КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

І. М. Александрович
А. В. Анікушин
О. К. Боярчук
О. І. Молодцов
Д. А. Номіровський
Б. В. Рубльов
В. В. Семенов

Збірник задач та вправ з математичного аналізу

Розділ 3 та розділ 4

Невизначений інтеграл, інтеграл Рімана

Навчальний посібник

УДК 517.13
ББК 22. 161
М 34

Рецензенти:

кандидат фіз.-мат. наук, доцент Нестеренко О. Н.
доктор фіз.-мат. наук, професор Карлова О. В.

Рекомендовано до друку вченою радою факультету кібернетики (протокол № ___ від ___ вересня 2023 року)

Збірник задач та вправ з математичного аналізу

М34 Збірник задач та вправ з математичного аналізу. Розділ 3 та розділ 4. Невизначений інтеграл та інтеграл Рімана / І.М. Александрович, А.В. Анікушин, О.К. Боярчук, О.І. Молодцов, Д.А. Номіровський, Б.В. Рубльов, В.В. Семенов. – К.: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2023. – 140 с.

ISBN

Посібник присвячено вивченню тих розділів математичного аналізу, які пов’язані з поняттям інтегралу – невизначений інтеграл або інтеграл Ньютона-Лейбніця та інтеграла Рімана. До кожного з 9 розділів посібника наводиться основний теоретичний матеріал та велика кількість задач. До усіх задач наведені відповіді, які дадуть читачам змогу перевіряти свої розв’язання.

Для студентів математичних та інформаційних спеціальностей університетів

УДК 517.13
ББК 22. 161

Зміст

		Зміст	3
		Передмова	4
		Умови задач	5
III		**Невизначений інтеграл**	5
	3.1	Перетворення, найпростіші заміни, інтегрування частинами	5
	3.2	Інтегрування раціональних функцій	13
	3.3	Інтегрування ірраціональних функцій	16
	3.4	Інтегрування тригонометричних функцій	20
	3.5	Інтегрування різних типів функцій	22
	3.6	Первісна у широкому розумінні	23
IV		**Інтеграл Рімана**	25
	4.1	Визначення та властивості інтеграла Рімана	25
	4.2	Властивості інтегрованих за Ріманом функцій	37
	4.3	Теореми про середнє, інтеграл, як функція межі інтегрування	44
	4.4	Застосування інтеграла Рімана	48
		Відповіді	56
III		**Невизначений інтеграл**	56
IV		**Інтеграл Рімана**	

Бібліографія…….. 111

Передмова

Розділ 3. Невизначений інтеграл

Розділ 3.1. Перетворення, найпростіші заміни, інтегрування частинами

Короткі теоретичні відомості

Функція $X \xrightarrow{F} R$ називається ***<u>первісною</u>*** функції $X \xrightarrow{f} R$, якщо $\forall x \in X\ F'(x) = f(x)$.

Відтепер і в подальшому в розділах 3.1–3.5 будемо вважати, що $X \subset D_f$ – це деякий проміжок одного з чотирьох типів $[a, b]$, (a, b), $[a, b)$, $(a, b]$, де $a, b \in \overline{R}$.

Теорема 1. *(Властивість первісної)*

Якщо F первісна функції f, то $\forall C \in R$ функція $(F + C)$ теж буде первісною функції f.

Теорема 2. *(Зв'язок між різними первісними)*

Якщо для функції $X \xrightarrow{f} R$ первісними є функції F_1, F_2, то $\exists C \in R\colon\ \forall x \in X\ F_1(x) = F_2(x) + C$.

Внаслідок останньої властивості, первісна визначається неоднозначно, а тому спеціального позначення не має. Лейбніц запропонував для всіх первісних позначення $\int f(x)\,\mathrm{dx}$, який одержав назву ***<u>невизначеного інтегралу</u>***.

Складемо табличку первісних, для деяких функцій, використовуючи зв'язок між первісно та похідною, опускаючи запис додавання довільної сталої.

<u>Таблиця первісних:</u>

<u>Функція</u>	*<u>Первісна</u>*	*<u>Функція</u>*	*<u>Первісна</u>*	*<u>Функція</u>*	*<u>Первісна</u>*
$x^n, n \neq -1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	x^{-1}	$\ln\lvert x\rvert$	e^x	e^x
a^x	$\frac{a^x}{\ln a}$	$\sin x$	$-\cos x$	$\cos x$	$\sin x$
$\sin^{-2} x$	$-ctgx$	$\cos^{-2} x$	tgx	$\boldsymbol{shx}$	chx
chx	shx	$\boldsymbol{sh^{-2}x}$	$-cthx$	$ch^{-2}x$	thx

Функція $X \xrightarrow{f} R$ називається ***<u>інтегрованою в розумінні Ньютона-Лейбніца</u>***, якщо вона має первісну. Покладемо при цьому $\forall a \in X$

$$F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{dt} \overset{def}{\Leftrightarrow} F(a) = 0 \text{ та } \forall x \in X\ F'(x) = f(x),$$

тоді функція F називається ***<u>інтегралом Ньютона-Лейбніца</u>*** з фіксованою нижньою межею. Значення $F(b) = \int_a^b f(t)\mathrm{dt},\ b \in X$ називається ***<u>визначеним інтегралом Ньютона-Лейбніца</u>***, де t називається ***<u>змінною інтегрування</u>***.

Теорема 3. *(Формула Ньютона-Лейбніца)*

Нехай $X \xrightarrow{f} R$ інтегрована в розумінні Ньютона-Лейбніца функція. Якщо F – її довільна первісна, то $\forall a, b \in X$ існує визначений однозначно $\int_a^b f(t)\mathrm{dt}$ та справджується рівність, яка називається ***формулою Ньютона-Лейбниця***:

$$\int_a^b f(t)\mathrm{dt} = F(b) - F(a) \overset{def}{=} F(t)\Big|_{t=a}^{t=b}.$$

Властивості. *(Інтеграла Ньютона-Лейбніца)*

Якщо $X \xrightarrow{f} R$ інтегрована в розумінні Ньютона-Лейбніца функція, то справджуються такі рівності;

1) *(перестановка меж інтегрування)*

$$\int_a^b f(t)\mathrm{dt} = -\int_b^a f(t)\mathrm{dt}\ \forall a, b \in X;$$

2) *(адитивність по межах інтегрування)*

$$\int_a^b f(t)\mathrm{dt} = \int_a^c f(t)\mathrm{dt} + \int_c^b f(t)\mathrm{dt}\ \forall a, b, c \in X;$$

3) *(диференціювання по верхній та нижній межах інтегрування)*

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)\mathrm{dt}\right) = f(x), \frac{d}{dx}\left(\int_x^b f(t)\mathrm{dt}\right) = -f(x)\ \forall a, b \in X.$$

Теорема 4. *(Лінійність інтеграла)*

Якщо функції f, g інтегровані в розумінні Ньютона-Лейбніца на X, тоді $\forall \alpha, \beta \in R$ функція $(\alpha f + \beta g)$ також інтегрована в розумінні Ньютона-Лейбніца на X і $\forall a, b \in X$ справджується рівність:

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(t)\mathrm{dt} = \alpha \int_a^b f(t)\mathrm{dt} + \beta \int_a^b g(t)\mathrm{dt}.$$

Теорема 5. *(Про заміну змінної)*

Нехай для функцій f, ϕ виконуються такі умови: $X = D_{f\circ\phi}$: ϕ диференційована $\forall x \in X$; $f|\phi(X)$ – інтегрована в розумінні Ньютона-Лейбніца на X. Тоді функція $(f \circ \phi) \cdot \phi'$ також інтегрована і $\forall a, b \in X$ справджується рівність, яка називається ***формулою заміни змінної в ІНЛ***:

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(\mathrm{t})\mathrm{dt} = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(z)\mathrm{dz}.$$

Теорема 6. *(Інтегрування частинами)*

Нехай для функцій f, g диференційовані на множині X, функція $f'g$ інтегрована на цій множині в розумінні Ньютона-Лейбніца, то функція fg' також інтегрована і $\forall a, b \in X$ справджується рівність, яка називається ***формулою інтегрування частинами ІНЛ***:

$$\int_a^b f'(t)g(t)\mathrm{dt} = f(t)g(t)\Big|_{t=a}^{t=b} - \int_a^b f(t)g'(t)\mathrm{dt}.$$

Аналогічні властивості також має і невизначений інтеграл. ІНЛ є зручним для теоретичних досліджень, а на практиці будемо віддавати перевагу саме невизначеному інтегралові. Дуже часто інтеграли шляхом перетворень, замін змінної та іншими засобами зводиться до стандартних функцій, первісні від яких варто віднести до табличних. Наводимо цю розширену табличку первісних.

Розширена таблиця первісних ($a > 0$)**:**

Функція	*Первісна*		*Функція*	*Первісна*
$\frac{1}{x^2-a^2}$	$\frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{x-a}{x+a}\right\|$		$\frac{1}{x^2+a^2}$	$\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$
$\frac{x}{x^2\pm a^2}$	$\frac{1}{2}\ln\|x^2\pm a^2\|$		$\frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}$	$\ln\left\|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right\|$
$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\arcsin\frac{x}{a}$		$\frac{x}{\sqrt{x^2\pm a^2}}$	$\sqrt{x^2\pm a^2}$
$\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$-\sqrt{a^2-x^2}$		$x\sqrt{x^2\pm a^2}$	$\frac{1}{2}(x^2\pm a^2)\sqrt{x^2\pm a^2}$
$\sqrt{x^2\pm a^2}$	$\frac{x}{2}\sqrt{x^2\pm a^2}-$ $-\frac{a^2}{2}\ln\left\|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right\|$		$\sqrt{a^2-x^2}$	$\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}$

Теорема 7. *(Первісна від лінійного аргументу)*

Якщо функція $F(x)$ є первісною функції $f(x)$ на множині X, то $\forall a, b \in R$ функція $\frac{1}{a}F(ax+b)$ є первісною функції $f(ax+b)$.

