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_j \partial x_k}$.

Розглянемо деякій окіл $O(x_0) \subset R^m$ точки x_0 (або x_0 належить деякій відкритій множині $G \subset R^m$), та нехай функція $f: R^m \to R$ диференційована $\forall x \in O(x_0)$. Для кожного фіксованого $h \in R^m$ розглянемо функцію $d_h f: R^m \to R$ поклавши $\forall x \in O(x_0)$ $d_h f(x) = df(x)(h)$. Якщо функція $f: R^m \to R$ двічі диференційована $\forall x \in O(x_0)$, то її другим диференціалом у точці x_0 називають функцію $R^m \xrightarrow{d^2 f(x_0)} R$, де $d^2 f(x_0)(h) = d_h(d_h f)(x_0)$. Цю формулу треба розуміти таким чином: спочатку будується функція $d_h f: R^m \to R$, що визначена в деякому околі $O(x_0)$, її диференціал $d(d_h f)(x_0)$ є функцією $R^m \to R$, значення якої знаходять за цією формулою при $h \in R^m$. З цього визначення випливає, що $d^2 f(x_0)$ є симетричною квадратичною формою

$$h \mapsto d^2 f(x_0)(h) = \sum_{j,k=1}^{m} \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_k \partial x_j} h_k h_j.$$

Надалі замість $d^2 f(x_0)(h)$ писатимемо $d^2 f(x_0)$ і знову індукційно визначимо диференціал $(p+1)$-го порядку. Нехай функція $p+1$ раз диференційовна в точці x_0. Її $(\boldsymbol{p+1})$-***<u>м диференціалом у точці</u>*** $\boldsymbol{x_0}$ називають функцію $R^m \xrightarrow{d^p f(x_0)} R$, де $d^{p+1} f(x_0)(h) = d_h(d_h^p f)(x_0)$ $\forall h \in R^m$.

Функція $f: R^m \to R$ називається ***<u>p-неперервно диференційованою на відкритій множині</u>*** $G \subset R^m$, якщо усі її частинні похідні $\frac{\partial^k f}{\partial x_{j_k} \dots \partial x_{j_1}}$ порядку $k \le p$ неперервні $\forall x \in G$. У p-неперервно

диференційованої функції f усі відповідні частинні похідні не залежить від порядку, в якому проводиться диференціювання.

Теорема 15. *(запис диференціала p-го порядку)*

Якщо для функція $f: R^m \to R$, що p разів диференційована в точці x_0 справджується формула: $\frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_k \partial x_j} = \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_j \partial x_k}$.

$$d^p f = \sum_{\substack{i_1+\cdots+i_m=p \\ 0\le i_k\le p, k=\overline{1,m}}} \frac{p!}{i_1! \cdot \ldots \cdot i_m!} \cdot \frac{\partial^p f(x_0)}{\partial x_m^{i_m} \ldots \partial x_1^{i_1}} dx_m^{i_m} \ldots dx_1^{i_1},$$

Яку часто записують в такий символічній формі:

$$d^p f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_m} dx_m\right)^p f(x_0),$$

Задачі

В задачах в ЛНП R^2 та R^3 замість позначень змінних $x = (x_1, x_2)$ та $x = (x_1, x_2, x_3)$ будемо вживати більш звичні $P = (x, y)$ та $P = (x, y, z)$, якщо то не буде викликати непорозумінь.

47. Перевірте, чи справджуються такі твердження:

1) функція $f: R^m \to R$ диференційована в точці $x_0 \in D_f$ тоді і тільки тоді, коли:

а) функція $f \in C(x_0)$;

б) функція $f \in C(x_0)$ та $\forall j = \overline{1,m}\ \exists \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_j}$;

в) $\forall j = \overline{1,m}$ частинні похідні $\frac{\partial f(x_0)}{\partial x_j}$ існують в деякому околі точки x_0 та є неперервними в цій точці;

г) $\forall j = \overline{1,m}$ частинні похідні $\frac{\partial f(x_0)}{\partial x_j}$ існують та неперервні в деякому околі точки x_0;

2) якщо функція $f: R^2 \to R$ має обмежені частинні похідні $\frac{\partial f(P_0)}{\partial x}$ та $\frac{\partial f(P_0)}{\partial y}$ в деякій кулі $S(P_0, r)$, $P_0(x_0, y_0)$, то вона рівномірно неперервна в кулі $S(P_0, r)$;

3) якщо функція $f: R^2 \to R$

- неперервна на множині $E \subset D_f$ по змінній x, тобто $\forall (x_0, y_0) \in D_f$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$: $\forall (x, y_0) \in D_f$: $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x, y_0) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$;
- має обмежену похідну $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ на множині $E \subset D_f$;

тоді $f \in C(E)$;

4) функція $f: R^m \to R$ розривна в точці $x_0 \in D_f$, то:

а) $\forall j = \overline{1,m}$ не існує $\frac{\partial f(x_0)}{\partial x_j}$;

б) $\exists j = \overline{1,m}$, для якого не існує $\frac{\partial f(x_0)}{\partial x_j}$;

5) якщо функція $f: R^2 \to R$ неперервна в деякій кулі $S(P_0, r)$, $P_0(x_0, y_0)$, має в цій кулі неперервні похідні $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ та $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, то

а) існують обидві мішані похідні $\frac{\partial^2 f(P_0)}{\partial x \partial y}$ та $\frac{\partial^2 f(P_0)}{\partial y \partial x}$;

а) існують та рівні обидві мішані похідні $\frac{\partial^2 f(P_0)}{\partial x \partial y}$ та $\frac{\partial^2 f(P_0)}{\partial y \partial x}$;

6) якщо точка $x \in S(x_0, r) \subset D_f$, то значення функції $f: R^m \to R$ в точці x можна наближено знайти за формулою

$$f(x) \approx f(x_0) + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_j} \cdot \left(x_j - x_j^{(0)}\right),$$

де точність наближення має порядок $O(r)$;

48. Знайдіть повну похідну функції $f: R^m \to R^n$ на D_f, якщо

1) $m = n = 1$ та

а) $f: x \mapsto x^x$; ***б)*** $f: x \mapsto x(\ln x - 1)$;

2) $m = 1, n = 2$ та

а) $f: x \mapsto (\sin\cos x\,, \cos\sin x)$; ***б)*** $f: x \mapsto (\operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x)$;

3) $m = 1, n = 3$ та

а) $f: x \mapsto (x|x|, x^2|x|, x^3|x|)$; ***б)*** $f: x \mapsto (x^2, x^3, x^4)$;

4) $m = 1, n \in N$ та

а) $f: x \mapsto (x, x^2, \dots, x^n)$;

б) $f: x \mapsto \left(1 + x, 1 + x + \frac{1}{2!}x^2, \dots, 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \dots + \frac{1}{n!}x^n\right)$;

5) $m = 2, n = 1$ та

а) $f: (x, y) \mapsto x^y + y^x$; ***б)*** $f: (x, y) \mapsto (x - y)|x - y|$;

6) $m = 2, n = 2$ та

а) $f: (x, y) \mapsto (x\cos y\,, x\sin y)$; ***б)*** $f: (x, y) \mapsto (x + y, x - y)$;

7) $m = 2, n = 3$ та

а) $f: (x, y) \mapsto (x, x + y, x - y)$; ***б)*** $f: (x, y) \mapsto (\sin xy\,, xy, \mathrm{e}^{x-y})$;

8) $m = 2, n \in N$ та

а) $f: (x, y) \mapsto (x^{n-1}, x^{n-2}y, x^{n-3}y^2 \dots, xy^{n-1}, y^n)$;

б) $f: x(x, y) \mapsto (x + y, (x + y)^2, \dots, (x + y)^n)$;

9) $m = 3, n = 1$ та

а) $f: (x, y, z) \mapsto x^y + y^z + z^x$; ***б)*** $f: (x, y, z) \mapsto (x + xy + xyz)^3$;

10) $m = 3, n = 2$ та

а) $f: (x, y, z) \mapsto (x + yz, x^2y + z^3)$;

б) $f: (x, y, z) \mapsto (xyz, x + y + z)$;

11) $m = 3, n = 3$ та

а) $f: (x, y, z) \mapsto (x\cos y\,, x\sin y\,, z)$;

б) $f: (x, y, z) \mapsto (x\sin z\cos y\,, x\sin z\sin y\,, x\cos z)$;

12) $m = 3, n \in N$ та

а) $f:(x,y,z)\mapsto(x,x^2y,x^3y^2z,\dots,x^ny^{n-1}z^{n-2})$;

б) $f:(x,y,z)\mapsto((x+y+z)^n,(x+y+z)^{n-1},\dots,x+y+z)$;

13) $m\in N, n=1$ та $f:(x_1,x_2,\dots,x_m)\mapsto(x_1+x_2+\dots+x_{m-1})^{x_m}$;

14) $m\in N, n=2$ та $f:(x_1,x_2,\dots,x_m)\mapsto(x_1+x_2+\dots+x_m, x_1x_2\dots x_m)$;

15) $m\in N, n=3$ та $f:(x_1,x_2,\dots,x_m)\mapsto(x_1,x_m,x_1+x_2+\dots+x_m)$;

16) $m=n\in N$ та $f:(x_1,x_2,\dots,x_m)\mapsto(x_m\sin x_1\dots\sin x_{m-1},$
$x_m\cos x_1\sin x_2\dots\sin x_{m-1}, x_m\cos x_2\sin x_3\dots\sin x_{m-1},$
$x_m\cos x_3\sin x_4\dots\sin x_{m-1},\dots,x_m\cos x_{m-2}\sin x_{m-1}, x_m\cos x_{m-1})$;

49. Доведіть твердження:

1) для функцій $f,g:R^m\to R$, що диференційовані в точці $x_0\in D_f\cap D_g$, $\forall c\in R^m$, $\forall\lambda\in R$ справджуються рівності:

а) $\operatorname{grad}(f\pm g)(x_0)=\operatorname{grad}f(x_0)\pm\operatorname{grad}g(x_0)$;

б) $\operatorname{grad}(c+f)(x_0)=\operatorname{grad}f(x_0)$;

в) $\operatorname{grad}(\lambda f)(x_0)=\lambda\cdot\operatorname{grad}f(x_0)$;

г) $\operatorname{grad}(fg)(x_0)=g(x_0)\cdot\operatorname{grad}f(x_0)+f(x_0)\cdot\operatorname{grad}g(x_0)$;

д) $\operatorname{grad}(f^n)(x_0)=nf^{n-1}(x_0)\cdot\operatorname{grad}f(x_0)$;

е) $\operatorname{grad}\left(\frac{f}{g}\right)(x_0)=\frac{g(x_0)\cdot\operatorname{grad}f(x_0)+f(x_0)\cdot\operatorname{grad}g(x_0)}{g^2(x_0)}$,
$g(x_0)\neq 0$;

2) для функції $g=(g_1,\dots,g_m):R\to R^m$, що диференційована в точці $t_0\in D_g$ та функції $f:R^m\to R$, що диференційована в точці $M_0\big(g_1(t_0),\dots,g_m(t_0)\big)\in D_f$ справджується рівність:

$$\frac{d}{dt}f\big(g(t_0)\big)=\frac{df}{dt}\big(g_1(t_0),\dots,g_m(t_0)\big)=\left\langle\operatorname{grad}f\big(g(t_0)\big),\frac{dg(t_0)}{dt}\right\rangle;$$

3) похідна функцій $f:R^m\to R$, що диференційована в точці x_0, в напрямі $\operatorname{grad}f(x_0)$ дорівнює $\|\operatorname{grad}f(x_0)\|_2$;

50. Знайдіть градієнт функції $f:R^m\to R$ на D_f, а також у точці M, якщо :

1) $m=2, f(x,y)=\arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, та

а) $M(-1,1)$; ***б)*** $M(2,1)$; ***в)*** $M(1,0)$;

2) $m=2, f(x,y)=\begin{cases}x^2y^2\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0);\end{cases}$ та

а) $M(0,0)$; ***б)*** $M(1,1)$; ***в)*** $M(1,0)$;

3) $m=2, f(x,y)=\sin x-\cos y$, та

а) $M(0,0)$; ***б)*** $M\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$; ***в)*** $M\left(\frac{\pi}{2},0\right)$;

4) $m=3, f(x,y,z)=x+xy+xyz$, та

а) $M(-1,1,0)$; ***б)*** $M(2,1,0)$; ***в)*** $M(0,0,0)$;

5) $m=3, f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2+z^2}$, та

а) $M(1,1,1)$; ***б)*** $M(1,1,0)$; ***в)*** $M(0,0,0)$;

6) $m=3, f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2+z^2}, (x,y,z)\neq(0,0,0),\\ 0, \quad (x,y,z)=(0,0,0);\end{cases}$ та

а) $M(0,0,0)$; ***б)*** $M(1,1,1)$; ***в)*** $M(0,1,2)$;

7) $m\in N, f(x_1,x_2,\dots,x_m)=\sum_{i=1}^{m-1}x_ix_{i+1}+x_mx_1$ та

а) $M(0,0,\dots,0)$; ***б)*** $M(1,1,\dots,1)$;

8) $m\in N, f(x_1,x_2,\dots,x_m)=\sum_{i=1}^{m}x_ix_{m-i+1}$ та

а) $M(0,0,\dots,0)$; ***б)*** $M(1,1,\dots,1)$;

51. Знайдіть кут між градієнтами функції $f_1: R^m\to R$ у точці M_1 та функції $f_2: R^m\to R$ у точці M_2, якщо:

1) $m=2, f_1(x,y)=x+y, f_2(x,y)=xy$ та

а) $M_1(-1,1), M_2(0,0)$; ***б)*** $M_1(2,1), M_2(1,2)$;

2) $m=2, f_1(x,y)=\sqrt{x^2-y^2}, f_2(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ та

а) $M_1(-1,1), M_2(0,0)$; ***б)*** $M_1(1,1), M_2(1,1)$;

3) $m=3, f_1(x,y,z)=\sin(x+y+z), f_2(x,y)=\sin(x+y)$ та

а) $M_1\left(0,0,\frac{\pi}{2}\right), M_2\left(\frac{\pi}{2},0,\frac{\pi}{2}\right)$; ***б)*** $M_1\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2},0\right), M_2\left(\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$;

4) $m=3, f_1(x,y,z)=xy+yz, f_2(x,y)=xz$ та

а) $M_1(0,0,1), M_2(1,0,1)$; ***б)*** $M_1(-1,1,1), M_2(0,0,0)$;

5) $m\in N, f_1(x_1,x_2,\dots,x_m)=\sum_{i=1}^{m}x_i\,, f_2(x_1,x_2,\dots,x_m)=\prod_{i=1}^{m}x_i$ та

$M_1(0,0,\dots,0,1), M_2(1,1,\dots,1,0)$;

52. Для функції $f: R^m\to R$ знайдіть точки $M\in D_f$ в яких справджується властивість (α), якщо:

1) $m=2, f(x,y)=\ln(x+y)$ та властивість (α) – це:

а) $\|\text{grad}\, f(M)\|_2=1$;

б) $\text{grad}\, f(M)$ паралельний осі абсцис;

в) $\text{grad}\, f(M)$ перпендикулярний прямій $y=x$;

2) $m=2, f(x,y)=(x+y)^2-x+y$ та властивість (α) – це:

а) $\|\text{grad}\, f(M)\|_2=2$;

б) $\text{grad}\, f(M)$ паралельний осі ординат;

в) $\text{grad}\, f(M)$перпендикулярний прямій $y=2x$;

3) $m=3, f(x,y,z)=xy+yz$ та властивість (α) – це:

а) $\|\text{grad}\, f(M)\|_2=1$;

б) $\text{grad}\, f(M)$ паралельний осі аплікат;

в) $\text{grad}\, f(M)$ перпендикулярний прямій $y=x=z$;

4) $m=3, f(x,y,z)=(x+y+z)^2-2x-y$ та властивість (α) – це:

а) $\|\text{grad}\, f(M)\|_2 = 1$;
б) $\text{grad}\, f(M)$ паралельний осі ординат;
в) $\text{grad}\, f(M)$ перпендикулярний прямій $y = 0, x = z$;

5) $m \in N$, $f(x_1, x_2, \dots, x_m) = (x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^2$ та властивість (α) – це:
а) $\|\text{grad}\, f(M)\|_2 = 1$;
б) $\text{grad}\, f(M)$ паралельний осі Ox_1;
в) $\text{grad}\, f(M)$ перпендикулярний прямій $x_1 = x_2 = \cdots = x_{m-1}, x_m = 0$;

6) $m \in N$, $f(x_1, x_2, \dots, x_m) = x_1^2 + 2x_2^2 + \cdots + mx_m^2$ та властивість (α) – це:
а) $\|\text{grad}\, f(M)\|_2 = 0$;
б) $\text{grad}\, f(M)$ паралельний осі Ox_1;
в) $\text{grad}\, f(M)$ перпендикулярний прямій $x_1 = x_2 = \cdots = x_m$;

53. Знайдіть похідну функції $f: R^m \to R$ на D_f, а також у точці M, в напрямі орта e, якщо :

1) $m = 2$, $f(x, y) = (x - y)^2 + 2x - 4y$, $M(-1, 1)$ та орт e утворює кут α з додатним напрямом осі абсцис, де
а) $\alpha = \frac{\pi}{3}$; ***б)*** $\alpha = \frac{\pi}{2}$; ***в)*** $\alpha = \frac{\pi}{4}$;

2) $m = 2$, $f(x, y) = \ln(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^y)$, $M(0, 0)$ та орт e утворює кут α з додатним напрямом осі абсцис, де
а) $\alpha = -\pi$; ***б)*** $\alpha = \frac{\pi}{3}$; ***в)*** $\alpha = \frac{\pi}{4}$;

3) $m = 2$, $f(x, y) = \text{arctg}\frac{x-y}{1+xy}$, $M(0, 1)$ та орт e утворює кут α з додатним напрямом осі абсцис, де
а) $\alpha = \frac{\pi}{6}$; ***б)*** $\alpha = \frac{\pi}{4}$; ***в)*** $\alpha = \frac{\pi}{3}$;

4) $m = 3$, $f(x, y, z) = xyz$, $M(1, 1, 1)$ та орт e – це:
а) $e = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$; ***б)*** $e = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$;

5) $m = 3$, $f(x, y, z) = xy + yz + zx$ та напрямок орта e співпадає з напрямом вектора $\overrightarrow{MA}$, де:
а) $M(0, 0, 0), A(1, 1, 1)$; ***б)*** $M(1, 0, 0), A(0, 0, 1)$;

6) $m = 3$, $f(x, y, z) = x\mathrm{e}^{y+z}$ та напрямок орта e співпадає з напрямом вектора $\overrightarrow{MA}$, де:
а) $M(0, 0, 0), A(1, -1, 1)$; ***б)*** $M(1, 1, 1), A(1, 2, 3)$;

7) $m \in N, f(x_1, x_2, \dots, x_m) = \sum_{i=1}^{m} x_i^i$ та напрямок орта e співпадає з напрямком вектора $\vec{a} = (1, 1, \dots, 1)$ та
а) $M(0, 0, \dots, 0)$; ***б)*** $M(1, 2, \dots, m)$;

8) $m \in N, f(x_1, x_2, \dots, x_m) = \sum_{i=1}^{m} x_i$ та напрямок орта e співпадає з напрямком вектора $\overrightarrow{MA}, M(0, 0, \dots, 0)$ та
а) $A(1, 0, \dots, 0)$; ***б)*** $M(1, 1, \dots, 1)$;

9) $m \in N, f(x_1, x_2, \dots, x_m) = \prod_{i=1}^{m} x_i$ та напрямок орта e співпадає з напрямком вектора $\overrightarrow{MA}, M(0, 0, \dots, 0)$ та

а) $A(1, 0, \dots, 0)$; ***б)*** $M(1, 1, \dots, 1)$;

54. Для функції $f: R^2 \to R$ знайдіть орти e, у напрямі яких у точці M існує похідна $\frac{\partial f}{\partial e}(M)$, якщо:

1) $f(x,y) = \begin{cases} 1, & (x,y): x+y \in Q, \\ 0, & (x,y): x+y \in R \backslash Q, \end{cases}$ та

а) $M(0,0)$; ***б)*** $M\left(0, \sqrt{2}\right)$; ***в)*** $M(1,0)$;

2) $f(x,y) = \begin{cases} 1, & (x,y): x \in Q, \\ 0, & (x,y): x \in R \backslash Q, \end{cases}$ та

а) $M(0,0)$; ***б)*** $M\left(0, \sqrt{2}\right)$; ***в)*** $M\left(\sqrt{2}, 0\right)$;

3) $f(x,y) = |x| + |y|$ та

а) $M(0,0)$; ***б)*** $M(0,1)$; ***в)*** $M(1,1)$;

4) $f(x,y) = \sqrt{(x-y)^2}$ та

а) $M(0,0)$; ***б)*** $M(0,1)$; ***в)*** $M(1,1)$;

55. Дослідить функцію $f: R^m \to R$ на диференційованість на множині D_f, якщо:

1) $m = 2$ та

а) $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$; ***б)*** $f(x,y) = \sqrt[3]{x^2 y}$;

в) $f(x,y) = \sqrt[3]{x^4 y}$; ***г)*** $f(x,y) = \sqrt[3]{xy}$;

д) $f(x,y) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}, (x,y) \neq (0,0), \\ 0, \quad (x,y) = (0,0); \end{cases}$

е) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, (x,y) \neq (0,0), \\ 0, \quad (x,y) = (0,0); \end{cases}$

є) $f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} \sin \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, (x,y) \neq (0,0), \\ 0, \quad (x,y) = (0,0); \end{cases}$

ж) $f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} \sin \dfrac{1}{x^2+y^2}, (x,y) \neq (0,0), \\ 0, \quad (x,y) = (0,0); \end{cases}$

з) $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2) \sin \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, (x,y) \neq (0,0), \\ 0, \quad (x,y) = (0,0); \end{cases}$

и) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, (x,y) \neq (0,0), \\ 0, \quad (x,y) = (0,0); \end{cases}$

і) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2}, (x,y)\neq(0,0),\\ 0, \quad (x,y)=(0,0);\end{cases}$

і) $f(x,y)=\begin{cases}1, (x,y)\neq(t,0)\vee(0,t),\\ 0, (x,y)=(t,0)\vee(0,t),\end{cases} t\in R;$

2) $m=3$ та

а) $f(x,y,z)=\sqrt[3]{x^5y^4z^2}$; ***б)*** $f(x,y,z)=\sqrt[3]{x^4y^3z^2}$;

в) $f(x,y,z)=\sqrt[3]{x^5y^2z}$; ***г)*** $f(x,y,z)=\sqrt[3]{x^2y^2z}$;

д) $f(x,y,z)=\sqrt[3]{x^3+y+z}$; ***е)*** $f(x,y,z)=\sqrt[3]{x+y+z}$;

є) $f(x,y,z)=\begin{cases}(x^2+y^2+z^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}, (x,y,z)\neq(0,0,0),\\ 0, \quad (x,y,z)=(0,0,0);\end{cases}$

3) $m\in N$ та

а) $f(x_1,x_2,\dots,x_m)=\sqrt[3]{\prod_{j=1}^{m}x_j}$; б) $f(x_1,x_2,\dots,x_m)=\sqrt[3]{\prod_{j=1}^{m}x_j^j}$;

в) $f(x_1,x_2,\dots,x_m)=\sqrt[m]{\prod_{j=1}^{m}|x_j|}$; г) $f(x_1,x_2,\dots,x_m)=\sqrt[m]{\prod_{j=1}^{m}|x_j|^j}$;

д) $f(x_1,x_2,\dots,x_m)=\begin{cases}\left(\sum_{j=1}^{m}x_j^2\right)\cdot\sin\dfrac{1}{\sum_{j=1}^{m}x_j^2}, (x_1,\dots,x_m)\neq(0,\dots,0),\\ 0, \quad (x_1,\dots,x_m)=(0,\dots,0);\end{cases}$;

е) $f(x_1,x_2,\dots,x_m)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{\sum_{j=1}^{m}x_j^2}}, (x_1,\dots,x_m)\neq(0,\dots,0),;\\ 0, \quad (x_1,\dots,x_m)=(0,\dots,0);\end{cases}$

56. Знайдіть наближене значення виразу:

1) $(16,02)^{\frac{1}{3,97}}$; 2) $(4,99)^{7,95}$;

3) $\log_{3,03}27,01$; 4) $\sin 29^\circ\cdot\operatorname{arctg}0,99$;

5) $\dfrac{\operatorname{tg}46^\circ\cdot\ln 1,05}{\sqrt[3]{7,96}}$; 6) $2^{3,99}\cdot\dfrac{\operatorname{arcctg}1,03}{\arcsin 0,97}$;

57. Знайдіть якобіан відображення $f:R^m\to R^m$ на D_f, вважаючи усі параметри $a, b, c, \dots, \alpha, \beta, \dots$ – додатними, якщо

1) $m=2$ та

а) $f:(x,y)\mapsto(x\cos y, x\sin y)$;

б) $f:(x,y)\mapsto(ax\cos^\alpha y, bx\sin^\alpha y)$;

в) $f:(x,y)\mapsto\left(ax\cos^\alpha y, bx\sin^\beta y\right)$;

г) $f\colon (x,y) \mapsto (ax^p \cos^\alpha y\,, bx^q \sin^\alpha y)$;

д) $f\colon (x,y) \mapsto (x+y, x-y)$;

е) $f\colon (x,y) \mapsto \left(\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)\,, \operatorname{arctg}\frac{x}{y}\right)$;

є) $f\colon (x,y) \mapsto \left(xy, \frac{1}{2}(x^2-y^2)\right)$;

2) $m = 3$ та

а) $f\colon (x,y,z) \mapsto (x\cos y\,, x\sin y\,, z)$;

б) $f\colon (x,y,z) \mapsto (ax\cos^\alpha y\,, bx\sin^\alpha y\,, cz)$;

в) $f\colon (x,y,z) \mapsto (x\cos y\sin z\,, x\sin y\sin z\,, x\cos z)$;

г) $f\colon (x,y,z) \mapsto \left(ax\cos^\alpha y\sin^\beta z\,, bx\sin^\alpha y\sin^\beta z\,, cx\cos^\beta z\right)$;

д) $f\colon (x,y,z) \mapsto \left(ax^p\cos^\alpha y\sin^\beta z\,, bx^q\sin^\alpha y\sin^\beta z\,, cx^r\cos^\beta z\right)$;

е) $f\colon (x,y,z) \mapsto (xyz, xy(1-z), x(1-y))$;

є) $f\colon (x,y,z) \mapsto \left(\frac{x}{\sqrt{1-r^2}}, \frac{y}{\sqrt{1-r^2}}, \frac{z}{\sqrt{1-r^2}}\right), r^2 = x^2+y^2+z^2$;

ж) $f\colon (x,y,z) \mapsto (yz-x, zx-y, xy-z)$;

з) $f\colon (x,y,z) \mapsto (x\mathrm{e}^z, y\mathrm{e}^x, z\mathrm{e}^y)$;

3) $m \in N$ та

а) $f\colon (x_1, x_2, \dots, x_m) \mapsto (x_m \sin x_1 \dots \sin x_{m-1},$
$x_m \cos x_1 \sin x_2 \dots \sin x_{m-1}\,, x_m \cos x_2 \sin x_3 \dots \sin x_{m-1},$
$x_m \cos x_3 \sin x_4 \dots \sin x_{m-1}\,, \dots, x_m \cos x_{m-2} \sin x_{m-1}\,, x_m \cos x_{m-1})$;

б) $f\colon (x_1, x_2, \dots, x_m) \mapsto (x_1, x_1+x_2, \dots, x_1+x_2+\dots+x_m)$;

58. Знайдіть перший та другий диференціали, а також усі частинні похідні першого та другого порядку функції $f\colon R^m \to R$ на D_f, а також у точці M, якщо:

1) $m = 2$ та

а) $f(x,y) = x\sin y + \mathrm{e}^{x+y}$ та $M\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$;

б) $f(x,y) = \mathrm{e}^{xy} + \operatorname{arctg}\frac{x}{y}$ та $M(0,1)$;

в) $f(x,y) = x^y + y^x$ та $M(1,1)$;

г) $f(x,y) = \cos(x^2+y^2) + \ln(xy)$ та $M(1,1)$;

д) $f(x,y) = \sin(x^3+y^2) + \cos(x+y^2)$ та $M(0,0)$;

2) $m = 3$ та

а) $f(x,y,z) = (x+y)\sin(y+z)$ та $M(1,-1,-1)$;

б) $f(x,y,z) = \mathrm{e}^{xy+z^2} + \ln\frac{x+y}{z}$ та $M(0,1,1)$;

в) $f(x,y,z) = (x+y+z)^3 - x^3 - y^3 - z^3$ та $M(1,1,0)$;

г) $f(x,y,z) = \cos(x+y) - \cos(x+z)$ та $M\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, 0\right)$;

д) $f(x,y,z) = x^{yz} + y^{z+x}$ та $M(1,1,1)$;

3) $m \in N$ та

а) $f(x_1, x_2, \dots, x_m) = (x_1+x_2+\dots+x_m)^2$ та $M(1,0,0,\dots,0)$;

б) $f(x_1, x_2, \dots, x_m) = \frac{x_1 x_2 \dots x_{m-1}}{x_m}$ та $M(0,0,1,1,\dots,1)$;