Задачі

1. Доведіть твердження:

1) нехай $[a,b] \xrightarrow{f} \mathrm{R}$, тоді:

а) якщо $f \in \mathrm{C}[a,b]$, то вона інтегрована за Ньютоном-Лейбницем на $[a,b]$;

б) якщо f інтегрована за Ньютоном-Лейбницем на $[a,b]$, то f може мати лише точки розриву другого роду;

2) нехай $f\colon \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ інтегрована за Ньютоном-Лейбницем на $X \subset D_f$, тоді:

а) якщо $X = \mathrm{R}$ та періодична, то функція $\forall a \in \mathrm{R}\ F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{dt}$ також періодична і з тим саме періодом;

б) якщо f – непарна на X, то функція $\forall a \in \mathrm{R}\ F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{dt}$ – парна на X;

в) якщо f – парна на X, то функція $\forall a \in \mathrm{R}\ F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{dt}$ – непарна на X.

В задачах № 2–7, 9–11 треба знайти первісну функції $f\colon R \to R$ на D_f , якщо то є зв'язна множина, інакше – на деякій зв'язній підмножині $X \subset D_f$. Параметри $a, b, c\ldots$ вважаємо додатними, а $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ – довільними дійсними числами.

2. Знайдіть первісні функції $f\colon R \to R$ шляхом перетворень та зведенням до табличних інтегралів, якщо:

1) $f(x) = \frac{x-\sqrt{x}+2\sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x}}$; ***2)*** $f(x) = \left(\frac{1+\sqrt{x}}{x}\right)^2$;

3) $f(x)=\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$; ***4)*** $f(x)=\frac{x^2}{1+x^2}$;

5) $f(x)=\frac{2-x^2}{x^2-1}$; ***6)*** $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^4-1}}$;

7) $f(x)=\frac{2^{x+1}-5^x-10^{x-1}}{10^x}$; ***8)*** $f(x)=\frac{\mathrm{e}^{x+1}-2^x}{2^{x-1}}$;

9) $f(x)=\frac{x^2+2}{x^2+1}$; ***10)*** $f(x)=\frac{7x^2-1}{x^2-1}$;

11) $f(x)=\frac{3x^3-5x^2+x+2}{x+1}$; ***12)*** $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}$;

13) $f(x)=\mathrm{ctg}^2 x$; ***14)*** $f(x)=\mathrm{tg}^2 x$;

15) $f(x)=\mathrm{th}^2 x$; ***16)*** $f(x)=\mathrm{cth}^2 x$;

17) $f(x)=\frac{1}{1-\cos x}$; ***18)*** $f(x)=\frac{1}{1+\cos x}$;

19) $f(x)=\sin\alpha x\cdot\cos\beta x$; ***20)*** $f(x)=\sin\alpha x\cdot\sin\beta x$;

21) $f(x)=\cos\alpha x\cdot\cos\beta x$; ***22)*** $f(x)=\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x$;

23) $f(x)=\sin^2 x$; ***24)*** $f(x)=\mathrm{ch}^2 x$;

25) $f(x)=\sin^3 x$; ***26)*** $f(x)=\cos^3 x$;

27) $f(x)=\frac{1+2x}{1-3x}$; ***28)*** $f(x)=\frac{x^5}{1-x}$;

29) $f(x)=\frac{(1+x)^2}{1+x^2}$; ***30)*** $f(x)=\frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)}$.

3. Знайдіть первісні функції $f:R\to R$ шляхом заміни змінної, якщо:

1) $f(x)=\frac{1}{(1-3x)^{30}}$; ***2)*** $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{(2+5x)^4}}$;

3) $f(x)=\sqrt[15]{1+4x}$; ***4)*** $f(x)=\cos(3-5x)$;

5) $f(x)=\mathrm{sh}(2x-1)$; ***6)*** $f(x)=\mathrm{ch}(1-x)$;

7) $f(x)=\frac{1}{\cos^2(x-\frac{\pi}{3})}$; ***8)*** $f(x)=\frac{1}{\sin^2(2x+\frac{\pi}{4})}$;

9) $f(x)=(5-2x)^{\frac{7}{5}}$; ***10)*** $f(x)=2^{3x+1}$;

11) $f(x)=\sin(6x-1)$; ***12)*** $f(x)=(2x-1)^{10}$;

13) $f(x)=\frac{1}{a^2+b^2x^2}$; ***14)*** $f(x)=\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2x^2}}$;

15) $f(x)=x(x+1)^6$; ***16)*** $f(x)=(2x-1)(x-1)^7$;

17) $f(x)=\frac{x}{(1-x)^{100}}$; ***18)*** $f(x)=\frac{x^3}{(2+x)^{10}}$.

4. Знайдіть первісні функції $f:R\to R$ шляхом заміни змінної, якщо:

1) $f(x)=\frac{x}{x^4+2x^2}$; ***2)*** $f(x)=\frac{x^3}{1+x^4}$;

3) $f(x)=x^4\cdot\sqrt{1+x^5}$; ***4)*** $f(x)=x\sqrt{a^2+x^2}$;

5) $f(x)=\frac{x}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}$; ***6)*** $f(x)=\frac{x^3}{x^2-4}$;

7) $f(x)=x^4\sin(x^5+1)$; ***8)*** $f(x)=x^4\cdot\mathrm{e}^{x^5}$;

9) $f(x)=\frac{x^7}{\sqrt{1-x^{16}}}$; ***10)*** $f(x)=\frac{1}{x^3}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$;

11) $f(x)=\frac{x^3}{x^4-x^2+2}$; ***12)*** $f(x)=\frac{x^2}{1+x^6}$;

13) $f(x)=\frac{\ln^2 x}{x}$; ***14)*** $f(x)=\frac{1}{x\ln x}$;

15) $f(x)=\frac{1}{x\ln x\,\ln\ln x}$; ***16)*** $f(x)=\frac{\cos\ln x}{x}$;

17) $(x)=\frac{1}{x(2+3\ln^2 x)}$; ***18)*** $(x)=\frac{1}{x\ln x-x}$;

19) $f(x)=\frac{1}{e^{\frac{x}{2}}+e^x}$; ***20)*** $f(x)=\frac{e^x+e^{2x}}{1-e^x}$;

21) $f(x)=e^x\,cos(\,e^x)$; ***22)*** $f(x)=\frac{e^x}{1+e^x}$;

23) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{e^{2x}-1}}$; ***24)*** $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}$;

25) $f(x)=\sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}}$; ***26)*** $f(x)=\frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$.

5. Знайдіть первісні функції $f:R\to R$ шляхом тригонометричної або гіперболічної заміни змінної, якщо:

1) $f(x)=\sin^5 x\cos x$; ***2)*** $f(x)=\sin^3 x\cos^2 x$;

3) $f(x)=\frac{\sin x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$; ***4)*** $f(x)=\frac{1}{\sin^2 x\cdot\sqrt[6]{\operatorname{ctg} x}}$;

5) $f(x)=\operatorname{tg} x$; ***6)*** $f(x)=\operatorname{ctg} x$;

7) $f(x)=\operatorname{th} x$; ***8)*** $f(x)=\operatorname{cth} x$;

9) $f(x)=\frac{1}{\sin x}$; ***10)*** $f(x)=\frac{1}{\cos x}$;

11) $f(x)=\frac{1}{\operatorname{sh} x}$; ***12)*** $f(x)=\frac{1}{\operatorname{ch} x}$;

13) $f(x)=\frac{1}{\sin^3 x}$; ***14)*** $f(x)=\frac{\sin x\cos x}{\sin^4 x+\cos^4 x}$;

15) $f(x)=\frac{\cos^4 x}{\sin^6 x}$; ***16)*** $f(x)=\frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}$;

17) $f(x)=\frac{e^{\operatorname{tg} x}+\operatorname{ctg} x}{\cos^2 x}$; ***18)*** $f(x)=\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}$.

6. Знайдіть первісні функції $f:R\to R$, якщо:

1) $f(x)=\frac{x^2+1}{x^4+1}$; ***2)*** $f(x)=\frac{x^2-1}{x^4+1}$;

3) $f(x)=|\cos x|$; ***4)*** $f(x)=|\sin x|$;

5) $f(x)=|\cos x+\sin x|$; ***6)*** $f(x)=\sqrt{1-\sin 2x}$;

7) $f(x)=\arccos\cos x$; ***8)*** $f(x)=\arcsin\sin x$.

7. Знайдіть первісні функції $f:R\to R$ шляхом інтегрування частинами, якщо:

1) $f(x)=\ln x$; ***2)*** $f(x)=(x^2+4x-3)\ln(2x+1)$;

3) $f(x)=(x-1)\ln^2 x$; ***4)*** $f(x)=x\ln^3 x$;

5) $f(x)=x\ln\frac{1+x}{1-x}$; ***6)*** $f(x)=x^2\ln\frac{1+x}{1-x}$;

7) $f(x)=\operatorname{arctg} x$; ***8)*** $f(x)=x\cdot\operatorname{arctg} x$;

9) $f(x)=\operatorname{arctg}\sqrt{x}$; ***10)*** $f(x)=\arcsin x$;

11) $f(x)=x\arcsin x$; ***12)*** $f(x)=\sqrt{x}\cdot\operatorname{arctg}\sqrt{x}$;

13) $f(x) = \arcsin\sqrt{x}$; ***14)*** $f(x) = x\arcsin(1-x)$;
15) $f(x) = x\arccos\frac{1}{x}$; ***16)*** $f(x) = \frac{\arcsin x}{x^2}$;
17) $f(x) = \arcsin\frac{2\sqrt{x}}{1+x}$; ***18)*** $f(x) = \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}$;
19) $f(x) = (\operatorname{arctg} x)^2$; ***20)*** $f(x) = (\arcsin x)^2$;
21) $f(x) = \sin\ln x$; ***22)*** $f(x) = \cos\ln x$;
23) $f(x) = \ln(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x})$; ***24)*** $f(x) = \cos^2(\ln x)$;
25) $f(x) = \frac{\ln\sin x}{\sin^2 x}$; ***26)*** $f(x) = \sin x \cdot \ln\operatorname{tg} x$.