59. Для функції $f: R^2 \to R$ знайдіть $\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x \partial y}$ та $\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y \partial x}$, якщо:

1) $f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, (x,y) \neq (0,0), \\ 0, \quad (x,y) = (0,0); \end{cases}$

2) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}, (x,y) \neq (0,0), \\ 0, \quad (x,y) = (0,0); \end{cases}$

3) $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\dfrac{x-y}{x+y}, (x,y) \neq (0,0), \\ 0, \quad (x,y) = (0,0); \end{cases}$

4) $f(x,y) = \begin{cases} xy, \quad (x,y): |y| \leq x, \\ -xy, \quad (x,y): |y| > x; \end{cases}$

5) $f(x,y) = \begin{cases} x^2 \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x} - y^2 \operatorname{arctg} \dfrac{x}{y}, (x,y) \neq (t,0) \vee (0,t), \\ 0, \quad (x,y) = (t,0) \vee (0,t), \end{cases} t \in R;$

60. Вважаючи усі задані функції диференційованими на відповідних відкритих множинах з області визначення, знайдіть перший та другий диференціали, а також усі частинні похідні першого та другого порядку складної функції F, якщо:

1) $F = f(x^2+y^2)$; ***2)*** $F = f(x+xy+y)$;

3) $F = f(x^2-y^2, xy)$; ***4)*** $F = f\left(x+y, \frac{x}{y}\right)$;

5) $F = f(x^2+y^2, xy, x+y)$; ***6)*** $F = f(x+y, x^2+y^2, x^3+y^3)$;

7) $F = f(y^3+xz, xy+z^2)$; ***8)*** $F = f(xy+z, x^3y^2z)$;

9) $F = f(y^2, xyz)$; ***10)*** $F = f(x+y+z, x+y, z^2)$;

11) $F = f(x^2+y^2+z^2, xyz, x+y)$;

12) $F = f(x, xy, xyz)$; ***13)*** $F = f(x^2+yz, xy^2, z+y)$;

61. Для функції $f: R^m \to R$ знайдіть вказану частинну похідну на D_f, якщо:

1) $m = 2$ та

а) $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}$, де $f: (x,y) \mapsto (x+1)\sin\dfrac{1}{y}$;

б) $\dfrac{\partial^{2n} f}{\partial x^n \partial y^n}$, де $f: (x,y) \mapsto \sin(2x-3y)$, $n \in N$;

в) $\dfrac{\partial^{k+n} f}{\partial x^k \partial y^n}$, де $f: (x,y) \mapsto \dfrac{x+y}{x-y}$, $k,n \in N$;

г) $\dfrac{\partial^{k+n} f}{\partial x^k \partial y^n}$, де $f: (x,y) \mapsto (x+y)\mathrm{e}^{x-y}$, $k,n \in N$;

2) $m = 3$ та

а) $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}$, де $f: (x,y,z) \mapsto \dfrac{x+y+z}{xy+yz+zx}$;

б) $\dfrac{\partial^{3n} f}{\partial x^n \partial y^n \partial z^n}$, де $f\colon (x,y,z) \mapsto (x+1)^{n+2} y^{n+1} (z-1)^n, n \in N$;

в) $\dfrac{\partial^{3n} f}{\partial x^n \partial y^n \partial z^n}$, де $f\colon (x,y,z) \mapsto (x+2)^n (y-1)^n z^n, n \in N$;

г) $\dfrac{\partial^{3n} f}{\partial x^n \partial y^n \partial z^n}$, де $f\colon (x,y,z) \mapsto \sin(x+y)\, y^n (z+1)^{n-1}, n \in N$;

3) $m = 3, \dfrac{\partial^5 f}{\partial x^n \partial y^k \partial z^l} f\colon (x,y,z) \mapsto x^5 y + y^2 z^3 - 2x^2 yz + 3x^2 y^2 z - 4z^2 xy$ та

а) $n = 3, k = l = 1$; ***б)*** $n = k = 2, l = 1$;

а) $n = 4, k = 1, l = 0$; ***б)*** $n = l = 1, k = 3$;

4) $m = 3, \dfrac{\partial^{n+k+l} f}{\partial x^n \partial y^k \partial z^l} f\colon (x,y,z) \mapsto \sin(x+y) - \ln(y+z) + \mathrm{e}^{x+y+z}$, та

а) $n = 3, k = 2, l = 1$; ***б)*** $n = 2, k = 4, l = 3$;

а) $n = 4, k = 0, l = 2$; ***б)*** $n = l = 3, k = 2$;

62. Для функції $f\colon R^2 \to R$ знайдіть $\dfrac{\partial^{n+k} f(0,0)}{\partial x^n \partial y^k}$ для деяких $n, k \in N$, якщо:

1) $f\colon (x,y) \mapsto \mathrm{e}^x \sin y$; ***2)*** $f\colon (x,y) \mapsto \sin xy$;

3) $f\colon (x,y) \mapsto \cos(x+y)$; ***4)*** $f\colon (x,y) \mapsto \cos x \cos y$;

5) $f\colon (x,y) \mapsto x^n y^k$; ***6)*** $f\colon (x,y) \mapsto x^k y^n$;

7) $f\colon (x,y) \mapsto \mathrm{e}^{(x+y)^2}$; ***8)*** $f\colon (x,y) \mapsto \ln(1 + x + y^2)$;

9) $f\colon (x,y) \mapsto x^n y^k \ln(2^{x+y^2-3} + 1 + \cos(x^3 + x^2 y - y^3)$;

63. Знайдіть $d^n f$, якщо:

1) $f\colon (x,y) \mapsto \cos(x+y)$ та $n = 4$;

2) $f\colon (x,y,z) \mapsto \mathrm{e}^{x+2y+3z}$ та $n = 8$;

3) $f\colon (x,y) \mapsto x^y$ та $n = 3$;

4) $f\colon (x,y,z) \mapsto \ln(x+y) - \ln z$ та $n = 5$;

5) $f\colon (x,y,z) \mapsto (x+y)^{10} + (x+y+z)^9 + (y+z)^8 - x^7 + y^6 - z^5$ та

а) $n = 10$; ***б)*** $n = 9$; ***в)*** $n = 8$;

64. Перевірте, що справджуються наведені рівності, вважаючи, що усі функції диференційовані достатню кількість разів на відповідних множинах, якщо:

1) $y\dfrac{\partial f}{\partial x} - x\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$, де $f = \varphi(x^2 + y^2)$;

2) $(x^2 - y^2)\dfrac{\partial f}{\partial x} + xy\dfrac{\partial f}{\partial y} = \mathrm{x}yf$, де $f = \mathrm{e}^y \varphi\left(y\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2y^2}}\right)$;

3) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, де $f = \varphi(x - 2y) + \psi(x + 2y)$;

4) $x^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$, де $f = \varphi\left(\dfrac{y}{x}\right) + x\psi\left(\dfrac{y}{x}\right)$;

5) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} - 6\dfrac{\partial f}{\partial x} = 9f$, де $f = \mathrm{e}^{-3x}\varphi(x - y)$;

6) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2\varphi'', \text{де } f = \varphi(y-x) - x\varphi'(y-x);$

7) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 = 0, \text{де } f = \varphi(xy);$

8) $\sum\limits_{j=1}^{m} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = 0, \text{де } f = \left(\sum\limits_{j=1}^{m} x_i^2\right)^{\frac{2-m}{m}};$

Розділ 5.6. Неявні та обернені ФБЗ

Короткі теоретичні відомості

Нехай задане відображення $F = R^{m+n} \to R^k$, точки $x_0 = \left(x_1^{(0)}, \dots, x_m^{(0)}\right)$ та $y_0 = \left(y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}\right)$ такі, що $(x_0, y_0) \in D_F$ та відкриті множини X та Y такі, що $x_0 \in X \subset R^m$, $y_0 \in Y \subset R^n$ та $X \times Y \subset D_F$. Якщо $\forall x \in X$ рівняння $F(x, y) = \theta$, де $\theta \in R^k$, має єдиний розв'язок $y \in Y$, то визначене відображення $X \xrightarrow{f} Y$, при якому кожному $x \in X$ ставиться у відповідність значення $y = f(x) \in Y$, яке є розв'язком рівняння $F(x, y) = \theta$. У цьому випадку кажуть, що рівняння $F(x, y) = \theta$ визначає на множині $X \times Y$ неявне задане відображення $x \mapsto f(x)$, яке має властивість: $\forall x \in X\ F(x, f(x)) = \theta$.

Теорема 16. *(неперервність та диференційованість неявної функції)*

Нехай задане відображення $F = R^{m+n} \to R^n$ та точки $x_0 = \left(x_1^{(0)}, \dots, x_m^{(0)}\right)$ та $y_0 = \left(y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}\right)$, для яких справджуються умови:

1) $F(x_0, y_0) = \theta$ або $\begin{cases} f_1(x_0, y_0) = 0, \\ \dots \\ f_n(x_0, y_0) = 0, \end{cases}$, або $\begin{cases} f_1\left(x_1^{(0)}, \dots, x_m^{(0)};\ y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}\right) = 0, \\ \dots \\ f_1\left(x_1^{(0)}, \dots, x_m^{(0)};\ y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}\right) = 0; \end{cases}$

2) існує окіл $O\left((x_0, y_0)\right) \subset D_F \subset R^{m+n}$, в якому існують та неперервні частинні похідні

$$\frac{\partial f_i(x_1, \dots, x_m;\ y_1, \dots, y_n)}{\partial y_j}, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n};$$

3) якобіан матриці

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial y_n} \end{pmatrix}$$

відмінний від нуля в околі $O\left((x_0, y_0)\right)$;

4) у околі $O\left((x_0, y_0)\right)$ існує похідна

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m} \end{pmatrix}.$$

Тоді існує окіл $O(x_0) \subset R^m$ точки $x_0 = \left(x_1^{(0)}, \dots, x_m^{(0)}\right)$, в якому існує система диференційованих функцій

$$\begin{cases} y_1 = y_1(x_1, \dots, x_m) = 0, \\ \dots \\ y_n = y_n(x_1, \dots, x_m) = 0, \end{cases}$$

для яких $y_1(x_0) = y_1^{(0)}$, …, $y_n(x_0) = y_n^{(0)}$,

$$\begin{cases} f_1\left(x_1, \dots, x_m;\ y_1(x_1, \dots, x_m), \dots, y_n(x_1, \dots, x_m)\right) \equiv 0, \\ \dots \\ f_n\left(x_1, \dots, x_m;\ y_1(x_1, \dots, x_m), \dots, y_n(x_1, \dots, x_m)\right) \equiv 0, \end{cases}$$

та $\forall x \in O(x_0)$

$$y'(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_m} \end{pmatrix} = -\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)^{-1} \cdot \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}.$$

Нехай задане бієктивне відображення $X \overset{f}{\leftrightarrow} Y$, де $X \subset R^m$, $Y \subset R^m$ – відкриті множини. Тоді існує обернене відображення $Y \overset{f^{-1}}{\leftrightarrow} X$. Якщо функції f та f^{-1} неперервно диференційовані, то відображення f називають ***C^1-діфеоморфізмом***.

Теорема 17. *(неперервність та диференційованість оберненої функції)*

Нехай відображення $X \overset{f}{\leftrightarrow} Y$ є C^1-діфеоморфізмом для відкритих множин $X \subset R^m$ та $Y \subset R^m$, $x_0 \in X$, $y_0 = f(x_0) \in Y$ і матриця $f'(x_0)$ оборотня. Тоді існують такі околи $O(x_0)$ та $O(y_0)$, що $O(y_0) \overset{f^{-1}}{\leftrightarrow} O(x_0)$, $f^{-1}(y_0) = x_0$ та $(f^{-1})'(y_0) = \left(f'(x_0)\right)^{-1}$.

Задачі

В задачах в ЛНП R^2 та R^3 замість позначень змінних $x = (x_1, x_2)$ та $x = (x_1, x_2, x_3)$ будемо вживати більш звичні $P = (x, y)$ та $P = (x, y, z)$, якщо то не буде викликати непорозумінь.

65. Для функції $y: (x_1, \dots, x_m) \mapsto f(x_1, \dots, x_m)$, що визначена неявно рівнянням $F(x_1, \dots, x_m;\ y) = 0$, де $F: R^{m+1} \to R$, знайдіть перший та другий диференціал, а також усі похідні першого та другого порядку в точці $M\left(x_1^{(0)}, \dots, x_m^{(0)}, y_0\right) \in D_F \subset R^{m+1}$ та в точках області визначення, де вони існують, якщо

1) $m = 1$ та

а) $F: (x;\ y) \mapsto x^2 + xy + y^3 - 3$, $M(1;\ 1)$;

б) $F: (x;\ y) \mapsto y^4 - y$, $M(1;\ 1)$;

в) $F: (x;\ y) \mapsto x^5 - 5y + y^5 - 23$, $M(2;\ 1)$;

г) $F: (x;\ y) \mapsto x^y + y^x - 3$, $M(2;\ 1)$;

д) $F: (x;\ y) \mapsto y - x + \frac{1}{2}(\sin y - 1)$, $M\left(\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$;

2) $m = 2$ та

а) $F: (x_1, x_2;\ y) \mapsto x_1^2 + x_2^2 - y^3 + 2y$, $M(2, 0;\ 2)$;

б) $F: (x_1, x_2;\ y) \mapsto \frac{x_1}{y} - \ln\frac{y}{x_2} + 2$, $M(-4, 2;\ 2)$;

в) $F: (x_1, x_2;\ y) \mapsto x_1 + \sin x_2 + \cos y - y$, $M(-1, 0;\ 0)$;

г) $F: (x_1, x_2;\ y) \mapsto y^3 - 3x_1x_2y + 27$, $M(2, 3;\ 3)$;

д) $F: (x_1, x_2;\ y) \mapsto x_1^3 + x_2^3 - y^3 - 3y + 5$, $M(1, 2;\ 2)$;

е) $F: (x_1, x_2;\ y) \mapsto y^4 - 3x_1y + x_2 + 1$, $M(1, 1;\ 1)$;

є) $F: (x_1, x_2;\ y) \mapsto (x_1 + y)^3 + (x_2 + y)^2 + x_1 - y + 4$, $M(-2, -2;\ 2)$;

ж) $F: (x_1, x_2;\ y) \mapsto x_1 \sin x_2 + x_2 \sin y + y \sin x_1$, $M(0, \pi;\ 2\pi)$;

з) $F: (x_1, x_2;\ y) \mapsto x_1 \cos x_1 + x_2 \cos x_2 + y \cos y$, $M\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2};\ \pi\right)$;

3) $m = 3$ та

а) $F\colon (x_1, x_2, x_3;\ y) \mapsto \sin(x_1 + x_2 + x_3 + y) - \cos y$, $M\left(\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{4}\right)$;

б) $F\colon (x_1, x_2, x_3;\ y) \mapsto y^3 - 3(x_1 + x_2)y^2 + x_3^3$, $M(2, -2, -1;\ 1)$;

в) $F\colon (x_1, x_2, x_3;\ y) \mapsto x_1 y^3 + x_2 y^2 + x_3 y - 1$, $M(1, 1, -1;\ 1)$;

г) $F\colon (x_1, x_2, x_3;\ y) \mapsto \ln(x_1 + y) - \ln(x_2 + y) + x_3 + y$, $M(0, 0, -\mathrm{e};\ \mathrm{e})$;

4) $m = 4$ та

а) $F\colon (x_1, x_2, x_3, x_4;\ y) \mapsto x_1 y^3 + x_2 y^2 + x_3 y + x_4$, $(1, -1, 1, -1;\ 1)$;

б) $F\colon (x_1, x_2, x_3;\ y) \mapsto x_1 y^3 + x_2^2 y^2 + x_3^3 y + x_4^4$, $M(1, -1, 1, -1;\ 1)$;

5) $m \in N$ та

а) $F\colon (x_1, \dots, x_m; y) \mapsto x_1 + \dots + x_{m-1} + x_m y - m y^3$, $(1, \dots, 1;\ 1)$;

б) $F\colon (x_1, \dots, x_m; y) \mapsto x_1 x_2 + x_2 x_3 + \dots x_{m-1} x_m + x_m y + y^3 - m + 1$, $M(1, \dots, 1;\ 0)$;

66. Перевірити, чи визначена рівнянням $F(x_1, \dots, x_m;\ y) = 0$, де $F\colon R^{m+1} \to R$, на множині $X \times Y$ неявна функція $y\colon x \mapsto f(x_1, \dots, x_m)$, якщо

1) $m = 1$ та

а) $F\colon (x;\ y) \mapsto x^y + y^x - 3$, $X = (1;\ 3)$, $Y = (0, 2)$;

б) $F\colon (x;\ y) \mapsto x^2 y^2 + x^2 + y^2 - 1$, $X = Y = (-1;\ 1)$;

в) $F\colon (x;\ y) \mapsto \ln\sqrt{x^2 + y^2} - \frac{3}{2}\ln 2 - \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \frac{\pi}{4}$, $X = (1, 3)$, $Y = R$;

2) $m = 2$ та

а) $F\colon (x_1, x_2;\ y) \mapsto x_1^2 + x_2^2 - y^3 + 2y$, $X = R^2$, $Y = R$;

б) $F\colon (x_1, x_2;\ y) \mapsto \mathrm{e}^{x_1 + x_2 + y} - x_1 - x_2 - y + 1$, $X = R^2$, $Y = R$;

в) $F\colon (x_1, x_2;\ y) \mapsto y^3 - \frac{3x_1^2 y}{\sqrt[3]{x_2}} + 27$, $X = (1, 3) \times (2, 4)$, $Y = R$;

67. Для функції $f\colon R^m \to R^m$ в околах $O(x_0)$ та $O(y_0)$ точок $x_0, y_0 \in R^m$, де $y_0 = f(x_0)$, знайдіть похідну оберненої функції $g\colon O(y_0) \to O(x_0)$, якщо

1) $m = 2$ та

а) $f\colon (x_1, x_2) \mapsto \left(x_1 \cos\frac{\pi x_2}{x_1}, x_2 \sin\frac{\pi x_2}{x_1}\right)$, $x_0(1, 1)$;

б) $f\colon (x_1, x_2) \mapsto (\mathrm{e}^{x_1} + x_1 \sin x_2\,, \mathrm{e}^{x_1} - x_1 \cos x_2)$, $x_0(1, \pi)$;

2) $m = 3$ та

а) $f\colon (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1^3, x_1^2 + x_2^2, x_1 + x_2^2 + x_3^3)$, $x_0(1, 1, 2)$;

б) $f\colon (x_1, x_2, x_3) \mapsto (\sin x_1 + \cos x_2\,, \sin x_2 + \cos x_3\,, \sin x_3 + \cos x_1)$, $x_0\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$;

68. Для функції $y\colon (x_1, x_2) \mapsto y(x_1, x_2)$, що визначена неявно рівнянням $F(x_1, x_2;\ y) = 0$, де $F\colon (x_1, x_2;\ y) \mapsto f(x_1, x_2;\ y)$, знайдіть її перший та другий диференціал через похідні двічі диференційованої функції $f\colon R^m \to R$ в околах точок, де вони існують, якщо

1) $m = 1$ та

а) $F\colon (x_1, x_2;\ y) \mapsto f(x_1 + x_2 + y)$;

б) $F\colon (x_1, x_2;\ y) \mapsto f(x_1 x_2 + y)$;

2) $m = 2$ та

а) $F\colon (x_1, x_2;\ y) \mapsto f(x_1 + x_2, y)$;
б) $F\colon (x_1, x_2;\ y) \mapsto f(x_1 + y, x_2 + y)$;
в) $F\colon (x_1, x_2;\ y) \mapsto f(x_1 y, x_2 y)$;
г) $F\colon (x_1, x_2;\ y) \mapsto f\left(\frac{x_1}{y}, \frac{x_2}{y}\right)$;
д) $F\colon (x_1, x_2;\ y) \mapsto f(\mathrm{e}^{x_1} - y, \mathrm{e}^{x_2} + y)$;

3) $m = 3$ та
а) $F\colon (x_1, x_2;\ y) \mapsto f(x_1 + y, y, x_2 + y)$;
б) $F\colon (x_1, x_2;\ y) \mapsto f(x_1 x_2, x_1 y, x_1 y)$;

69. Для функції $y\colon (x_1, \dots, x_m) \mapsto \big(y_1(x_1, \dots, x_m), \dots, y_n(x_1, \dots, x_m)\big)$, що визначена неявно системою рівнянь $F_i(x_1, \dots, x_m;\ y_1, \dots, y_n) = 0,\ i = \overline{1, n}$ в околі точки $M\left(x_1^{(0)}, \dots, x_m^{(0)};\ y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}\right)$ та знайдіть її усі перші та другі похідні в точці $N\left(y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}\right)$, якщо

1) $m = 1, n = 2$ та
а) $\begin{cases} F_1\colon (x;\ y_1, y_2) \mapsto x + y_1 + y_2 - 3, \\ F_2\colon (x;\ y_1, y_2) \mapsto x^2 + y_1^2 + y_1^2 - 5, \end{cases} M(1; 0, 2)$;
б) $\begin{cases} F_1\colon (x;\ y_1, y_2) \mapsto x^2 - y_1^2 + y_2 - 1, \\ F_2\colon (x;\ y_1, y_2) \mapsto y_1 - 2x + y_2^2, \end{cases} M(1; 1, 1)$;
в) $\begin{cases} F_1\colon (x;\ y_1, y_2) \mapsto x^3 + y_1^3 + y_2^3 - 8, \\ F_2\colon (x;\ y_1, y_2) \mapsto x^2 + y_1^2 + y_2^2 - 6, \end{cases} M(-1; 1, 2)$;
г) $\begin{cases} F_1\colon (x;\ y_1, y_2) \mapsto x^2 - y_1^3 + y_2, \\ F_2\colon (x;\ y_1, y_2) \mapsto 2x - y_2 y_1 + 2, \end{cases} M(-1; 1, 0)$;
д) $\begin{cases} F_1\colon (x;\ y_1, y_2) \mapsto x^2 - y_1^3 + y_2^2 - 1, \\ F_2\colon (x;\ y_1, y_2) \mapsto x + y_1^2 + y_2^3 - 1, \end{cases} M(-1; 1, 1)$;

2) $m = 2, n = 2$ та
а) $\begin{cases} F_1\colon (x_1, x_2;\ y_1, y_2) \mapsto x_1 y_1 - x_2 y_2 - 4, \\ F_2\colon (x_1, x_2;\ y_1, y_2) \mapsto x_2 y_1 + x_1 y_2 - 2, \end{cases} M(1, 1; 3, -1)$;
б) $\begin{cases} F_1\colon (x_1, x_2;\ y_1, y_2) \mapsto x_1 + x_2 - y_1 - y_2 + 1, \\ F_2\colon (x_1, x_2;\ y_1, y_2) \mapsto \mathrm{e}^{y_1 - y_2} - x_1^2 + x_2^2, \end{cases} M(1, 0; 1, 1)$;
в) $\begin{cases} F_1\colon (x_1, x_2;\ y_1, y_2) \mapsto x_1 y_1 - x_2 y_2 - 4, \\ F_2\colon (x_1, x_2;\ y_1, y_2) \mapsto x_2 y_1 + x_1 y_2 - 2, \end{cases} M(1, 1; 3, -1)$;
г) $\begin{cases} F_1\colon (x_1, x_2;\ y_1, y_2) \mapsto x_1 + x_2 + y_1^3 + y_2^3 - 1, \\ F_2\colon (x_1, x_2;\ y_1, y_2) \mapsto x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 - 3, \end{cases} M(0, 1; 1, -1)$;
д) $\begin{cases} F_1\colon (x_1, x_2;\ y_1, y_2) \mapsto x_1 x_2 - y_1^2 + y_2^2, \\ F_2\colon (x_1, x_2;\ y_1, y_2) \mapsto x_1^2 - y_1 y_2 - 2, \end{cases} M(1, 0; 1, -1)$;

3) $m = 3, n = 2$ та
а) $\begin{cases} F_1\colon (x_1, x_2, x_3;\ y_1, y_2) \mapsto x_1 y_1 + x_2^2 - x_3 y_2 - 2, \\ F_2\colon (x_1, x_2, x_3;\ y_1, y_2) \mapsto x_2 y_1 + x_1 y_2 - x_3^2 - 2, \end{cases} M(0, 1, 1; 3, -1)$;

б) $\begin{cases} F_1\colon (x_1, x_2, x_3;\ y_1, y_2) \mapsto x_1 + x_2 + x_3 - y_1^2 - y_2^2 - 2, \\ F_2\colon (x_1, x_2, x_3;\ y_1, y_2) \mapsto x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - y_1 + y_2 - 2, \end{cases}$
$M(1, 1, 1; 0, 1)$;

4) $m = 2, n = 3$ та

а) $\begin{cases} F_1\colon (x_1, x_2;\ y_1, y_2, y_3) \mapsto x_1 x_2 + y_1 + y_2^2 + y_3^2 - 1, \\ F_2\colon (x_1, x_2;\ y_1, y_2, y_3) \mapsto x_1 + x_2 y_1 + y_2 y_3, \end{cases}$ $M(1, 1;\ 0, 1, -1)$;

б) $\begin{cases} F_1\colon (x_1, x_2;\ y_1, y_2, y_3) \mapsto x_1 x_2 + y_1 y_2 y_3 - 2, \\ F_2\colon (x_1, x_2;\ y_1, y_2, y_3) \mapsto x_2 - x_1 y_1 + y_2 + 2y_3, \end{cases}$ $M(1, 1;\ 0, 1, -1)$;

70. Для функції $y\colon (x_1, \dots, x_m) \mapsto \big(y_1(x_1, \dots, x_m), \dots, y_n(x_1, \dots, x_m)\big)$, що визначена неявно системою рівнянь $x_i = f_i(t_1, \dots, t_k)$, $i = \overline{1, m}$, $y_j = g_j(t_1, \dots, t_k)$, $j = \overline{1, n}$, де $f_i\colon (t_1, \dots, t_k) \mapsto f_i(t_1, \dots, t_k)$, $i = \overline{1, m}$, $g_j\colon (t_1, \dots, t_k) \mapsto g_j(t_1, \dots, t_k)$, $j = \overline{1, n}$ – двічі диференційовані функції в околі $O\left(t_1^{(0)}, \dots, t_k^{(0)}\right) \subset D_{f_1} \cap \dots \cap D_{f_m} \cap D_{g_1} \cap \dots \cap D_{g_n}$, знайдіть перший та другий диференціал в точці $M\left(x_1^{(0)}, \dots, x_m^{(0)};\ y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}\right)$, де $x_i^{(0)} = f_i\left(t_1^{(0)}, \dots, t_k^{(0)}\right)$, $i = \overline{1, m}$, $y_j^{(0)} = g_j\left(t_1^{(0)}, \dots, t_k^{(0)}\right)$, $j = \overline{1, n}$, якщо:

1) $m = 1, n = 1, k = 1$ та

а) $\begin{cases} f\colon t \mapsto \sin t\,, \\ g\colon t \mapsto \cos t\,, \end{cases}$ $t_0 = \pi$;

б) $\begin{cases} f\colon t \mapsto t - t^3, \\ g\colon t \mapsto t^2 - t^3, \end{cases}$ $t_0 = 1$;

2) $m = 2, n = 1, k = 1$ та

а) $\begin{cases} f_1\colon t \mapsto t - t^2, \\ f_2\colon t \mapsto t - t^3, \\ g\colon t \mapsto t^3 - t^2, \end{cases}$ $t_0 = -1$;

б) $\begin{cases} f_1\colon t \mapsto t + t^{-1}, \\ f_2\colon t \mapsto t^2 + t^{-2}, \\ g\colon t \mapsto t^3 - t^{-3}, \end{cases}$ $t_0 = 2$;

3) $m = 2, n = 1, k = 2$ та

а) $\begin{cases} f_1\colon (t_1, t_2) \mapsto t_1^2 + t_2^2, \\ f_2\colon (t_1, t_2) \mapsto 2t_1 t_2, \\ g\colon (t_1, t_2) \mapsto t_1 + t_2, \end{cases}$ $t_1^{(0)} = -1, t_2^{(0)} = 1$;

б) $\begin{cases} f_1\colon (t_1, t_2) \mapsto t_1 + t_2^2, \\ f_2\colon (t_1, t_2) \mapsto t_1^2 + t_2, \\ g\colon (t_1, t_2) \mapsto t_1 t_2, \end{cases}$ $t_1^{(0)} = 1, t_2^{(0)} = 1$;

в) $\begin{cases} f_1\colon (t_1, t_2) \mapsto t_1 \sin t_2\,, \\ f_2\colon (t_1, t_2) \mapsto t_1 \cos t_2\,, \\ g\colon (t_1, t_2) \mapsto t_2, \end{cases}$ $t_1^{(0)} = 1, t_2^{(0)} = 0$;

г) $\begin{cases} f_1\colon (t_1, t_2) \mapsto \mathrm{e}^{t_1 - t_2}, \\ f_2\colon (t_1, t_2) \mapsto \mathrm{e}^{t_1 + t_2}, \\ g\colon (t_1, t_2) \mapsto t_1 t_2, \end{cases}$ $t_1^{(0)} = 1, t_2^{(0)} = -1$;

д) $\begin{cases} f_1\colon (t_1, t_2) \mapsto t_1 + \ln t_2\,, \\ f_2\colon (t_1, t_2) \mapsto t_2 - \ln t_1\,, \\ g\colon (t_1, t_2) \mapsto t_1 + t_2, \end{cases}$ $t_1^{(0)} = 1, t_2^{(0)} = \mathrm{e}$;