8. Для многочлена n -го степеня $P(x)$ шляхом інтегрування частинами доведіть рівності:

1) $\int P(x)e^{\alpha x}dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha}\sum_{k=0}^{n}\frac{P^{(k)}(x)}{\alpha^k}$;

2) $\int P(x)\cos\alpha x\,dx = \frac{\sin\alpha x}{\alpha}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}\frac{(-1)^k P^{(2k)}(x)}{\alpha^{2k}} + \frac{\cos\alpha x}{\alpha^2}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}\frac{(-1)^k P^{(2k+1)}(x)}{\alpha^{2k}}$;

3) $\int P(x)\sin\alpha x\,dx = -\frac{\cos\alpha x}{\alpha}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}\frac{(-1)^k P^{(2k)}(x)}{\alpha^{2k}} + \frac{\sin\alpha x}{\alpha^2}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}\frac{(-1)^k P^{(2k+1)}(x)}{\alpha^{2k}}$;

4) $\int P(x)\operatorname{ch}\alpha x\,dx = \frac{\operatorname{sh}\alpha x}{\alpha}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}\frac{P^{(2k)}(x)}{\alpha^{2k}} - \frac{\operatorname{ch}\alpha x}{\alpha^2}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}\frac{P^{(2k+1)}(x)}{\alpha^{2k}}$;

5) $\int P(x)\operatorname{sh}\alpha x\,dx = \frac{\operatorname{ch}\alpha x}{\alpha}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}\frac{P^{(2k)}(x)}{\alpha^{2k}} + \frac{\operatorname{sh}\alpha x}{\alpha^2}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}\frac{P^{(2k+1)}(x)}{\alpha^{2k}}$.

9. Знайдіть первісні функції $f: R \to R$ шляхом інтегрування частинами, якщо:

1) $f(x) = x\cos x$; ***2)*** $f(x) = (x^2 - x)\sin x$;
3) $f(x) = x^2\operatorname{sh} x$; ***4)*** $f(x) = x^3\operatorname{ch} 3x$;
5) $f(x) = x\cos^2 x$; ***6)*** $f(x) = 2x^2\sin^2 x$;
7) $f(x) = (x-1)\cos^3 x$; ***8)*** $f(x) = 3x\sin^3 x$;
9) $f(x) = x^7 e^{-x^2}$; ***10)*** $f(x) = (x^5 - 4x^3 + x^2 - 1)e^{-x}$;
11) $(x^5 + 2x^3 + 3x)\sin x$; ***12)*** $f(x) = (x^4 + x^3 + x^2 + x)\cos x$;
13) $(x^6 - 1)\sin 3x$; ***14)*** $f(x) = (x^5 - x)\cos 2x$;
15) $(x^6 + x^5 - x - 2)\operatorname{ch} x$; ***16)*** $f(x) = (2x^4 + 4x)\operatorname{sh} 2x$;
17) $(x^5 + 2)(\sin x + \cos 2x)$; ***18)*** $(x^3 - 3x^2 + 5x + 1)(\sin x + \cos x)$;
19) $f(x) = e^{\alpha x}\cos\beta x$; ***20)*** $f(x) = e^{\alpha x}\sin\beta x$;
21) $f(x) = e^{\alpha x}\cos^2\beta x$; ***22)*** $f(x) = \operatorname{sh} x\sin x$;
23) $f(x) = \operatorname{ch} x\sin 2x$; ***24)*** $f(x) = xe^x\cos x$;
25) $f(x) = x^2\operatorname{ch} x\cos x$; ***26)*** $f(x) = x^3\cos x \cdot \operatorname{sh} 2x$.

10. Знайдіть первісні функції $f: R \to R$ шляхом перетворень та заміни змінної, якщо:

1) $f(x) = (x+1)\sqrt{2-x}$; ***2)*** $f(x) = x^2 \cdot \sqrt{2x+1}$;
3) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-3x}}$; ***4)*** $f(x) = \frac{x^2-1}{\sqrt{x+2}}$;
5) $f(x) = \frac{2x+1}{x^2-3x+1}$; ***6)*** $f(x) = \frac{x-1}{10+x-x^2}$;

7) $f(x)=\frac{5x+3}{3x^2-8x+2}$; ***8)*** $f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}}$;

9) $f(x)=\frac{2-x}{\sqrt{x^2-6x+10}}$; ***10)*** $f(x)=\frac{2-3x}{\sqrt{3x^2+2x+16}}$;

11) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{5+x-x^2}}$; ***12)*** $f(x)=\frac{x}{\sqrt{9+8x-4x^2}}$;

13) $f(x)=\frac{x}{x^4-2x^2+2}$; ***14)*** $f(x)=\frac{x^2}{2x^6-6x^3-1}$;

15) $f(x)=\frac{x^5}{x^6+x^3+3}$; ***16)*** $f(x)=\frac{4x^3}{2x^8-3x^4+13}$;

17) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1-2x^2-3x^4}}$; ***18)*** $f(x)=\frac{x-2x^3}{\sqrt{1-x^2-x^4}}$;

19) $f(x)=\frac{1}{x\sqrt{x^2+x+1}}$; ***20)*** $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1-3x^2-2x^4}}$;

21) $f(x)=\frac{\ln x}{x\sqrt{1-\ln x-\ln^2 x}}$; ***22)*** $f(x)=\frac{\cos x}{\sqrt{1-4\sin x+\cos^2 x}}$;

23) $f(x)=\frac{e^{2x}+3e^x}{\sqrt{e^{2x}+e^x+1}}$; ***24)*** $f(x)=\frac{2^x}{(2^x+1)\sqrt{1+2^x+4^x}}$.

11. Отримайте для первісної функції $f: R \to R$ рекурентне співвідношення і знайдіть значення первісної для заданих n, m, якщо:

1) $f(x)=\cos^n x$ та

а) $n=5$; ***б)*** $n=6$;

2) $f(x)=\sin^n x$;

а) $n=4$; ***б)*** $n=7$;

3) $f(x)=\frac{1}{\cos^n x}$;

а) $n=4$; ***б)*** $n=7$;

4) $f(x)=\frac{1}{\sin^n x}$;

а) $n=5$; ***б)*** $n=6$;

5) $f(x)=\mathrm{ch}^n x$ та

а) $n=4$; ***б)*** $n=5$;

6) $f(x)=\mathrm{sh}^n x$ та

а) $n=3$; ***б)*** $n=6$;

7) $f(x)=\frac{1}{\mathrm{ch}^n x}$ та

а) $n=3$; ***б)*** $n=6$;

8) $f(x)=\frac{1}{\mathrm{sh}^n x}$ та

а) $n=4$; ***б)*** $n=5$;

9) $f(x)=\mathrm{tg}^n x$ та $n=5$; ***10)*** $f(x)=\mathrm{ctg}^n x$ та $n=6$;

11) $f(x)=\frac{\sin^n x}{\cos^m x}$ та

а) $n=5, m=6$; ***б)*** $n=7, m=5$;

12) $f(x)=\sin^n x \cos^m x$ та

а) $n=8, m=5$; ***б)*** $n=4, m=6$;

13) $f(x)=\frac{1}{(\alpha+\beta\cos x)^n}$, $|\beta| \neq |\alpha|$, $n \geq 2$;

14) $f(x)=\frac{1}{(\alpha\sin x+\beta\cos x)^n}$, $n \geq 2$;

15) $f(x)=\frac{1}{(x^2+\beta x+\gamma)^n}$, $\beta^2\neq 4\gamma$;

16) $f(x)=\frac{x^n}{\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}}$, $\beta^2\neq 4\alpha\gamma$, $\alpha\neq 0$;

17) $f(x)=\frac{1}{(x^2+a^2)^n}$ та $n=4$; ***18)*** $f(x)=\left(\frac{\sin\frac{1}{2}(x-\alpha)}{\sin\frac{1}{2}(x+\alpha)}\right)^n$;

19) $f(x)=\ln^n x$ та $n=6$;

20) $f(x)=x^\alpha \ln^n x$, $\alpha\neq -1$ та $n=4$;

21) $f(x)=x^n e^x$ та $n=5$;

22) $f(x)=e^{\alpha x}\sin^n x$, $\alpha\neq 0$ та $n=4$.

Розділ 3.2. Інтегрування раціональних функцій

Короткі теоретичні відомості

Раціональною будемо називати функцією, яка є відношенням двох многочленів $\frac{S(x)}{Q(x)}$. Якщо степінь многочлена, що стоїть в чисельнику не менша за степінь многочлена із знаменнику, то такий дріб називається ***неправильним***, і спочатку для її інтегрування виділяється ціла частина: $\frac{S(x)}{Q(x)} = T(x) + \frac{P(x)}{Q(x)}$, де $T(x)$ – многочлен, а дріб $\frac{P(x)}{Q(x)}$ є правильним, тобто степінь чисельника менша за степінь знаменника. В подальшому в теоретичній частині ми будемо оперувати саме з такими раціональними функціями.

<u>Метод 1</u>. Метод невизначених коефіцієнтів

Теорема 1. *(Розклад множини на множники)*

Будь-який многочлен $Q(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ можна подати у вигляді:

$$(x - x_1)^{\alpha_1} \ldots (x - x_m)^{\alpha_m}(x^2 + p_1x + q_1)^{\beta_1} \ldots (x^2 + p_kx + q_k)^{\beta_k}, \qquad (\mathbf{1})$$

де $x_1, \ldots, x_m$ – корені многочлена Q, а квадратні тричлени не мають дійсних коренів.

Теорема 2. *(Розклад правильного дробу)*

Якщо дріб $\frac{P(x)}{Q(x)}$ – правильний і $Q(x)$ має вигляд **(1)**, то його можна подати у вигляді:

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{\alpha_i}\frac{A_j^{(i)}}{(x - x_i)^j} + \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{\beta_i}\frac{M_j^{(i)}x + N_j^{(i)}}{(x^2 + p_ix + q_i)^j}. \qquad (\mathbf{2})$$

Таким чином інтегрування правильного дробу зводиться до інтегрування чотирьох типів правильних дробів.

1) $\frac{A}{x-a} \Rightarrow \int \frac{A\mathrm{dx}}{x-a} = A\ln|x - a| + C.$

2) $\frac{A}{(x-a)^n}, n > 1 \Rightarrow \int \frac{A\mathrm{dx}}{(x-a)^n} = A\int (x - a)^{-n}\mathrm{dx} = \frac{A}{(1-n)(x-a)^{n-1}} + C.$

3) $\frac{Bx+C}{x^2+px+q} \Rightarrow$

$$\int \frac{Bx + C}{x^2 + px + q}\mathrm{dx} = \frac{B}{2}\ln(x^2 + px + q) + \frac{2C - Bp}{2\sqrt{q^2 - \frac{p^2}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{\left(x + \frac{p}{2}\right)}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} + C,$$

такі інтеграли зводяться до знаходження первісних з розширеної таблиці первісних, як це робилося в задачі № 9.

4) $\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^m}, m > 1 \Rightarrow$

$$\int \frac{Bx + C}{(x^2 + px + q)^m}dx = B\int \frac{x + \frac{C}{B}}{(x^2 + px + q)^m}dx =$$

$$= B\int \frac{\left(x + \frac{p}{2}\right)dx}{(x^2 + px + q)^m} + B\int \frac{\frac{C}{B} - \frac{p}{2}}{(x^2 + px + q)^m} = -\frac{B}{2(m-1)(x^2 + px + q)^{m-1}} + \left(C - \frac{Bp}{2}\right)I_m,$$

де останній інтеграл можна знайти або методом Остроградського, про що буде розказано далі, або побудувати рекурентні співвідношення, для його знаходження, як це робилося в задачі № 10.

<u>Метод 2</u>. Метод Остроградського

Розглянемо праву частину формули **(2)**. Якщо дріб $\frac{P(x)}{Q(x)}$ – правильний, і $Q(x)$ має розгляд **(1),** то можна записати таку формулу:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{A_1^{(i)}}{x - x_i} + \sum_{i=1}^{k} \frac{M_1^{(i)}x + N_1^{(i)}}{x^2 + p_i x + q_i} \right) dx, \qquad (3)$$

$$Q_1(x) = (x - x_1)^{\alpha_1 - 1} \dots (x - x_m)^{\alpha_m - 1} \cdot (x^2 + p_1 x + q_1)^{\beta_1 - 1} \dots (x^2 + p_k x + q_k)^{\beta_k - 1},$$

де $P_1(x)$ – многочлен з невідомими коефіцієнтами, степінь якого на 1 менше за степені $Q_1(x)$, позаяк дріб $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ – правильний. Коефіцієнти знаходяться з диференціювання рівності **(3)** та складання відповідної системи рівнянь:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \equiv \frac{P_1'(x)Q_1(x) - P_1(x)Q_1'(x)}{Q_1^2(x)} + \sum_{i=1}^{m} \frac{A_1^{(j)}}{x - x_i} + \sum_{i=1}^{k} \frac{M_1^{(i)}x + N_1^{(i)}}{x^2 + p_i x + q_i}. \qquad (4)$$

У загальному випадку многочлен $Q_1(x)$ можна шукати як $НСД(Q(x), Q'(x))$.

Задачі

В задачах № 12 та 13 треба знайти первісну функції $f: R \to R$ на D_f , якщо то є зв'язна множина, інакше – на зв'язній множині $X \subset D_f$. Параметри $a, b, c \dots$ вважаємо додатними, а $\alpha, \beta, \gamma \dots$ – довільними дійсними числами.

12. Знайдіть первісні раціональної функції $f: R \to R$ методом невизначених коефіцієнтів, якщо:

1) $f(x) = \frac{x^2-1}{(x-2)(x+3)}$; ***2)*** $f(x) = \frac{x^3+1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$;

3) $f(x) = \frac{x^4}{(x+1)^2(x-2)}$; ***4)*** $f(x) = \frac{x^2+1}{x^3-5x^2+6x}$;

5) $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2(x+10)}$; ***6)*** $f(x) = \frac{x^4+2x^3+3x^2+2x+1}{x(x^2-1)(x-2)}$;

7) $f(x) = \frac{x^2-3}{x^2(x^2-1)}$; ***8)*** $f(x) = \frac{x^2+1}{x^4+3x^2+1}$;

9) $f(x) = \frac{x^2-1}{(x-2)(x^2+x+1)}$; ***10)*** $f(x) = \frac{3x^4+9x^3-14x^2-68x-56}{(x+1)(x+2)^2(x-3)}$;

11) $f(x) = \frac{1}{(x-1)(x^2-x+4)}$; ***12)*** $f(x) = \frac{x-x^2}{(x-2)^2(x+3)^2}$;

13) $f(x) = \frac{1}{x(x+1)(x^2+x+1)}$; ***14)*** $f(x) = \frac{1}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)}$;

15) $f(x) = \frac{1}{x(x^2-1)(x^2-4)}$; ***16)*** $f(x) = \frac{x^4}{(2-x-x^2)(x+3)(x+5)}$;

17) $f(x) = \frac{1}{x^4-1}$; ***18)*** $f(x) = \frac{1}{x^4+1}$;

19) $f(x) = \frac{1}{x^3-1}$; ***20)*** $f(x) = \frac{1}{x^3+1}$;

21) $f(x) = \frac{1}{x^4+x^2+1}$; ***22)*** $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2x(x+2)(x+3)}$;

23) $f(x) = \frac{x^5-2x^4-11x^3+2x^2+36x+65}{(x+2)^2(x-3)^2}$;

24) $f(x) = \frac{2x^7-4x^6+9x^5+4x^4+x^3+2x^2-6x+4}{x^3(x-1)^2(x+2)(x^2+1)}$;

25) $f(x) = \frac{-x^6+2x^5+x^4+15x^3-23x^2+4x-16}{x(x+1)^2(x^4+4)}$.

13. Знайдіть первісні раціональної функції $f: R \to R$ методом Остроградського, якщо:

1) $f(x) = \frac{x^6+2x^5-4x^4-9x^3+6x^2+x+2}{x^4(x+2)^3}$;

2) $f(x) = \frac{x^7+5x^6-3x^5-15x^4+3x^3+15x^2-x-5}{(x^2-1)^4}$;

3) $f(x) = \frac{x^5+4x^4+11x^3+x^2+6x+1}{(x+1)^4x^2}$;

4) $f(x) = \frac{x^4+1}{(x^2+1)^3}$;

5) $f(x) = \frac{1}{(x^4+1)^2}$;

6) $f(x) = \frac{1}{x^3(x-1)^5}$;

7) $f(x) = \frac{1}{(x^3-1)^3}$;

8) $f(x) = \frac{1}{(x^4-1)^3}$;

9) $f(x) = \frac{(x-1)^2}{(x^2+2)^4}$;

10) $f(x) = \frac{1}{(x^2+x+1)^3}$;

11) $f(x) = \frac{x^2+3}{x^3(x-2)^4(x+1)^3}$;

12) $f(x) = \frac{1}{(x^2+1)^5}$;

13) $f(x) = \frac{2x^3-3x^2+1}{x^4-2x^3+2x-1}$;

14) $f(x) = \frac{x^5-7x^4+x+1}{x^{10}+10x^8+40x^6+80x^4+80x^2+32}$;

15) $f(x) = \frac{3x^2-x-7}{x^5-5x^4+9x^3-11x^2+7x-3}$.

Розділ 3.3. Інтегрування ірраціональних функцій

Короткі теоретичні відомості

Загалом інтегрування ірраціональних функцій не можливе в елементарних функціях. Тут ми розглянемо ті типи ірраціональності, які часто зустрічаються в застосуваннях та для яких можна знайти первісні в явному вигляді.

Загалом надмірне занурення в надскладні методи знаходження первісних ми вважаємо недоцільним і не корисним, з урахування того, що в сучасному світі більшість з цих методів можна запрограмувати і наближені методи обчислень дають дуже гарні результати.

Позначимо через $R(x, f_1, f_2, \dots f_n)$ раціональний вираз, що залежить від функцій $f_1, f_2, \dots, f_n$, які містять ірраціональності. Покажемо, якого типу вирази ми будемо досліджувати та знаходити їхні первісні. Оскільки з попереднього розділу ми знаємо, що первісну від раціональної функції можна завжди знайти (за умови, що ми можемо розкладати многочлен на лінійні та квадратичні множники), то нас цікавить крок зведення задачі до пошуку первісної від раціональної функції.

Тип 1: $R(x, x^{\frac{m_1}{k_1}}, \dots, x^{\frac{m_n}{k_n}})$, де $\frac{m_i}{k_i} \in Q$, $i = \overline{1,n}$.