4) $m=2, n=2, k=2$ та

а) $\begin{cases} f_1\colon (t_1,t_2)\mapsto t_1+t_1^2, \\ f_2\colon (t_1,t_2)\mapsto t_2+t_1^2, \\ g_1\colon (t_1,t_2)\mapsto t_1+t_2, \\ g_2\colon (t_1,t_2)\mapsto t_2t_1, \end{cases} t_1^{(0)}=-1,\ t_2^{(0)}=1;$

б) $\begin{cases} f_1\colon (t_1,t_2)\mapsto t_1+t_2, \\ f_2\colon (t_1,t_2)\mapsto t_1^2+t_2^2, \\ g_1\colon (t_1,t_2)\mapsto t_1-t_2, \\ g_2\colon (t_1,t_2)\mapsto t_1^2-t_2^2, \end{cases} t_1^{(0)}=0,\ t_2^{(0)}=1;$

71. Для функції $y\colon (x_1,x_2)\mapsto y(x_1,x_2)$, що визначена неявно рівнянням $F(x_1,x_2;\ y)=0$, перевірте, що справджуються наведені рівності, вважаючи, що усі функції диференційовані достатню кількість разів на відповідних множинах, якщо:

1) $(3x_2-2y)\dfrac{\partial y}{\partial x_1}+(y-3x_1)\dfrac{\partial y}{\partial x_2}=2x_1-x_2$, де
$F\colon (x_1,x_2;\ y)\mapsto x_1+2x_2+3y-f(x_1^2+x_2^2+y^2)$;

2) $(x_1-1)\dfrac{\partial y}{\partial x_1}+(x_2-2)\dfrac{\partial y}{\partial x_2}=\mathrm{y}-3$, де
$F\colon (x_1,x_2;\ y)\mapsto f\left(\dfrac{x_1-1}{y-3},\dfrac{x_2-2}{y-3}\right)$;

3) $(x_1^2+x_2^2+y^2)\dfrac{\partial y}{\partial x_1}+2x_1x_2\dfrac{\partial y}{\partial x_2}=2x_1y$, де
$F\colon (x_1,x_2;\ y)\mapsto x_1^2+x_2^2+y^2-x_2f\left(\dfrac{y}{x_2}\right)$;

4) $x_1\dfrac{\partial y}{\partial x_1}+x_2\dfrac{\partial y}{\partial x_2}=y-x_1x_2$, де $F\colon (x_1,x_2;\ y)\mapsto f\left(x_1+\dfrac{y}{x_2},x_2+\dfrac{y}{x_1}\right)$;

5) $\dfrac{\partial y}{\partial x_1}+2\dfrac{\partial y}{\partial x_2}=1$, де $F\colon (x_1,x_2;\ y)\mapsto x_1-y-f(x_2-2y)$;

6) $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x_1^2}\cdot\dfrac{\partial^2 y}{\partial x_2^2}-\left(\dfrac{\partial^2 y}{\partial x_1\partial x_2}\right)^2=0$, де $F\colon (x_1,x_2;\ y)\mapsto x_2-x_1f(y)-f(y)$;

Розділ 5.7. Формула Тейлора

Короткі теоретичні відомості

Теорема 18. *(формула Тейлора)*

Нехай функція $f: R^m \to R$ n-диференційована на відкритій опуклій множин $X \subset D_f$. Тоді $\forall x, x_0 \in X$ справджується рівність, яка називається ***формулою Тейлора***:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{d_h^k f(x_0)}{k!} + \frac{d_h^n f(x_0 + \theta_n h)}{k!}, 0 < \theta_n < 1,$$

де $h = x - x_0$, $d_h^0 f(x_0) = f(x_0)$.

Теорема 19. *(формула Тейлора-Пеано)*

Нехай функція $f: R^m \to R$ n-диференційованою в точці $x_0 \in \operatorname{int} D_f$. Тоді для деякого околу $O(x_0) \subset D_f$ $\forall x \in O(x_0)$ справджується рівність, яка називається ***формулою Тейлора із залишковим членом у формі Пеано***:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{d_h^k f(x_0)}{k!} + o(\|h\|^n),$$

де $h = x - x_0$.

Задачі

В задачах в ЛНП R^2 та R^3 замість позначень змінних $x = (x_1, x_2)$ та $x = (x_1, x_2, x_3)$ будемо вживати більш звичні $P = (x, y)$ та $P = (x, y, z)$, якщо то не буде викликати непорозумінь.

72. Розкладіть функцію $f: (x_1, x_2, \dots, x_m) \mapsto f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ за формулою Тейлора в околі точки $M\left(x_1^{(0)}, \dots, x_m^{(0)}\right)$ до членів n-го порядку, якщо:

1) $m = 2, n = 2$ та:

а) $f(x, y) = (1 + x)^y$, $M(0, 0)$;

б) $f(x, y) = \cos x^{\sin y}$, $M(0, 0)$;

2) $m = 2, n = 3$ та

а) $f(x, y) = x^y$, $M(1, 1)$;

б) $f(x, y) = \cos(1 - xy)$, $M(1, 1)$;

в) $f(x, y) = \frac{x}{y}$, $M(1, 1)$;

г) $f(x, y) = 2^y \ln(1 + x)$, $M(1, 1)$;

3) $m = 2, n = 4$ та

а) $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $M(0, 0)$;

б) $f(x, y) = \mathrm{e}^x \cos y$, $M(0, 0)$;

в) $f(x, y) = \frac{\cos x}{\cos y}$, $M(0, 0)$;

г) $f(x, y) = \sin x \cdot \operatorname{sh} y$, $M(0, 0)$;

д) $f(x, y) = \cos(x + y^2)$, $M(0, 0)$;

е) $f(x, y) = \cos x \cdot \operatorname{ch} y$, $M(0, 0)$;

є) $f(x, y) = (1 + x)^p (1 + x)^q$, $p, q \in R$, $M(0, 0)$;

ж) $f(x,y)=\ln(1+x)\ln(1-y^2)$, $M(0,0)$;
з) $f(x,y)=\ln(1+x+y)$, $M(0,0)$;
и) $f(x,y)=\mathrm{e}^{\frac{x}{y-1}}$, $M(0,0)$;
і) $f(x,y)=\mathrm{e}^{x}\sin y$, $M(0,0)$;
ї) $f(x,y)=\operatorname{arctg}\frac{x-y}{1+xy}$, $M(0,0)$;
й) $f(x,y)=\frac{1}{1-x-y+xy}$, $M(0,0)$;
к) $f(x,y)=\ln\frac{1-x-y+xy}{1-x-y+}$, $M(0,0)$;
л) $f(x,y)=\mathrm{e}^{x+y}$, $M(0,0)$;
м) $f(x,y)=\frac{x}{\cos(x+y)}$, $M(0,0)$;
н) $f(x,y)=\operatorname{tg}x\sin y$, $M(0,0)$;
о) $f(x,y)=\ln(1+\cos(xy))$, $M(0,0)$;
п) $f(x,y)=\operatorname{arctg}\frac{1+x+y}{1-x+y}$, $M(0,0)$;
р) $f(x,y)=\sin\mathrm{e}^{xy}$, $M(0,0)$;
с) $f(x,y)=\sin(x^2+\cos y)$, $M(0,0)$;
т) $f(x,y)=\cos(x^2+\mathrm{e}^{xy})$, $M(0,0)$;
у) $f(x,y)=2x^2+3xy-6y^2+5x+2y-1$, $M(1,1)$;
ф) $f(x,y)=x^3-3xy+y^3$, $M(-1,-1)$;

4) $m=3,n=2$ та
а) $f(x,y,z)=2^{\cos(x+z)}\cdot\ln(1+y)$, $M(0,0,0)$;
а) $f(x,y,z)=\ln(1+x+y+z)-\sqrt{1+2x-yz}$, $M(0,0,0)$;
5) $m=3,n=3$ та
а) $f(x,y,z)=2^{x}\cdot\ln(1+y)\cdot\sin z$, $M(0,0,0)$;
б) $f(x,y,z)=\mathrm{e}^{1-x}\cdot\ln(1+y)\cdot\cos(xz)$, $M(0,0,0)$;
в) $f(x,y,z)=\operatorname{arctg}x-\arcsin y\cdot\operatorname{tg}z$; $M(0,0,0)$;
г) $f(x,y,z)=\arccos x\cdot\sqrt[3]{1+z-y^2}$; $M(0,0,0)$;
д) $f(x,y,z)=\cos\left(xz+y^2+\mathrm{e}^{z^2}\right)$, $M(0,0,0)$;
е) $f(x,y,z)=\frac{\cos(x+y)-\sin(x+z)}{\cos(y+z)}$, $M(0,0,0)$;
є) $f(x,y,z)=\sin(x+y+z)-\sin(x+y)-=\sin z$, $M(0,0,0)$;
ж) $f(x,y,z)=x^{y}\cdot y^{z+x}$, $M(1,1,0)$;
6) $m\in N,n=2$ та
а) $f(x_1,x_2,\dots,x_m)=\mathrm{e}^{1+x_1+x_2+\cdots+x_m}$, $M(0,0,\dots,0)$;
б) $f(x_1,x_2,\dots,x_m)=\ln(x_1-x_2-x_3-\cdots-x_m)$, $M(1,0,0,\dots,0)$;
в) $f(x_1,x_2,\dots,x_m)=\cos(x_1+x_2+\cdots+x_m)$, $M(0,0,\dots,0)$;
г) $f(x_1,x_2,\dots,x_m)=\sin(x_1+x_1x_2+x_1x_2x_3+\cdots+x_1x_2\dots x_m)$, $M(1,0,0,\dots,0)$;
7) $m\in N,n=3$ та
а) $f(x_1,x_2,\dots,x_m)=\mathrm{e}^{x_1x_2+x_2x_3+\cdots+x_{m-1}x_m+x_mx_1}$, $M(0,0,\dots,0)$;
б) $f(x_1,x_2,\dots,x_m)=\cos x_1\cdot\cos x_2\cdot\dots\cdot\cos x_m$, $M(0,0,\dots,0)$;

в) $f(x_1, x_2, \dots, x_m) = \sqrt{\mathrm{e}^{x_1 x_2 \dots x_m} + (x_1 + x_2 + \dots + x_m)^2}$, $M(0, 0, \dots, 0)$;

73. Розкладіть функцію $z\colon (x, y) \mapsto z(x, y)$, що задана неявно рівнянням $F(x, y; z) = 0$, за формулою Тейлора в околі точки $M(a, b)$ до членів n-го порядку, де $c = z(a, b)$ якщо:

1) $n = 2$ та:

а) $F(x, y; z) = z^3 - 2xz + y$, $a = b = c = 1$;

б) $F(x, y; z) = zx - \sin z + y^2 - 1$, $a = 2, b = 1, c = 0$;

в) $F(x, y; z) = \ln z - xy + 2z$, $a = 1, b = 2, c = 1$;

2) $n = 3$ та:

а) $F(x, y; z) = z^4 - 2xz + y^2$, $a = 1, b = 2, c = 1$;

б) $F(x, y; z) = z^3 + yz - xy^2 - x^3$, $a = b = c = 1$;

в) $F(x, y; z) = z^5 - zx^2 + x - y + 1$, $a = 1, b = 2, c = 1$;

Розділ 5.8. Екстремум ФБЗ

Короткі теоретичні відомості

Функція $f: R^m \to R$ має в точці $x_0 \in D_f$ ***локальний максимум*** (***мінімум***), якщо $\exists O(x_0) \subset R^m$: $\forall x \in O(x_0) \cap D_f$ справджується нерівність $f(x) \le f(x_0)$ $\left(f(x) \ge f(x_0)\right)$. Якщо ж $\forall x \in \overset{\circ}{O}(x_0) \cap D_f$ справджується нерівність $f(x) < f(x_0)$ $\left(f(x) > f(x_0)\right)$ то локальний максимум (мінімум) називається ***строгим максимумом*** (***строгим мінімумом***). Локальні максимуми та мінімуми функції f називають ***локальними екстремумами*** або просто ***екстремумами***, строгими чи нестрогими відповідно.

Теорема 18. *(Ферма, необхідна умова екстремума)*

Якщо функція $f: R^m \to R$ має локальний екстремум в точці $x_0 \in \operatorname{int} D_f$ та $\forall j = \overline{1,m}$ існує $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)$, то $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) = 0, \forall j = \overline{1,m}$.

Ця умова є необхідною для існування локального екстремума в точці x_0 функції f, що має усі частинні похідні в цій точці. До точок можливого екстремума варто додати точки, що не є внутрішніми множини D_f, а також ті точки, в яких деякі або навіть усі частинні похідні не існують.

Достатні умови екстремума спираються на властивості симетричної квадратичної форми, що відповідає другому диференціалу функції. Розглянемо для симетричної матриці $A = \left(\alpha_{ij}\right)_{i,j=\overline{1,m}}$ квадратичну форму $R^m \overset{K}{\to} R$ вигляду

$$K(x) = \sum_{i,j=1}^{m} \alpha_{ij} x_i x_j,$$

де $x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m$. Цю квадратичну форму називають ***додатно визначеною*** (***від'ємно визначеною***), якщо $\forall x \in R^m \backslash \{\theta\}$ справджується нерівність $K(x) > 0$ $(K(x) < 0)$. Якщо існують такі $x', x'' \in R^m$, що $K(x') \cdot K(x'') < 0$, то квадратичну форму називають ***знакозмінною***. Усі інші квадратичні форми називають ***невід'ємно*** чи ***недодатно визначеними***, оскільки для них справджується умова: $\forall x \in R^m$ $K(x) \ge 0$ $(K(x) \le 0)$. ***Мінором k-го порядку*** для $k \le n$ матриці A називають визначник k-го порядка, що складається з елементів на перетині довільних k рядків та k стовпчиків матриці A. ***Рангом матриці*** A називають найбільше можливе значення k, для якого існує ненульовий мінор k-го порядка. Мінор k-го порядка матриці A називається ***кутовим***, якщо йому відповідають перші k рядків та стовпчиків цієї матриці, мінор k-го порядка матриці A називається ***головним***, якщо йому відповідають рядки та стовпчики цієї матриці з однаковими номерами.