Нехай K – спільний знаменник цих дробів, тоді $x^{\frac{m_i}{k_i}} = x^{\frac{M_i}{K}}$, $i = \overline{1,n}$ ⇒ Зробимо заміну $x = t^K$, завдяки якій задача зводиться до пошуку первісної від раціональної функції:

$$\int R(x, x^{\frac{m_1}{k_1}}, \dots, x^{\frac{m_n}{k_n}})dx = \int R(t^k, t^{M_1}, \dots, t^{M_n})\, Kt^{k-1}dt.$$

Тип 2: $R(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{k_1}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_n}{k_n}})$, де $\frac{m_i}{k_i} \in Q, i = \overline{1,n}$.

Аналогічно попередньому заміна $t^K = \frac{ax+b}{cx+d}$, де K – спільний знаменник дробів $\frac{m_i}{k_i}$, $i = \overline{1,n}$, зводить до пошуку первісної від раціональної функції.

Тип 3: *Інтегрування диференціального бінома*: $R(x) = x^r(a + bx^q)^p$.

$$\int x^r(a + bx^q)^p dx\,, a, b \in R, p, q, r \in Q. \qquad (\mathbf{1})$$

Теорема 1. *(Чебишова)*

Для того, щоб первісна від виразу $x^r(a + bx^q)^p$ виражалася через елементарні функції, необхідно й достатньо, щоб виконувалась одна з трьох таких умов:

1) $p \in Z$ (перша умова Чебишова);

2) $\frac{r+1}{q} \in Z$ (друга умова Чебишова);

3) $\frac{r+1}{q} + p \in Z$ (третя умова Чебишова).

Для кожного з трьох випадків застосовують відповідні ***підстановки Чебишова***.

1) $p \in Z$, λ –спільний знаменник r і q, заміна $z = x^{\frac{1}{\lambda}}$ – *перша підстановка Чебишова*.

2) $\frac{r+1}{q} \in Z$, ν – знаменник p, заміна $a + bx^q = z^\nu$ – *друга підстановка Чебишова.*

3) $\frac{r+1}{q} + p \in Z$, ν – знаменник p, заміна $ax^{-q} + b = z^\nu$ – *третя підстановка Чебишова.*

Тип 4: *Інтегрування* $\boldsymbol{R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})}$.

Метод 1. Підстановки Ейлера

Наведений ірраціональний вираз $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$ завжди раціоналізується з допомогою ***підстановок Ейлера***.

1) Якщо $a > 0$, то можна застосувати заміну $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a}x + t$ *– перша підстановка Ейлера.*

2) Якщо $c > 0$, то можна застосувати заміну $\sqrt{ax^2+bx+c} == \pm\sqrt{c} + tx$ *– друга підстановка Ейлера.*

3) Якщо $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$, то можна застосувати заміну $ax^2+bx+c = t(x-x_1)$ *– третя підстановка Ейлера.*

<u>Метод 2</u>. Метод невизначених коефіцієнтів

Вираз $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$ шляхом перетворень можна звести до знаходження первісних від таких трьох типів виразів.

1) $\frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, де $P_n(x)$ – многочлен степені n. Тепер застосовуємо метод невизначених коефіцієнтів:

$$\int \frac{P_n(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \equiv Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

де невідомі коефіцієнти многочлену $Q_{n-1}(x)$ і λ знаходяться шляхом диференціювання останньої рівності.

2) $\frac{1}{(x-\alpha)^n\sqrt{ax^2+bx+c}}$, якщо застосувати заміну $t = \frac{1}{x-\alpha}$, то ми зведемо пошук первісної до пошуку первісної типу ***1)***.

3а) $\frac{1}{(x^2+px+q)^n\sqrt{ax^2+bx+c}}$, де $ax^2+bx = a(x^2+px)$. Тоді заміна $x + \frac{p}{2} = t$ зводить до знаходження первісних для таких виразів: $F_1(t) = \frac{t}{(t^2+\beta)^n\sqrt{(t^2+\gamma)}}$ та $F_2(t) = \frac{1}{(t^2+\beta)^n\sqrt{(t^2+\gamma)}}$. Для знаходження первісної від $F_1(t)$ достатньо використати заміну $z = t^2$ і отримаємо первісну від табличної функції. Для знаходження первісної від $F_2(t)$ використовується підстановка Абеля $z = \frac{t}{\sqrt{t^2+\gamma}}$.

3б) $\frac{1}{(x^2+px+q)^n\sqrt{ax^2+bx+c}}$, де $ax^2+bx \neq a(x^2+px)$. Тоді в заміні $x = \frac{\mu t+\nu}{1+t}$ підбираємо параметри μ, ν таким чином, щоб пошук первісної звівся до випадку ***3а)***.

Задачі

В задачах № 14 – 18 треба знайти первісну функції $f: R \to R$ на D_f , якщо то є зв'язна множина, інакше – на зв'язній множині $X \subset D_f$. Параметри $a, b, c\ldots$ вважаємо додатними, а $\alpha, \beta, \gamma\ldots$ – довільними дійсними числами.

14. Знайдіть первісні від ірраціональної функції $f: R \to R$, якщо:

1) $f(x) = \frac{1}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}$;

2) $f(x) = \frac{x\cdot\sqrt[3]{2+x}}{x+\sqrt[3]{2+x}}$;

3) $f(x) = \frac{1-\sqrt{1+x}}{1+\sqrt[3]{x+1}}$;

4) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[4]{x})^3}$;

5) $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$;

6) $f(x) = \frac{\sqrt{x}+1}{x^2-\sqrt{x}}$;

7) $f(x) = \frac{x}{\sqrt[4]{x^3(8-x)}}$;

8) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[n]{(x-1)^{n+1}(x+2)^{n-1}}}$;

9) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$; ***10)*** $f(x)=\sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}$;

11) $f(x)=\frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x(1+\sqrt[3]{x})}$; ***12)*** $f(x)=\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{x^{-5}}+1}{\sqrt{x}+1}$.

15. Знайдіть первісні від ірраціональної функції $f: R \to R$, якщо:

1) $f(x)=\frac{1}{x^2\sqrt{x^2+x-1}}$; ***2)*** $f(x)=\frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}$;

3) $f(x)=\frac{1}{x^2\sqrt{x^2+x+1}}$; ***4)*** $f(x)=\frac{1}{(x-1)\sqrt{x^2-2}}$;

5) $f(x)=\frac{1}{(x+2)^2\sqrt{x^2+2x-5}}$; ***6)*** $f(x)=\frac{x^2+1}{x\sqrt{x^4+1}}$;

7) $f(x)=\frac{x^2+2x+2}{\sqrt{x^2-4x+5}}$; ***8)*** $f(x)=\frac{x-1}{(x+2)^2\sqrt{x^2-x+1}}$;

9) $f(x)=\frac{1}{x\sqrt{x^4+x^2+1}}$; ***10)*** $f(x)=\frac{(x+1)^2}{x\sqrt{x^2+3x+1}}$.

16. Знайдіть методом невизначених коефіцієнтів первісні від ірраціональної функції $f: R \to R$, якщо:

1) $f(x)=\frac{x^{10}}{\sqrt{x^2+1}}$; ***2)*** $f(x)=\frac{x^3-x^2+x-1}{\sqrt{x^2+5x+3}}$;

3) $f(x)=x^4\cdot\sqrt{4-x^2}$; ***4)*** $f(x)=(x^2+3x-1)\sqrt{x^2+2x-1}$;

5) $f(x)=\frac{x^3-x-1}{\sqrt{x^2+2x+2}}$; ***6)*** $f(x)=\frac{x^3-6x^2+11x-6}{\sqrt{x^2+4x+3}}$;

7) $f(x)=\frac{3x^3+5x^2-7x+9}{\sqrt{2x^2+5x+7}}$; ***8)*** $f(x)=\frac{x^4+1}{\sqrt{1-x^2}}$;

9) $f(x)=\frac{1}{x^3\sqrt{x^2+1}}$; ***10)*** $f(x)=\frac{1}{(x+1)^5\sqrt{x^2+2x}}$;

11) $f(x)=\frac{1}{(x-1)^4\sqrt{x^2+2x+6}}$; ***12)*** $f(x)=\frac{1}{(x+2)^3\sqrt{x^2+4x+5}}$;

13) $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{(x+1)^2}$; ***14)*** $f(x)=\frac{x+4}{(x-1)(x+2)^2\sqrt{x^2+x+1}}$;

15) $f(x)=\frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$; ***16)*** $f(x)=\frac{x}{(x^2-3x+2)\sqrt{x^2-4x+3}}$;

17) $f(x)=\frac{1}{(1-x^4)\sqrt{1+x^2}}$; ***18)*** $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+2}}{x^2+1}$;

19) $f(x)=\frac{1}{x^4\sqrt{x^2-1}}$; ***20)*** $f(x)=\frac{x}{(x^2-1)\sqrt{1+2x-x^2}}$;

21) $f(x)=\frac{x^3+1}{(x^2-1)^2\sqrt{x^2+x-1}}$; ***22)*** $f(x)=\frac{x^2}{(4-2x+x^2)\sqrt{2+2x-x^2}}$;

23) $f(x)=\frac{x+1}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$; ***24)*** $f(x)=\frac{1}{(x^2+3x+3)\sqrt{2x^2+6x-1}}$;

25) $f(x)=\frac{x-1}{(x^2-x+2)\sqrt{x^2-x+3}}$; ***26)*** $f(x)=\frac{1}{(x^2+2x+2)\sqrt{2x^2+4x-1}}$;

27) $f(x)=\frac{1}{(x^2-x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$; ***28)*** $f(x)=\frac{1}{(x^2+2)\sqrt{2x^2-2x+5}}$;

29) $f(x)=\frac{1}{(x^2-x+1)\sqrt{x^2-2x+4}}$.