Розглянемо другий диференціал $d^2 f(x_0)$ двічі диференційованої в точці $x_0 \in D_f$ функції f, який є симетричною квадратичною формою, коефіцієнти якої утворюють квадратну матрицю

$$A_f = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_1 \partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_1 \partial x_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_m \partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix}$$

з кутовими мінорами

$$A_1 = \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_1^2}, A_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_1^2} \end{vmatrix}, \dots, A_m = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_1 \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_1 \partial x_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_m \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_n \partial x_n} \end{vmatrix}.$$

Теорема 19. *(достатня умова локального екстремума)*

Якщо функція $f: R^m \to R$ двічі диференційована в точці $x_0 \in \operatorname{int} D_f$ та $\forall j = \overline{1,m}$ $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) = 0$. Тоді

- якщо $d^2 f(x_0)$ – додатно визначена квадратична форма, то функція f має строгий локальний мінімум в точці x_0;
- якщо $d^2 f(x_0)$ – від'ємно визначена квадратична форма, то функція f має строгий локальний максимум в точці x_0;
- якщо $d^2 f(x_0)$ – знакозмінна квадратична форма, то функція f не має локального екстремума в точці x_0.

Теорема 20. *(критерій Сільвестра)*

Квадратична форма $R^m \xrightarrow{K} R$, що відповідає симетричній матриці $A = (\alpha_{ij})_{i,j=\overline{1,m}}$ є:

- додатно визначеною тоді і тільки тоді, коли усі кутові мінори матриці A додатні;
- від'ємно визначеною тоді і тільки тоді, коли знаки кутових мінорів матриці A змінюються строго по черзі, починаючи з $\alpha_{11} < 0$;
- знакозмінною, якщо усі кутові мінори ненульові і не справджуються умови попередніх двох пунктів.

Зауважимо, що остання умова знакозмінності квадратичної форми, є лише достатнім, а не критерієм, як для випадків додатно та від'ємно визначених квадратичних форм.

Поєднуючи останні дві теореми робимо висновок, що двічі диференційована в точці $x_0 \in \operatorname{int} D_f$ функція $f: R^m \to R$ має в цій точці:

- строгий локальний мінімум тоді і тільки тоді, коли $A_j > 0 \ \forall j = \overline{1,m}$;
- має строгий локальний максимум тоді і тільки тоді, коли $A_j = (-1)^j \ \forall j = \overline{1,m}$.

Нехай функції $f, g_k: R^m \to R$, $k = \overline{1,r}$, $r < m$ визначені в точці $x_0 \in R^m$ та задовольняють рівності $g_k(x_0) = 0$, $k = \overline{1,r}$. Число $f(x_0)$ називається ***<u>умовним локальним максимумом</u>*** (***<u>мінімумом</u>***) функції f, якщо існує такий окіл $O(x_0) \subset R^m$, що $f(x_0)$ є найбільшим (найменшим) значенням звуження функції f на множину $D_f \cap O(x_0) \cap \{x \in R^m \mid g_k(x) = 0, k = \overline{1,r}\}$. Аналогічно визначаються ***нестрогі умовні локальні екстремуми***.

Теорема 21. *(необхідна умова умовного екстремума)*

Нехай функції $f, g_k: R^m \to R$, $k = \overline{1,r}$, задовольняють умови:

1) вони неперервно диференційовані в деякому околі $O(x_0)$;

2) ранг матриці Якобі відображення

$$g = (g_1, \dots, g_r): (x_1, \dots, x_m) \mapsto \big(g_1(x_1, \dots, x_m), \dots, g_r(x_1, \dots, x_m)\big)$$

в точці x_0 дорівнює r;

3) функція f має умовний екстремум в точці x_0.

Тоді існують такі числа $\lambda_1, \dots, \lambda_r$, що функція

$$F = f + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k g_k,$$

яка називається ***функцією Лагранжа***, задовольняє умовам $\frac{\partial F}{\partial x_j}(x_0)$, $j = \overline{1,m}$, тобто

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(x_0) + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial x_j}(x_0) = 0, j = \overline{1,m}.$$

Таким чином для знаходження шуканої точки x_0 та r невідомих параметрів $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ треба розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_j}(x_0) = 0, j = \overline{1,m}, \\ g_k(x_0) = 0, k = \overline{1,r}. \end{cases}$$

Теорема 22. *(достатня умова умовного екстремума)*

Нехай функції $f, g_k: R^m \to R$, $k = \overline{1,r}$, задовольняють умови:

1) функції f, g_k, $k = \overline{1,r}$ двічі неперервно диференційовані в деякому околі $O(x_0)$ точки $x_0 \in R^m$;

2) $g_k(x_0) = 0 \ \forall k = \overline{1,r}$;

3) ранг матриці Якобі відображення

$$g = (g_1, \dots, g_r): (x_1, \dots, x_m) \mapsto \big(g_1(x_1, \dots, x_m), \dots, g_r(x_1, \dots, x_m)\big)$$

в точці x_0 дорівнює r, при цьому вважатимемо, що визначник матиці $\left(\frac{\partial g_k}{\partial x_{m-r+j}}(x_0)\right)_{k,j=\overline{1,r}}$ не дорівнює нулю;

4) для деякого набору чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ справджуються необхідна умова екстремуму в точці x_0, тобто $\frac{\partial F}{\partial x_j}(x_0) = 0, j = \overline{1,m}$, де $F = f + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k g_k$ – функція Лагранжа.

Нехай також квадратична форма

$$K(h_1, \dots, h_{m-r}) = \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 F(x_0)}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j,$$

де $R^{m-r} \xrightarrow{K} R$ та змінні $h_{m-r+1}, \dots, h_m$ визначають через змінні $h_1, \dots, h_{m-r}$ з системи рівнянь

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial g_k(x_0)}{\partial x_i} h_i = 0, j = \overline{1,r}.$$

Тоді якщо квадратична форма $K(h_1, \dots, h_{m-r})$:

- додатно визначена, то функція f має строгий умовний локальний мінімум у точці x_0;
- від'ємно визначена, то функція f має строгий умовний локальний максимум у точці x_0;
- знакозмінна, то функція f не має умовного локального екстремума в точці x_0.

Задачі

В задачах в ЛНП R^2 та R^3 замість позначень змінних $x = (x_1, x_2)$ та $x = (x_1, x_2, x_3)$ будемо вживати більш звичні $P = (x, y)$ та $P = (x, y, z)$, якщо то не буде викликати непорозумінь.

74. Доведіть твердження:

1) якщо квадратична форма з матрицею A додатно визначена, то й квадратична форма з матрицею A^{-1} також додатно визначена;

2) для того, щоб квадратична форма з матрицею A була невід'ємно визначеною:

а) необхідно і достатньо, щоб усі головні мінори матриці A були невід'ємними;

б) недостатньо, щоб усі кутові мінори матриці A були невід'ємними;

3) для композиції двох квадратичних форм K_1 з матрицею $\left(\alpha_{ij}\right)_{i,j=\overline{1,m}}$ та K_2 з матрицею $\left(b_{ij}\right)_{i,j=\overline{1,m}}$, тобто квадратичної форми K з матрицею $\left(\alpha_{ij}b_{ij}\right)_{i,j=\overline{1,m}}$ мають місце властивості:

а) якщо K_1 та K_2 – невід'ємно визначені квадратичні форми, то й K – невід'ємно визначена квадратична форма;

б) якщо K_1 та K_2 – додатно визначені квадратичні форми, то й K – додатно визначена квадратична форма;

4) для квадратичної форми K з матрицею A назвемо *дискримінантом квадратичної форми* D_K визначник матриці A, тоді:

а) якщо до додатно визначеної квадратичної форми K додати квадрат ненульової лінійної форми від тих саме змінних, то дискримінант отриманої квадратичної форми збільшиться;

б) якщо $K(x) = \sum_{i,j=1}^{m} \alpha_{ij}x_i x_j -$ додатно визначена квадратична форма та $Q(x_2, x_3, \dots, x_m) = K(0, x_2, x_3, \dots, x_m)$, то справджується нерівність: $D_K \le \alpha_{11} D_Q$;

в) якщо K – невід'ємно визначена квадратична форма та існує точка $x_0 \neq \theta$, для якої $K(x_0) = 0$, то $D_K = 0$;

75. Знайдіть усі можливі значення λ, для яких наведені квадратичні форми є:

1) додатно визначеними, де:

а) $5x^2 + y^2 + \lambda z^2 + 4xy - 2xz - 2yz$;

б) $2x^2 + y^2 + 3z^2 + 2\lambda xy + 2xz$;

в) $x^2 + y^2 + 5z^2 + 2\lambda xy - 2xz + 4yz$;

2) додатно визначеними, де:

а) $-x^2 + \lambda y^2 - z^2 + 4xy + 8yz$;

б) $\lambda x^2 - 2y^2 - 3z^2 + 2xy - 2xz + 2yz$;

76. Дослідить на екстремум на області визначення функцію $z\colon (x, y) \mapsto z(x, y)$, якщо:

1) $z(x, y) = (x-1)^2 + (y-2)^2$;

2) $z(x, y) = x^2 - y^2$;

3) $z(x, y) = 4(x - y) - x^2 - y^2$;

4) $z(x, y) = (x+1)^2 - 2(y+2)^2$;

5) $z(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 3x - 6y$;

6) $z(x, y) = x^2 + 2xy + 3y^2 - 4x$;

7) $z(x,y)=\dfrac{x}{y}+\dfrac{1}{x}+y$; 8) $z(x,y)=xy+\dfrac{1}{2(x+y)}$;

9) $z(x,y)=xy+\dfrac{50}{x}+\dfrac{20}{y}$; 10) $z(x,y)=x^3-3xy+y^3$;

11) $z(x,y)=x^2-2xy+4y^3$;

12) $z(x,y)=(2x-x^2)(2y-y^2)$;

13) $z(x,y)=\sqrt{(1-x)(1-y)(x+y-1)}$;

14) $z(x,y)=x\sqrt{1+y}+y\sqrt{1+x}$; ***15)*** $z(x,y)=\mathrm{e}^{2x}(x+y^2+2y)$;

16) $z(x,y)=x^2+2xy+3y^2-\ln x-\ln y$;

17) $z(x,y)=xy\ln(x^2+y^2)$; ***18)*** $z(x,y)=(x+2y)\mathrm{e}^{-x^2+y^2}$;

19) $z(x,y)=x-2y+\ln\sqrt{x^2+y^2}+3\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$;

20) $z(x,y)=(1+\mathrm{e}^y)\cos x-y\mathrm{e}^y$;

21) $z(x,y)=\sin x+\sin y+\sin(x+y)$;

22) $z(x,y)=x+y+4\sin x\sin y$;

23) $z(x,y)=\frac{1}{5}(x^5-y^5)+x^4-2y^4-\frac{5}{3}x^3-4y^3-3x^2+6y^2-x+9y$;

24) $z(x,y)=x^4+y^4-2x^2-2y^2+4xy$;

25) $z(x,y)=x^4+y^4+2x^2+2y^2+4xy$;

26) $z(x,y)=3x^2y-x^3-y^4$; ***27)*** $z(x,y)=x^3-2x^2y^2+y^4$;

28) $z(x,y)=(x-y^2)(2x-y^2)$; ***29)*** $z(x,y)=x^3-3xy^2$;

30) $z(x,y)=(x^2-4y^2+2x)^2$; ***31)*** $z(x,y)=x^2y(4-y)$;

32) $z(x,y)=x^4y^2(5-x-y)$; ***33)*** $z(x,y)=xy^3(2+x-y)$;

34) $z(x,y)=y^6(10-x)$; ***35)*** $z(x,y)=xy^4(1+x-y)$;

36) $z(x,y)=\dfrac{x^2+6xy+3y^2}{x^2-xy+y^2}$; 37) $z(x,y)=y^2\left(\sin x-\dfrac{y}{2}\right)$;

77. Дослідить на екстремум на області визначення функцію $f\colon(x,y,z)\mapsto z(x,y,z)$, якщо:

1) $f(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2-2x-4y-6z$;

2) $f(x,y,z)=x^2+y^2+3z^2+12xy+2z$;

3) $f(x,y,z)=2x^2+y^2+2z-xy-xz$;

4) $f(x,y,z)=xy+xz$;

5) $f(x,y,z)=xy+yz+zx$;

6) $f(x,y,z)=x^2+y^2-z^2$;

7) $f(x,y,z)=(x-y)^2-(y-z)^2$;

8) $z(x,y)=x+\dfrac{y^2}{4x}+\dfrac{z^2}{y}+\dfrac{2}{z}$;

9) $z(x,y)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{z}+z^2$;

10) $f(x,y,z)=x^3+y^2+2z^2+xy-2xz+3y$;

11) $f(x,y,z)=2x^2+y^3+z^2+2xz-yz-y$;

12) $z(x,y)=\dfrac{2x^2}{y}+\dfrac{y^2}{z}-4x+2z^2$;
13) $f(x,y,z)=x^4+y^4+z^4-8(x^2+y^2+z^2)$;
14) $f(x,y,z)=3\ln x+2\ln y+5\ln z-\ln(22-x-y-z)$;
15) $f(x,y,z)=(x+y)^2-(2x-3z)^2$;
16) $f(x,y,z)=(x-2y+3)^2+(2x-z)^2$;
17) $f(x,y,z)=(x-y)^2+(y+z)^2+(x+z)^2$;
18) $f(x,y,z)=\dfrac{x^3+y^3+z^3}{xyz}, x>0, y>0, z>0$;
19) $f(x,y,z)=\dfrac{x}{y+z}+\dfrac{y}{x+z}+\dfrac{z}{x+y}+z^2$;
20) $f(x,y,z)=xy^2z^3(7-x-2y-3z)$;
21) $f(x,y,z)=xy^2z^4(8-x-2y-4z)$;
22) $f(x,y,z)=xyz(1-x-y-z)$;
23) $f(x,y,z)=xy^3z^5(10-x-3y-5z)$;
24) $f(x,y,z)=xyz(1-x-y-z)$;
25) $f(x,y,z)=x^2y^2z^4(4-y-2z)$;
26) $f(x,y,z)=yz^4(4-x-2y)$;
27) $f(x,y,z)=\frac{y^5-z^5}{5}+\frac{x^4+8y^4-4z^4}{4}+\frac{-6x^3+10y^3+10z^3}{3}+\frac{11x^2-24y^2+28z^2}{2}-6x+5y+15z$;

78. Дослідить на екстремум на області визначення функцію $y\colon (x_1,\dots,x_m)\mapsto y(x_1,\dots,x_m)$, якщо:

1) $y(x_1,x_2,\dots,x_m)=x_1\cdot x_2^2\cdot\ldots\cdot x_m^m\cdot\left(1-\sum\limits_{k=1}^{m}kx_k\right), x_k>0, k=\overline{1,m}$;

2) $y(x_1,x_2,\dots,x_m)=x_1+\sum\limits_{k=1}^{m-1}\dfrac{x_{k+1}}{x_k}+\dfrac{2}{x_m}, x_k>0, k=\overline{1,m}$;

3) $y(x_1,x_2,\dots,x_m)=\mathrm{e}^{-\sum_{k=1}^{m}x_k^2}\cdot\sum\limits_{k=1}^{m}kx_k$;

79. Дослідить функцію $z\colon (x,y)\mapsto z(x,y)$ на екстремум в точці $O(0,0)$ та перевірте виконання в цій точці необхідних та достатніх умов екстремума, якщо:

1) $z(x,y)=x+y+\sqrt{(2x+2y-x^2-y^2)^3}$;
2) $z(x,y)=\sqrt{2x^2+2y^2-x^4-y^4}$;
3) $z(x,y)=\sqrt[3]{x^4+y^4}$;
4) $z(x,y)=x^2y^2$;
5) $z(x,y)=x^2+y^3$;
6) $z(x,y)=(x-y)^2+y^3$;
7) $z(x,y)=x+y+\sqrt{(y^2-3xy+2x^2)^5}+x^2+y^2$;

$$8)\ f(x,y)=\begin{cases}-\sqrt[3]{x^4y^4}\cdot\dfrac{x+y}{x^2+y^2}+x^2+y^2, (x,y)\neq(0,0),\\ 0, \qquad\qquad (x,y)=(0,0);\end{cases}$$

80. Чи існує функція $R^2 \xrightarrow{f} R$, що неперервна на R^2 та має такі властивості:

1) має нескінченну кількість локальних мінімумів та жодного, навіть не строгого, локального максимуму;

2) не має навіть нестрогого локального мінімуму в точці $O(0,0)$, але на кожній прямій, що проходить через точку $O(0,0)$, функція має строгий локальний мінімум;

3) функція має вздовж однієї прямої, що проходить через точку $O(0,0)$ строгий локальний мінімум, а усіх інших прямих, що проходить через точку $O(0,0)$, функція має строгий локальний максимум;

81. Для функції $z\colon (x,y)\mapsto z(x,y)$, що задана неявно рівнянням $F(x,y;z)=0$, де $F\colon R^3\to R$, знайдіть точку $M(x_0,y_0;\,z_0)\in D_F$, для якої в деякому околі $O\big((x_0,y_0)\big)$ точки (x_0,y_0) функція $z(x,y)$ має локальний екстремум, якщо:

1) $F(x,y;z)=x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-10$;

2) $F(x,y;z)=z-2xy+3x^2+2z^2-10$;

3) $F(x,y;z)=6(x^2+y^2+z^2)+4x-8y-8z+5$;

4) $F(x,y;z)=3(x^2+y^2+z^2)-2xy-2xz-2yz-72$;

5) $F(x,y;z)=2x^2+2y^2+z^2+8xz-z+8$;

6) $F(x,y;z)=x^2+y^2+z^2-xz-yz+2(x+y+z-1)$;

7) $F(x,y;z)=(x^2+y^2+z^2)^2-x^2-y^2+z^2$;

8) $F(x,y;z)=x^4+y^4+z^4-2(x^2+y^2+z^2)$;

9) $F(x,y;z)=z\mathrm{e}^{2x^2-y^2+z^2}$;

10) $f(x,y)=\dfrac{\mathrm{e}}{y^2+z^2+1}-\ln(2+x^2+y^2+z^2+2x)$;

82. Дослідить на умовний екстремум функцію $f\colon R^m\to R$, що задовольняють умови $g_j(x_1,\dots,x_m)=0$, де $g_j\colon R^m\to R$, $j=\overline{1,r}$, якщо:

1) $m=2, r=1$ та

а) $f(x,y)=-x^2-y^2$, $g_1(x,y)=x+y-2$;

б) $f(x,y)=x^2+y^2$, $g_1(x,y)=\frac{x}{2}+\frac{y}{5}-1$;

в) $f(x,y)=2x^3+y^2$, $g_1(x,y)=x^2+y-1$;

г) $f(x,y)=2x^2+y^2-2xy$, $g_1(x,y)=x^2+y-1$;

д) $f(x,y)=x-y$, $g_1(x,y)=x^2+y^2-18$;

е) $f(x,y)=\cos^2 x+\cos^2 y$, $g_1(x,y)=x=y-\frac{\pi}{4}$;

є) $f(x,y)=x+y$, $g_1(x,y)=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}-2$;

ж) $f(x,y)=x^p+y^p$, $g_1(x,y)=x+y-2$, $x,y,p>0$;

2) $m=3, r=1$ та

а) $f(x,y,z)=x-2y+3z,\ g_1(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-14;$

б) $f(x,y,z)=x+y+z,\ g_1(x,y,z)=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-1;$

в) $f(x,y,z)=xyz,\ g_1(x,y,z)=x+y+z-15;$

г) $f(x,y,z)=xyz,\ g_1(x,y,z)=xy+yz+zx-12;$

д) $f(x,y,z)=xyz,\ g_1(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-3;$

е) $f(x,y,z)=x^2+5y^2+4z^2+4yz+12zx+2xy,$
$g_1(x,y,z)=x^2+y^2+4z^2-24;$

є) $f(x,y,z)=\sin x\sin y\sin z,\ g_1(x,y,z)=x+y+z-\frac{\pi}{2};$

ж) $f(x,y,z)=xy^2z^3,\ g_1(x,y,z)=x+2y+3z-6;$

з) $f(x,y,z)=x^my^nz^p,\ g_1(x,y,z)=x+y+z-6,\ x,y,z,m,n,p>0;$

и) $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2,\ g_1(x,y,z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1,\ a,b,c>0;$

3) $m=3,\ r=2$ та

а) $f(x,y,z)=x+y+z^2,\ g_1(x,y,z)=z-x-1,$
$g_2(x,y,z)=y-xz-1;$

б) $f(x,y,z)=xy+yz,\ g_1(x,y,z)=x^2+y^2-2,$
$g_2(x,y,z)=y+z-2;$

в) $f(x,y,z)=\frac{1}{4}x^2+y^2+\frac{1}{2}z^2,\ g_1(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-14,$
$g_2(x,y,z)=x+2y+3z;$

г) $f(x,y,z)=xyz,\ g_1(x,y,z)=xy+yz+zx-12,$
$g_2(x,y,z)=x+y+z-6;$

д) $f(x,y,z)=xyz,\ g_1(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-3,$
$g_2(x,y,z)=xy+yz+zx-3;$

ж) $f(x,y,z)=x+y-z,\ g_1(x,y,z)=x+y-1,$
$g_2(x,y,z)=4(x^3+y^3+z^3)+12(x+y+z)-13;$

з) $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2,\ g_1(x,y,z)=x+y+2z,$
$g_2(x,y,z)=(x^2+y^2+z^2)^2-5(2x^2+y^2+z^2);$

и) $f(x,y,z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2},\ g_1(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-27,$
$g_2(x,y,z)=\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}-1;$

4) $m\in N,\ r=1$ та

а) $f(x_1,\dots,x_m)=\sum_{i=1}^{m}x_i^2,\ g_1(x_1,\dots,x_m)=\sum_{i=1}^{m}ix_i-1;$

б) $f(x_1,\dots,x_m)=\sum_{i=1}^{m}x_i^p,\ g_1(x_1,\dots,x_m)=\sum_{i=1}^{m}x_i-1,p>0;$

в) $f(x_1,\dots,x_m)=\sum_{i=1}^{m}\frac{a_i}{x_i},\ g_1(x_1,\dots,x_m)=\sum_{i=1}^{m}b_ix_i-1,$
$x_i,a_i,b_i>0,i=\overline{1,m};$

г) $f(x_1,\dots,x_m)=\prod_{i=1}^{m}x_i^{\alpha_i},\ g_1(x_1,\dots,x_m)=\sum_{i=1}^{m}x_i-1,$

$x_i, \alpha_i > 0, i = \overline{1,m}$;

83. Дослідить функцію $f: R^m \to R$, що задовольняють умови $g_j(x_1, \dots, x_m) = 0$, де $g_j: R^m \to R$, $j = \overline{1,r}$ на умовний екстремум в точці $O(0, \dots, 0) \in R^m$ та перевірте виконання в цій точці необхідних та достатніх умов умовного екстремума, якщо:

2) $m = 2, r = 1$ та

а) $f(x,y) = xy$, $g_1(x,y) = x^4 + y^4 - x^5 - y^5$;

б) $f(x,y) = -x^2 + 3y^2 - xy$, $g_1(x,y) = x - y$;

в) $f(x,y) = x^2 + y^2$, $g_1(x,y) = x^2 - y^3$;

г) $f(x,y) = x^3 + y^3$, $g_1(x,y) = x - y$;

2) $m = 3, r = 1$ та

а) $f(x,y,z) = x + y^2 + z^2$,
$g_1(x,y,z) = 2x^2 - 2xz^2 - 2xy^2 + y^4 + z^4$;

б) $f(x,y,z) = (z^2 - z + 1)(2y + x) + \sqrt{(y-x)^5}$,
$g_1(x,y,z) = 2x + y - z^2$;

в) $f(x,y,z) = x^4 + y^4 + z^2$, $g_1(x,y,z) = x + y - z$;

г) $f(x,y,z) = 2x^2 - 2y^2 + \sqrt{(z^2 - 3xz - 3yz + (x+y)^2)^7}$,
$g_1(x,y,z) = 2x + y - z^2$;

д) $f(x,y,z) = x^4 - z^2 + \sqrt{(z^2 - 3xz - 3yz + (x+y)^2)^7}$,
$g_1(x,y,z) = 2x + y - z^2$;

84. Для множини $D \subset R^m$ та функції $D \xrightarrow{f} R$ знайдіть на множина $\overline{R}$ величини $A = \sup\limits_{x \in D} f(x)$, $a = \inf\limits_{x \in D} f(x)$ та величини $B = \max\limits_{x \in D} f(x)$, $b = \min\limits_{x \in D} f(x)$, якщо вони існують, де :

1) $m = 2, f(x,y) = x + y + x^2$ та
$D = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, 0 \le x + y \le 1\}$;

2) $m = 2, f(x,y) = x^2 + y^2 - 12x + 6y$ та:

а) $D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le 5\}$; ***б)*** $D = [0,1] \times [0,1]$;

3) $m = 2, f(x,y) = x^2 - y^2$ та:

а) $D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le 4\}$; ***б)*** $D = \{(x,y) \mid \sqrt{x-y} \le 1\}$;

4) $m = 2, f(x,y) = (2x^2 + 3y^2)\mathrm{e}^{-x^2-y^2}$ та:

а) $D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le 1\}$; ***б)*** $D = [0,2] \times [0,3]$;

5) $m = 2, f(x,y) = x^2 + 2xy - 4x + 8y$ та:

а) $D = \{(x,y) \mid |x| + |y| \le 2\}$; ***б)*** $D = \{(x,y) \mid \sqrt{x} + \sqrt{y} \le 2\}$;

6) $m = 2, f(x,y) = x^2 y(4 - x - y)$ та:

а) $D = \{\{(x,y) \mid x \ge 0, y \ge 0, x + y \le 6\}$;

б) $D = \{(x,y) \mid x \ge 0, y \ge 0, xy \le 1\}$;

7) $m = 2, f(x,y) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ та:

а) $D = \{(x,y) \mid 0 < x^2 + y^2 \le 5\}$;

б) $D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 - 2x + 2y + 1 \le 0\}$;

8) $m = 2$, $f(x,y) = xy\mathrm{e}^{-x^2-y}$ та:

а) $D = \{(x,y) \mid x \ge 0, y \ge 0\}$;

б) $D = \{(x,y) \mid -1 \le x \le 2, -2 \le y \le 1\}$;

9) $m = 3$, $D = \{(x,y,z) \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, 0 \le z \le 1\}$ та:

а) $f(x,y,z) = x + y + z$; ***б)*** $f(x,y,z) = xy + yz$;

в) $f(x,y,z) = (z+1)^2 - y^2 - z^2$;

10) $m = 3$, $D = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \le 1\}$ та

а) $f(x,y,z) = x^3 - yz$; ***б)*** $f(x,y,z) = xy + yz$;

в) $f(x,y,z) = x^2 - y^2 + 2z^2$; ***г)*** $f(x,y,z) = y - zx$;

д) $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$; ***е)*** $f(x,y,z) = xyz$;

11) $m = 3$, $D = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 \le z^2 \le 4\}$ та

а) $f(x,y,z) = x^3 - yz$; ***б)*** $f(x,y,z) = xy + yz$;

в) $f(x,y,z) = y^2 + 2xz$; ***г)*** $f(x,y,z) = xyz$;

12) $m = 3$, $D = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 \le 9, -1 \le z \le 2\}$ та

а) $f(x,y,z) = x - 2y$; ***б)*** $f(x,y,z) = xz - z^2 + y$;

в) $f(x,y,z) = xy - zx$; ***г)*** $f(x,y,z) = xyz$;

д) $f(x,y,z) = x^3 + zy$; ***е)*** $f(x,y,z) = x + 2y + z$;

13) $m = 3$, $D = \{(x,y,z) \mid x > 0, y > 0, z > 0\}$ та

а) $f(x,y,z) = (x+y+z)\mathrm{e}^{-x-2y-3z}$;

б) $f(x,y,z) = \dfrac{x+y-z}{1+x^2+y^2+z^2}$;

85. Впишіть в тривимірне тіло D тривимірне тіло T максимального об'єму, якщо:

1) D – куля радіуса R та

а) T – циліндр; ***б)*** T – конус;

в) T – правильна трикутна піраміда;

г) T – правильна чотирикутна піраміда;

д) T – прямокутний паралелепіпед;

2) D – півкуля радіуса R та

а) T – циліндр з основою на основі півкулі;

б) T – конус з основою на основі півкулі;

в) T – правильна трикутна піраміда з основою на основі півкулі;

г) T – правильна чотирикутна піраміда з основою на основі півкулі;

д) T – прямокутний паралелепіпед з гранню на основі півкулі;

3) D – конус з висотою H, радіусом основи R та

а) T – циліндр з основою на основі конуса;

б) T – правильна трикутна піраміда з основою на основі конуса;

в) T – правильна чотирикутна піраміда з основою на основі півкулі;

г) T – прямокутний паралелепіпед з гранню на основі конуса;

86. Опишіть навколо тривимірного тіла D тривимірне тіло T мінімального об'єму, якщо:

1) D – куля радіуса R та

а) T – циліндр; ***б)*** T – конус;
в) T – правильна трикутна піраміда;
г) T – правильна чотирикутна піраміда;
д) T – прямокутний паралелепіпед;

2) D – циліндр з висотою H, радіусом основи R та
а) T – конус з основою в площині основи циліндра;
б) T – правильна трикутна піраміда з основою в площині основи циліндра;
в) T – правильна чотирикутна піраміда з основою в площині основи циліндра;

87. Тривимірне тіло D має площу поверхні S, який максимальний об'єм може мати це тіло, якщо:

1) D – циліндр; ***2)*** D – конус;
3) D – прямокутний паралелепіпед;
4) D – правильна чотирикутна піраміда;
5) D – правильна трикутна піраміда;
6) D – правильна чотирикутна піраміда;
7) D – «олівець», тобто тіло, в якому циліндр завершується конусом;

88. Знайдіть відстань між множинами A та B в просторі R^m, якщо:

1) $m = 2$, $A = \{(0,0)\}$ та:
а) $B = \{(x,y) \mid x^3 + y^2 - 2y - 2x = 3\}$;
б) $B = \{(x,y) \mid 3y^2 - x^2 \le 2\}$;
в) $B = \{(x,y) \mid y = x^2 - 6x + 6\}$;

2) $m = 2$ та:
а) $A = \{(x,y) \mid y = x^2\}$ і $B = \{(x,y) \mid y = 2 - x\}$;
б) $A = \{(x,y) \mid y = -x^2 + 6x - 10\}$ і
$B = \{(x,y) \mid y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 21\}$;
в) $A = \{(x,y) \mid y = x^2 + 2x + 2\}$ і $B = \{(x,y) \mid y = -x^2 + 10x - 24\}$;

3) $m = 3$, $A = \{(0,0,0)\}$ та:
а) $B = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 4x + 6z + 4 \le 0\}$;
а) $B = \{(x,y,z) \mid x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2x - 4y - 6z = 5\}$;
а) $B = \{(x,y,z) \mid (x-2)^2 + (y-2)^2 \le (z+1)^2, -1 \le z \le 1\}$;

4) $m = 3$ та:
а) $B = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y + 2z + 5 = 0\}$ і
$B = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 - 4y - 6x - 2z + 10 \le 0\}$;
а) $A = \{(x,y,z) \mid x^2 + (y-2)^2 = z^2, 0 \le z \le 2\}$ і
$B = \{(x,y,z) \mid (x-2)^2 + y^2 = 1, -2 \le z \le 0\}$;

89. Доведіть нерівності, використовуючи властивості екстремумів ФБЗ:

1) $\left(\frac{x^n + y^n}{2}\right)^k \ge \left(\frac{x^k + y^k}{2}\right)^n$, де $n \ge k > 0, x, y \ge 0$;

2) $\sum_{i=1}^{m} x_i y_i \le \left(\sum_{i=1}^{m} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{m} y_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$, де $x_i, y_i \ge 0, i = \overline{1,m}$, $p > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$;

3) $(\det A)^2 \le \prod_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} a_{ij}^2$, де $A = \left(\alpha_{ij}\right)_{i,j=\overline{1,m}}$;

4) якщо $x_i \ge 0, i = \overline{1,m}$ та $\sum_{j=1}^{m} x_i = ma$, то:

а) $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=i}^{m} x_i x_j \le \frac{m(m-1)a^2}{2}$;

б) $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=i}^{m} \sum_{k=j}^{m} x_i x_j x_k \le \frac{m(m-1)(m-2)a^3}{6}$;

Розділ 5.9. Диференційовані відображення

Короткі теоретичні відомості

Нехай визначені два ЛНП E та F з нормами $\|\cdot\|_E$ та $\|\cdot\|_F$ відповідно, $G \subset E$ – відкрита множина. Кажуть, що відображення $G \xrightarrow{f_1} F$ та $G \xrightarrow{f_2} F$ ***дотикаються одне одного*** в точці $x_0 \in G$, якщо справджується рівність:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\|f_1(x) - f_1(x_0)\|_E}{\|x - x_0\|_F} = 0.$$

Серед усіх відображень, що дотичні до відображення $G \xrightarrow{f} F$ в точці $x_0 \in G$ окремо виділимо ***афінне відображення***, тобто відображення вигляду $g: x \mapsto f(x_0) + L(x - x_0)$, $x \in G$, де $E \xrightarrow{L} F$ – лінійне відображення.

Теорема 23. *(про афінне дотичне відображення)*

Серед усіх відображень, що дотичні до відображення $G \xrightarrow{f} F$ в точці $x_0 \in G$, існує не більше одного афінного відображення вигляду $g: x \mapsto f(x_0) + L(x - x_0)$, $x \in G$.

Наслідок. *(про лінійне дотичне відображення)*

Серед усіх відображень, що дотичні до відображення $x \mapsto f(x) - f(x_0)$ в точці $x_0 \in G$, існує не більше одного лінійного відображення $x \mapsto L(x - x_0)$, $x \in E$.

Відображення $G \xrightarrow{f} F$ називається ***диференційованим в точці*** $x_0 \in G$, якщо існує таке лінійне відображення $E \xrightarrow{L} F$, для якого відображення $x \mapsto f(x_0) + L(x - x_0)$ є дотичним до f в точці x_0, тобто

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\|f(x) - f(x_0) - L(x - x_0)\|_E}{\|x - x_0\|_F} = 0.$$

Останню рівність часто записують таким чином:

$$\|f(x) - f(x_0) - L(x - x_0)\|_E = o(\|x - x_0\|_F), x \to x_0.$$

Якщо відображення $G \xrightarrow{f} F$, диференційована в точці $x_0 \in G$, де відкрита множина $G \subset E$, то лінійне відображення L називають ***диференціалом відображення*** f в цій точці і позначають символом $df(x_0)$. Таким чином $\forall h \in E\ df(x_0)(h) = Lh$.
Функцію $f: E \to F$ називають ***диференційованою на множині*** $G \subset E$, якщо вона диференційована в кожній точці цієї множини.

Нехай функція $G \xrightarrow{f} F$, диференційована в точці $x_0 \in G$, де $G \subset E$ – відкрита множина, L – його диференціал в цій точці. Покладемо:

$$\alpha(x, x_0) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(x_0) - L(x - x_0)}{\|x - x_0\|_E}, x \neq x_0, \\ 0, \quad x = x_0. \end{cases}$$

Тоді приріст диференційованої в точці x_0 функції $G \xrightarrow{f} F$ набуває вигляду:

$$f(x) - f(x_0) = L(x - x_0) + \alpha(x, x_0) \cdot \|x - x_0\|_E,$$

де $\alpha(x, x_0) \to \theta$ при $x \to x_0$ та $\alpha(x_0, x_0) = \theta$.

Задачі

90. Які з відображень $E^2 \xrightarrow{T} R$, де E – ЛНП, є білінійними, симетричними білінійними формами, якщо:

1) E – лінійний простір матриць $m \times 1$ та $\forall A, B \in E$, A^* – транспонована матриця, AB – добуток матриць та:

а) $T(A,B) = A^*B$; ***б)*** $T(A,B) = AB^*$;

2) E – лінійний простір матриць $m \times m$ та $\forall A, B \in E$, $\det A$ – визначник матриці A, $\mathrm{tr}\, A$ – слід матриці A, тобто сума її діагональних елементів, та:

а) $T(A,B) = \det A \cdot \det B$; ***б)*** $T(A,B) = \det(AB)$;

в) $T(A,B) = \mathrm{tr}\ (AB)$; ***г)*** $T(A,B) = \mathrm{tr}\ (AB - BA)$;

д) $T(A,B) = \mathrm{tr}\ (A + B)$; ***е)*** $T(A,B) = \mathrm{tr}\ (AB^*)$;

3) $E = C$ – множина комплексних чисел та $\forall z_1, z_2 \in E$:

а) $T(z_1, z_2) = \mathrm{Re}(\, z_1 z_2)$; ***б)*** $T(z_1, z_2) = \mathrm{Re}(\, z_1 \overline{z_2})$;

в) $T(z_1, z_2) = \mathrm{Im}(\, z_1 z_2)$; ***г)*** $T(z_1, z_2) = \mathrm{Im}(\, z_1 \overline{z_2})$;

д) $T(z_1, z_2) = |z_1 z_2|$; ***е)*** $T(z_1, z_2) = |z_1 + z_2|$;

4) $E = R[0,1]$ та $\forall f, g \in E$:

а) $T(f,g) = \int\limits_0^1 f(t)g(t)\mathrm{dt}$;

б) $T(f,g) = \int\limits_0^1 tf(t)g(t)\mathrm{dt}$;

в) $T(f,g) = \int\limits_0^1 f(t)g(t)\ln(1+t)\,\mathrm{dt}$;

г) $T(f,g) = \int\limits_0^1 \big(f(t) + g(t)\big)^2 \mathrm{dt}$;

5) E – лінійний простір диференційованих на $[0,1]$ функцій, у яких $f(0) = g(0) = f(1) = g(1) = 0$ та $\forall f, g \in E$

а) $T(f,g) = \int\limits_0^1 f(t)g'(t)\mathrm{dt}$; б) $T(f,g) = \int\limits_0^1 f'(t)g(t)\mathrm{dt}$;

6) E – лінійний простір усіх многочленів, $\deg f$ – степінь многочлена та $\forall f, g \in E$

а) $T(f,g) = \deg(fg)$; ***б)*** $T(f,g) = \max\{\deg f\,, \deg g\}$;

91. З'ясуйте, чи будуть для ЛНП E та F дотичними в точці $x_0 \in E$ відображення $f_1, f_2, f_3 \colon E \to F$, якщо:

1) $E = C[0,1], F = R, x_0(t) = \theta, f_1 \colon x(t) \mapsto x(0)$,

$f_2: x(t) \mapsto \lim\limits_{n\to\infty} n\int\limits_0^{\frac{1}{n}} x(t)\mathrm{dt}, f_3: x(t) \mapsto \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\int\limits_0^{\frac{k}{n}} x(t)\mathrm{dt};$

2) $E = \mathrm{c}, F = R, x_0 = (1,1,1,\dots), f_1: x(t) \mapsto \|x\|,$

$f_2: x = (x_1, x_2, x_3, \dots) \mapsto \lim\limits_{n\to\infty} x_n, f_3: x = (x_1, x_2, x_3, \dots) \mapsto \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} x_k;$

3) $E = F = R$, $x_0 = 0$, $f_1: x \mapsto |x|$, $f_2: x \mapsto x|x|$, $f_3: x \mapsto \operatorname{sgn} x$;

4) $E = R^3, F = R$, $x_0 = (0,0,0)$, $f_1: x \mapsto x + y^2 + z^3$, $f_2: x \mapsto x^2 + y^3 + z^4$, $f_3: x \mapsto 2x^2 + 3y^3 + 4z^4$;

92. З'ясуйте, чи існують для ЛНП E та F дотичне відображення в точці $x_0 \in E$ до відображення $S(x_0, r) \xrightarrow{f} F$, якщо:

1) $E = F = R$, $x_0 = 0$, $r = 1$ та:

а) $f: x \mapsto |x|$; б) $f(x) = \begin{cases} x^3 \sin\frac{1}{x}, x \neq 0, \\ 0, \ x = 0; \end{cases}$

в) $f(x) = \begin{cases} x\cos\frac{1}{x}, x \neq 0, \\ 0, \ x = 0; \end{cases}$ г) $f(x) = \begin{cases} 1, \ x \in Q, \\ 0, x \in R\backslash Q; \end{cases}$;

2) $E = F = C[0,1]$, $x_0(t) = \theta$, $r = 1$ та:

а) $f: x(t) \mapsto 1$; ***б)*** $f: x(t) \mapsto x(t)$;;

в) $f: x(t) \mapsto \int\limits_0^t x(u)\mathrm{du}$;

3) $E = C[0,1]$, $F = R$, $x_0(t) = t$, $r = 1$ та:

а) $f: x(t) \mapsto \|x\|$; ***б)*** $f: x(t) \mapsto \frac{1}{2}\big(x(0) + x(1)\big)$;

4) $E = R^3, F = R$, $x_0(0,0,0)$, $r = 1$ та:

а) $f: (x,y,z) \mapsto \sin(x^2 + yz)$; ***б)*** $f: (x,y,z) \mapsto x + y + z - 1$;;

в) $f: (x,y,z) \mapsto \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{y}, y \neq 0, \\ z, \ y = 0; \end{cases}$;

93. Доведіть твердження:

1) якщо E та F – ЛНП, відображення $f: E \to F$ диференційоване в деякій точці $x_0 \in E$, то воно неперервне в цій точці;

2) якщо E та F – банахові простори, $G \subset E$ – відкрита множина, відображення $G \xrightarrow{f_1} F$ та $G \xrightarrow{f_2} F$ диференційовані в точці $x_0 \in G$, то відображення $g_1 = \lambda f_1$ та $g_2 = f_1 + f_2$ також диференційовані в точці x_0, при цьому справджуються рівності:

$$dg_1(x_0) = \lambda df_1(x_0), dg_2(x_0) = df_1(x_0) + df_2(x_0);$$

3) нехай E_1, E_2 та E_3 – банахові простори, відображення $S(x_0,\varepsilon) \xrightarrow{f_1} E_2$, $S(x_0,\varepsilon) \subset E_1$ неперервно на $S(x_0,\varepsilon)$; відображення $S(y_0,\delta) \xrightarrow{f_2} E_3$, $y_0 = f_1(x_0)$, $S(y_0,\delta) \subset E_2$, неперервно на $S(y_0,\delta)$; якщо відображення f_1 – диференційоване в точці x_0, а відображення f_2 – диференційоване в точці y_0, то відображення $f_3 = f_2 \circ f_1$ – визначене та неперервно в деякому околі точки x_0, диференційоване в точці x_0 та $df_3(x_0) = df_2(y_0) \cdot df_1(x_0)$;
4) якщо E – ЛНП, то стале відображення $f: E \to R$, тобто $\exists a \in R: \forall x \in E$ $f(x) = a$, є диференційованим в кожній точці E та диференціалом його відображення є тотожне нулю відображення;
5) якщо E та F – банахові простори, $G \subset E$ – відкрита множина, то для усіх відображень $G \xrightarrow{f} F$ відношення «відображення f_1 та f_2 дотикаються одно одного» є відношенням еквівалентності;
6) якщо для функції $u \in C[a,b]$ функції $f: (x,u) \mapsto f\big(x,u(x)\big)$, $\frac{\partial f}{\partial x}: (x,u) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}\big(x,u(x)\big)$ – неперервні на множині $[a,b] \times R$, то для відображення $C[a,b] \xrightarrow{F} C[a,b]$, де $F: u(x) \mapsto f\big(x,u(x)\big)$ її диференціалом в точці $u_0 \in C[a,b]$ буде функція $dF(x_0): h(x) \mapsto f\big(x,u_0(x)\big)h(x)$, $h \in C[a,b]$.

94. Для ЛНП E та F знайдіть диференціал відображення $f: E \to F$ в точці $x_0 \in E$, якщо:

1) E – довільний гільбертів простір, $F = R$, x_0 – довільна точка з простору E та:

а) $f(x) = \langle x,x \rangle$; ***б)*** $f(x) = \|x\|$;

2) $E = F = C[0,\pi]$ та:

а) $f: x(t) \mapsto \sin x(t)$, $x_0(t) = \cos t$;

б) $f: x(t) \mapsto \cos x(t)$, $x_0(t) = \sin t$;

в) $f: x(t) \mapsto x(t) - \int\limits_0^\pi \cos\big(t + x(t)\big)\,\mathrm{dt}$, $x_0(t) = 0$;