17. Знайдіть первісні від ірраціональної функції $f: R \to R$ шляхом підстановок Ейлера, якщо:

1) $f(x)=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$; ***2)*** $f(x)=\frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}$;

3) $f(x)=\frac{1}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$; ***4)*** $f(x)=x\sqrt{x^2-2x+2}$;

5) $f(x)=\frac{1}{(1+\sqrt{x(x+1)})^2}$; ***6)*** $f(x)=\frac{1-\sqrt{x^2+x+1}}{x\sqrt{x^2+x+1}}$;

7) $f(x)=\frac{x-1}{(x^2+2x)\sqrt{x^2+2x}}$; ***8)*** $f(x)=\frac{1}{x\sqrt{4x^2+4x+3}}$;

9) $f(x)=\frac{1}{(1+x)\sqrt{1+x-x^2}}$; ***10)*** $f(x)=\frac{1}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}$;

11) $f(x)=\frac{1}{x+\sqrt{x^2-x+1}}$; ***12)*** $f(x)=\frac{1}{(1+x)\sqrt{1+x+x^2}}$;

13) $f(x)=\frac{1}{x-\sqrt{x^2+2x+4}}$; ***14)*** $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}-1}$.

18. Знайдіть первісні від ірраціональної функції $f:R\to R$ шляхом підстановок Чебишова, якщо:

1) $f(x)=\sqrt[3]{x}\cdot(2+\sqrt{x})^2$; ***2)*** $f(x)=x^3\cdot\sqrt{1+x^2}$;

3) $f(x)=x^{-\frac{2}{3}}\cdot\left(1+x^{\frac{2}{3}}\right)^{-1}$; ***4)*** $f(x)=x^{\frac{1}{3}}\cdot\left(2+x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{4}}$;

5) $f(x)=x^5\cdot\sqrt[3]{(1+x^2)^2}$; ***6)*** $f(x)=x^{-11}\cdot(1+x^4)^{-\frac{1}{2}}$;

7) $f(x)=\frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}$; ***8)*** $f(x)=\frac{1}{x(\sqrt[3]{x}+1)^2}$;

9) $f(x)=\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}$; ***10)*** $f(x)=\frac{1}{x^4\sqrt{1+x^2}}$;

11) $f(x)=\frac{1}{x\cdot\sqrt[3]{x^2+1}}$; ***12)*** $f(x)=\frac{1}{x^3}\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{5}}$;

13) $f(x)=\sqrt{x}(\sqrt[3]{x}+1)^4$; ***14)*** $f(x)=\sqrt[3]{x(1-x^2)}$;

15) $f(x)=\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[7]{1+x^{\frac{4}{3}}}$; ***16)*** $f(x)=\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}{x}$;

17) $f(x)=\frac{\sqrt{1-x^4}}{x^5}$; ***18)*** $f(x)=\frac{1}{x}\cdot\left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{-3}$;

19) $f(x)=\frac{1}{\sqrt[4]{1+x^4}}$; ***20)*** $f(x)=\frac{1}{x\cdot\sqrt[3]{1+x^5}}$;

21) $f(x)=\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}$; ***22)*** $f(x)=\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x^2}}$;

23) $f(x)=\frac{x^2}{\sqrt{x-\sqrt[3]{x}}}$; ***24)*** $f(x)=\frac{x}{\sqrt[3]{1+2x^5}}$;

Розділ 3.4. Інтегрування тригонометричних функцій

Короткі теоретичні відомості

Ми розглянемо в цьому розділі методи інтегрування виразів, що зводяться до інтегрування раціональних функцій від $\sin x$ та $cos\, x$. Позначимо такий вираз через $R(\sin x, cos\, x)$.

Метод 1. Універсальна тригонометрична підстановка

Завдяки заміні $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ раціоналізується будь-яка функція вигляду $R(\sin x, \cos x)$, оскільки $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$; $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$; $\mathrm{dx} = \frac{2\mathrm{dt}}{1+t^2} \Rightarrow$

***Метод 2. Заміна* $\sin x$, $\cos x$ *або* $\operatorname{tg} x$.**

Якщо $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то раціоналізує функцію підстановка $t = \sin x$, якщо $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos \mathrm{x})$, то раціоналізує функцію підстановка $t = \cos x$, якщо $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, то раціоналізує функцію підстановка $t = \operatorname{tg} x$.

Задачі

В задачах № 19–20 треба знайти первісну функції $f: R \to R$ на D_f , якщо то є зв'язна множина, інакше – на зв'язній множині $X \subset D_f$. Параметри $a, b, c \ldots$ вважаємо додатними, а $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ – довільними дійсними числами.

19. Знайдіть первісні від тригонометричних функції $f: R \to R$, якщо:

1) $f(x) = \sin^3 x$;
2) $f(x) = \sin^4 x$;
3) $f(x) = \cos^4 x$;
4) $f(x) = \cos^5 x$;
5) $f(x) = \sin^2 x \sin^2 4x$;
6) $f(x) = \cos^2 x \sin^3 3x$;
7) $f(x) = \frac{1}{\sin(x+\alpha)\sin(x+\beta)}$;
8) $f(x) = \frac{1}{\sin(x+\alpha)\cos(x+\beta)}$;
9) $f(x) = \frac{1}{\cos(x+\alpha)\cos(x+\beta)}$.

20. Використовуючи стандартні тригонометричні підстановки знайдіть первісні від функції $f: R \to R$, якщо:

1) $f(x) = \frac{1}{(2+\cos x)\sin x}$;
2) $f(x) = \frac{\sin^2 x}{2\cos x + \sin x}$;
3) $f(x) = \frac{\sin^2 x}{1+2\sin^2 x}$;
4) $f(x) = \frac{\sin x}{\sin^3 x + \cos^3 x}$;
5) $f(x) = \frac{1}{\sin^4 x + \cos^4 x}$;
6) $f(x) = \frac{\sin 2x}{\sin x + \cos x}$;
7) $f(x) = \frac{2\operatorname{tg} x + 3}{\sin^2 x + 2\cos^2 x}$;
8) $f(x) = \frac{\sin 2x}{1+\sin^4 x}$;
9) $f(x) = \frac{\cos 2x}{\sin^4 x + \cos^4 x}$;
10) $f(x) = \frac{1}{\sin^6 x + \cos^6 x}$;
11) $f(x) = \frac{1}{4\sin^2 x + 9\cos^2 x}$;
12) $f(x) = \frac{1}{(9\sin^2 x + 4\cos^2 x)^2}$;
13) $f(x) = \frac{1}{(2\sin x + 3\cos x)^2}$;
14) $f(x) = \frac{2\sin x - \cos x}{\sin^2 x \cos x + 2\cos^3 x}$;
15) $f(x) = \frac{\cos x}{\sin^2 x - 6\sin x + 5}$;
16) $f(x) = \frac{\cos^5 x + 2\cos^3 x}{\sin^4 x + \sin^2 x}$;

17) $f(x)=\frac{1}{\cos 2x-\sin 2x}$;
18) $f(x)=\frac{\sin^2 x\cos x}{\sin^4 x-\sin^2 x}$;
19) $f(x)=\frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}$;
20) $f(x)=\frac{\cos^4 x}{\sin^3 x}$;
21) $f(x)=\frac{1}{\sin^3 x}$;
22) $f(x)=\frac{1}{\cos^3 x}$;
23) $f(x)=\frac{1}{\sin^3 x\cos^5 x}$;
24) $f(x)=\frac{1}{\sin x\cos^4 x}$;
25) $f(x)=tg^5 x$;
26) $f(x)=\mathrm{ctg}^6 x$;
27) $f(x)=\frac{1}{\sin^2 x+\mathrm{tg}^2 x}$;
28) $f(x)=\frac{1}{2\sin x-\cos x+5}$;
29) $f(x)=\frac{1}{1+\frac{3}{5}\cos x}$;
30) $f(x)=\frac{1}{1+\frac{5}{4}\cos x}$;
31) $f(x)=\frac{1}{1+\cos x}$;
32) $f(x)=\frac{1}{3\sin x+4\cos x+5}$;
33) $f(x)=\frac{1}{\sin x+\cos x+1}$;
34) $f(x)=\frac{1}{3\sin x+\cos x+5}$;
35) $f(x)=\frac{1}{5+4\sin x}$;
36) $f(x)=\frac{2-\sin x}{2+\cos x}$;
37) $f(x)=\frac{1}{\sin x(2+\cos x-2\sin x)}$;
38) $f(x)=\frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}$;
39) $f(x)=\frac{1}{8+7\cos x-4\sin x}$;
40) $f(x)=\frac{1}{5\sin x+12\cos x}$;
41) $f(x)=\frac{\sin x}{2\cos x+\sin x+3}$;
42) $f(x)=\frac{1}{1+2\mathrm{tg}\, x}$;
43) $f(x)=\frac{2\sin x+3\cos x}{6\cos x-5\sin x}$;
44) $f(x)=\frac{\sin x+\cos x-1}{\sin x-\cos x+1}$;
45) $f(x)=\frac{\sin x}{\sin x+2\cos x+3}$;
46) $f(x)=\frac{\sin x+\cos x+1}{\sin x-2\cos x+3}$;
47) $f(x)=\frac{\sin^2 x+\sin 2x+3\cos^2 x}{\sin x-2\cos x}$;
48) $f(x)=\frac{4\sin^2 x-\sin 2x}{\sin x+2\cos x}$.

Розділ 3.5. Інтегрування різних типів функцій

Короткі теоретичні відомості

В цьому розділі будуть розглянуті приклади пошуків первісних для інших типів функцій та комбінацій розглянутих раніше.

Задачі

21. Знайдіть первісні від функції $f: R \to R$, якщо:

1) $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{2+\sin 2x}}$;

2) $f(x) = \frac{\sin^3 x}{\cos x \cdot \sqrt[3]{\cos x}}$;

3) $f(x) = \frac{\cos^3 x}{\sqrt[5]{\sin x}}$;

4) $f(x) = \sqrt{\mathrm{tg}^3 x}$;

5) $f(x) = \mathrm{e}^x \mathrm{sh}\, x \sin x$;

6) $f(x) = \mathrm{e}^{2x} \mathrm{sh}\, x \cos 3x$;

7) $f(x) = \mathrm{e}^{3x} \mathrm{ch}\, 4x \cos 5x$;

8) $f(x) = \mathrm{e}^x \mathrm{ch}\, x \cos 2x$;

9) $f(x) = x\mathrm{e}^x \sin x$;

10) $f(x) = x^2 \mathrm{e}^{3x} \cos 2x$;

11) $f(x) = x^2 \mathrm{e}^x \cos 2x$;

12) $f(x) = (2x+1)\mathrm{e}^{-x} \sin x$;

13) $f(x) = \frac{1}{(1+\mathrm{e}^x)^3}$;

14) $f(x) = \frac{\mathrm{e}^{2x}}{1+\mathrm{e}^x}$;

15) $f(x) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}+\mathrm{e}^{\frac{x}{3}}+\mathrm{e}^{\frac{x}{6}}}$;

16) $f(x) = \frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}+1}{\left(1+\mathrm{e}^{\frac{x}{4}}\right)^2}$;

Розділ 3.6. Первісна в широкому розумінні

Короткі теоретичні відомості

Внаслідок зв'язку між похідною та первісною (інтегралом Ньютона-Лейбніца) можна стверджувати, що первісна неперервної функції на проміжку повинна бути неперервною і навіть диференційованою. Але тоді, якщо, $[a,b] \xrightarrow{F} R$ є первісною функції $[a,b] \xrightarrow{f} R$,то $\forall x \in [a,b]\ F'(x) = f(x)$. Але, за теоремою Дарбу, $F'(x)$ приймає всі проміжні значення між $F'(a) = f(a)$ та $F'(b) = f(b)$ (хоча може бути розривною). Тому, навіть найпростіші кусково неперервні функції ($\operatorname{sgn} x$, $[x]$) можуть не мати первісної, бо не приймають усіх проміжних значень. Узагальнимо це поняття.

Нехай $[a,b]$ – деякий проміжок, функція $[a,b] \xrightarrow{F} R$ називається ***<u>первісною в широкому розумінні</u>*** функції $[a,b] \xrightarrow{f} R$, якщо F – неперервна і має похідну F', яка дорівнює f в усіх точках множини $[a,b]$, за виключенням , можливо, не більш як зліченої множини $X \subset [a,b]$.

Теорема 1. *(Зв'язок між первісними в широкому розумінні)*

Нехай F_1, F_2 –первісні в широкому розумінні функції $[a,b] \xrightarrow{F} R$, тоді $\exists C \in R: \forall x \in [a,b]\ F_2(x) = F_1(x) + C$.

Задачі

22. Знайдіть первісну функції $f: \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ на D_f, якщо D_fє зв'язна множина, інакше треба знайти первісну на деякій множині $X \subset D_f$. Якщо первісна не існує, то знайдіть її первісну в широкому розумінні на зв'язній множині $X \subset D_f$, якщо:

1) $f(x) = x|x|$;
2) $f(x) = (x + |x|)^2$;
3) $f(x) = \operatorname{sgn} x$;
4) $f(x) = x^2|x|$;
5) $f(x) = \mathrm{e}^{-|x|}$;
6) $f(x) = \max\{1, x\}$;
7) $f(x) = \min\{x, x^2\}$;
8) $f(x) = [x] \cdot |\sin \pi x|$;
9) $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, |x| \le 1, \\ 1 - |x|, |x| > 1; \end{cases}$
10) $f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-x}, x < 0, \\ x\mathrm{e}^{x^2} + 1, |x| \ge 0; \end{cases}$
11) $f(x) = \begin{cases} 1, \ x < -1, \\ \mathrm{e}^x, -1 \le x \le 0, \\ \mathrm{e}^{2x}, x > 0; \end{cases}$
12) $f(x) = \begin{cases} \cos \pi x\ 1, \ x < -1, \\ 1, -1 \le x \le 1, \\ \ln x, x > 1; \end{cases}$
13) $f(x) = |\sin x|$;
14) $f(x) = [x]$;
15) $f(x) = \operatorname{sgn} \frac{x^2-1}{x^2-4}$;
16) $f(x) = \operatorname{sgn}(x^2 - 1)(x^2 - 4)$;
17) $f(x) = [\mathrm{e}^x]$;
18) $f(x) = x[x]$;
19) $f(x) = (-1)^{[x]}$;
20) $f(x) = \{x\}$;
21) $f(x) = \min\{5 - x^2, 1, x^2\}$
22) $f(x) = \max\{x - 2, 6 - x - x^2\}$;
23) $f(x) = \begin{cases} x, x \le 0, \\ \frac{2x+1}{x-1}, x > 0; \end{cases}$
24) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, x \le 0, \\ \frac{2x}{x+1}, x > 0; \end{cases}$
25) $f(x) = \begin{cases} x, x \le 0, \\ x^5, x > 0; \end{cases}$
26) $f(x) = \begin{cases} x, x \le 1, \\ x^5, x > 1; \end{cases}$
27) $f(x) = x^4 \operatorname{sgn} x$;
28) $f(x) = |x|^3$;

29) $f(x) = |1 + x| + |2 - x|$;
30) $f(x) = |x| + |1 - x|$;
31) $f(x) = \min\{x^2, x\}$
32) $f(x) = \max\{x^2, x^4\}$;
33) $f(x) = \big||x^2 - 1| - 4\big|$;
34) $f(x) = \big||x| - 1\big|$;
35) $f(x) = \text{arctg tg } x$;
36) $f(x) = f(x) = \text{arcctg ctg } x$.

Розділ 4. Інтеграл Рімана

Розділ 4.1. Визначення та властивості інтеграла Рімана

Короткі теоретичні відомості

Множина точок $P = P_{[a;b]} = \{x_k \mid k = \overline{0,n}\}$, де $a = x_0 \le x_1 \le \ldots \le x_n$ називається ***розбиттям сегмента*** $[a,b]$. Множина точок $\xi_P = \{\xi_k \mid k = \overline{1,n}\}: \forall k = \overline{1,n}\ \ \xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ називається ***сукупністю проміжних точок***. Величина $||P|| = \max\limits_{k=0,n-1}(x_{k+1} - x_k)$ називається ***діаметром (нормою) розбиття***. Нехай $[a,b] \xrightarrow{f}$ R. Сума $S_p(f, \xi_p) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\,(x_{k+1} - x_k)$ називається ***інтегральною сумою Рімана***. Число $I \in$ R називається ***інтегралом Рімана*** функції f на сегменті $[a,b]$, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall P = P_{[a,b]} : \|P\| < \delta\ \forall \xi_p \Rightarrow \left|I - S_p(f, \xi_p)\right| < \varepsilon.$$

Нехай $[a,b] \xrightarrow{f}$ R – обмежена функція, $P = P_{[a,b]}$ – деяке розбиття сегмента $[a,b]$, позначимо значення $M_k = \sup\limits_{x \in [x_k, x_{k+1}]} f(x)$, $m_k = \inf\limits_{x \in [x_k, x_{k+1}]} f(x)$, $k = \overline{0, n-1}$. ***Верхньою*** та ***нижньою інтегральними сумами Дарбу***, відповідними розбиттю P для функції f, називаються відповідно суми:

$$\overline{S_p}(f) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k\,, \underline{S_p}(f) = \sum_{k=1}^{n-1} m_k \Delta x_k,$$

де $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$, $k = \overline{0, n-1}$.

Розбиття P^* сегмента $[a,b]$ називається ***продовженням розбиття*** $\boldsymbol{P}$ цього сегмента, якщо $P \subset P^*$; розбиття P є ***спільним*** для розбиттів P_1 і P_2, якщо $P = P_1 \cup P_2$.

Нехай $[a,b] \xrightarrow{f}$ R – обмежена функція, Ω – сукупність усіх розбиттів проміжку $[a,b]$. Числа $\underline{\int} f\mathrm{dx} = \sup\limits_{P \in \Omega} \underline{S_P}(f)$, $\overline{\int} f\mathrm{dx} = \inf\limits_{P \in \Omega} \overline{S_P}(f)$ називаються відповідно ***верхнім*** та ***нижнім інтегралом Дарбу функції*** $\boldsymbol{f}$ ***на сегменті*** $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$. Функція $[a,b] \xrightarrow{f}$ R називається ***інтегрованою за Дарбу*** на $[a;b]$, якщо $\underline{\int} f\mathrm{dx} = \overline{\int} f\mathrm{dx}$, а спільне значення цих інтегралів називається ***інтегралом Дарбу*** і позначається $\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}$.

Теорема 1. *(Еквівалентність інтегралів Рімана та Дарбу)*

Якщо обмежена функція $[a,b] \xrightarrow{f}$ R інтегрована за Ріманом та за Дарбу на сегменті $[a,b]$, то ці інтеграли рівні.

Множину всіх інтегрованих за Ріманом функцій на $[a;b]$ позначимо через $R[a;b]$.

Теорема 2. *(Лінійність інтеграла Ріманом)*

Якщо функції $f, g \in R[a;b]$, то $\forall \alpha, \beta \in$ R функція $\alpha f + \beta g \in R[a;b]$ та справджується рівність:

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)\,\mathrm{dx} = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} + \beta \int_a^b g(x)\,\mathrm{dx}.$$

Теорема 3. *(Критерій інтегрованості функції за Ріманом)*

$$f \in R[a;b] \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists P = P_{[a,b]}\colon 0 \le \overline{S_P}(f) - \underline{S_P}(f) < \varepsilon.$$

Мірою μ сегмента $[a,b]$ (інтервалу (a,b), півінтервалів $[a,b),(a,b]$) називатимемо його довжину: $\mu([a,b]) = b - a$. Множина $X \subset$ R має ***жорданову*** (μ_J) ***міру нуль***, якщо $\forall \varepsilon > 0$ існує скінчене покриття множини X скінченною кількістю інтервалів $\left(I_j\right)_{j=\overline{1,n}}$, сумарна довжина яких не перевищує ε, тобто $\sum_{j=1}^{n} \mu(I_j) < \varepsilon$. Множина $X \subset R$ має лебегову міру (μ_L) нуль, якщо $\forall \varepsilon > 0$ існує покриття цієї множини не більш ніж зліченою кількістю інтервалів $\left(I_j\right)_{j \in N}$, сумарна довжина яких не перевищує ε, тобто $\forall n \in$ N $\sum_{j=1}^{n} \mu(I_j) < \varepsilon$.

Властивості. *(Множин лебегової та жорданової міри нуль)*

1) Якщо множина X має лебегову (жорданову) міру нуль, і множина $X_1 \subset X$, то і X_1 має лебегову (жорданову) міру нуль.

2) Якщо множина $X = \bigcup_{j=1}^{\infty} X_j$ $\left(X = \bigcup_{j=1}^{n} X_j\right)$ і кожна множина X_j має лебегову (жорданову) міру нуль, то множина X також має лебегову (жорданову) міру нуль.

3) Будь-яка множина жорданової міри нуль є множиною лебегової міри нуль.

4) Будь-яка злічена (скінчена) множина точок має лебегову (жорданову) міру нуль.

5) Існує більш ніж злічена (більш ніж скінчена) множина, що має лебегова (жорданову) міру нуль.

Теорема 4. *(Лебега, критерій інтегрованості за Ріманом)*

Нехай $[a,b] \xrightarrow{f}$ R – обмежена функція і E – множина її точок розриву. Тоді $f \in R[a,b]$ $\Leftrightarrow \mu_L(E) = 0$.

Задачі

23. Доведіть такі властивості інтегрованих за Ріманом функцій:

1) якщо функція $[a,b] \xrightarrow{f}$ R інтегрована в розумінні Ньютона-Лейбніца на $[a,b]$, то $\forall P = P_{[a,b]}$ існує така сукупність проміжних точок ξ_p, що справджується рівність:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\,(x_{k+1} - x_k) = S_p\left(f, \xi_p\right);$$

2) якщо інтеграли Рімана та Ньютона-Лейбніца функції $[a,b] \xrightarrow{f}$ R існують одночасно, то вони рівні;

3) якщо P_1, P_2 – деякі розбиття сегменту $[a,b]$, а функція $[a,b] \xrightarrow{f}$ R – обмежена, тоді:

а) спільне розбиття P для розбиттів P_1, P_2 є продовженням кожного з цих розбиттів;

б) якщо P – продовження розбиття P_1, то

$$\underline{S_{P_1}}(f) \le \underline{S_P}(f) \text{ та } \overline{S_{P_1}}(f) \ge \overline{S_P}(f);$$

в) $\underline{S_{P_1}}(f) \le \overline{S_{P_2}}(f)$;

г) $\underline{\int} f\,\mathrm{dx}, \overline{\int} f\,\mathrm{dx} \in \mathrm{R}$;

д) $\underline{\int} f\,\mathrm{dx} \leq \overline{\int} f\,\mathrm{dx}$;

4) нехай функції $f, g \in R[a,b]$, тоді:

а) $fg \in R[a,b]$;

б) якщо $\forall x \in [a,b]\ f(x) \leq g(x)$, то $\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{dx}$;

5) нехай функція $f \in R[a,b]$, тоді:

а) $|f| \in R[a,b]$, при цьому справджується нерівність:

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{dx};$$

б) $\forall [a_1,b_1] \subset [a,b]\ f \in R[a_1,b_1]$;

в) $\forall c \in (a,b)\ f \in R[a,c] \cap R[c,b]$ та справджується рівність:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} = \int_a^c f(x)\,\mathrm{dx} + \int_c^b f(x)\,\mathrm{dx};$$

г) якщо $\forall x \in [a,b]\ f(x) \geq 0$, то $\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} \geq 0$, при цьому, якщо $\exists x_0 \in [a,b]$: $f \in \mathrm{C}(x_0)$ та $f(x_0) > 0$, то $\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} > 0$;

д) якщо $\exists m, M$: $\forall x \in [a,b]\ m \leq f(x) \leq M$, то

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} \leq M(b-a);$$

е) якщо $\exists m, M$: $\forall x \in [a,b]\ m \leq f(x) \leq M$ та $g \in \mathrm{C}[m,M]$, то $g \circ f \in R[a,b]$;

є) ця умова рівносильна тому, що $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$: $\forall P_1, P_2$ – розбиттів сегменту $[a,b]$: $\|P_1\| < \delta, \|P_2\| < \delta$ та $\forall \xi_{p_1}, \xi_{p_2} \Rightarrow \left|S_{p_1}(f, \xi_{p_1}) - S_{p_2}(f, \xi_{p_2})\right| < \varepsilon$ (*умова Коші*);

6) нехай функція $f \in \mathrm{C}[a,b]$ та невід'ємна на $[a,b]$ і $P_{[a;b]} = \{x_k \mid k = \overline{0,n}\}$ – деяке розбиття, то:

а) якщо функція f – зростаюча, то

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} \leq \sum_{k=1}^{n} f(x_k)(x_k - x_{k-1});$$

б) якщо функція f – спадна, то

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k)(x_k - x_{k-1}) \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} \leq \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}).$$

24. Використовуючи властивості інтегральних сум, доведіть твердження:

1) якщо функція $[0,1] \xrightarrow{f} \mathrm{R}$ обмежена та монотонна на $[0,1]$, то при $n \to \infty$

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{dx} - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right);$$

2) якщо функція $f \in \mathrm{C}^{(2)}(1,+\infty)$ та $\forall x > 1\ f(x) \geq 0, f'(x) \geq 0, f''(x) \geq 0$, то при $n \to \infty$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(k) = \frac{1}{2}f(n) + \int_1^n f(x)\,\mathrm{dx} + \mathrm{O}(1);$$

3) якщо функція $f \in \mathrm{C}^{(2)}(1,+\infty)$ та $\forall x > 1\ f(x) \geq 0, f'(x) \geq 0, f''(x) \geq 0$, то при $n \to \infty$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(k) = \frac{1}{2}f(n) + \int_1^n f(x)\,\mathrm{dx} + \mathrm{O}(1);$$

4) якщо функція $f \in \mathrm{C}^{(1)}[a,b]$ та

$\Delta_n = \int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} - \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right)$, то

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot \Delta_n = \frac{b-a}{2}\left(f(b) - f(a)\right);$$

5) якщо функція $f \in \mathrm{C}^{(2)}[a,b]$ та

$\Delta_n = \int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} - \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + \frac{(2k-1)}{n}(b-a)\right)$, то

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \cdot \Delta_n = \frac{(b-a)^2}{2}\left(f'(b) - f'(a)\right);$$

6) якщо для деякого $c \in [0,1]$ функція f зростає на проміжку $[0,c]$, спадає на проміжку $[c,1]$ та $f(c) = M$, то для різниці $\Delta_n = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{dx} - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ справджуються такі нерівності:

$$-\frac{1}{n}\big(M - f(0)\big) \leq \Delta_n \leq \frac{1}{n}\big(M - f(1)\big);$$

7) якщо функція $f \in R[a,b]$ та $\forall [\alpha,\beta] \subset [a,b]\ \exists c \in [\alpha,\beta]$: $f(c) = 0$, то $\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} = 0$;

8) функція $f \in R[a,b]$ та $\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} > 0$, тоді $\exists [\alpha,\beta] \subset [a,b]\ \forall c \in [\alpha,\beta]$: $f(c) > 0$, якщо

а) $f \in \mathrm{C}[a,b]$;

б) f не обов'язково неперервна на $[a,b]$ функція;

9) нехай функція $f \in R[a,b]$ та додатна, позначимо $\forall n \in \mathrm{N}\ \delta_n = \frac{1}{n}(b-a)$ та $\forall\ k = \overline{1,n}\ f_{kn} = f(a + k\delta_n)$ тоді:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f_{kn} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} f_{kn}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f(x)\mathrm{dx}}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sum_{k=1}^{n} f_{kn}} = \frac{(b-a)}{\int_a^b \frac{\mathrm{dx}}{f(x)}}$;

г) $\lim\limits_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n}(1 + f_{kn}\delta_n) = \mathrm{e}^{\int_a^b f(x)\mathrm{dx}}$;

10) якщо (a_n) – зростаюча арифметична прогресія додатних чисел, $\xi_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_n$, $\eta_n = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_n}$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\eta_n}{\xi_n} = \frac{2}{\mathrm{e}}$;

11) якщо α – деяка стала, то $\lim\limits_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{(n+k)\alpha}{(n+k)\alpha - 1} = \mathrm{e}^{\frac{1}{\alpha}\int_a^b \frac{\mathrm{dx}}{1+x}}$;

12) якщо $\forall n \in \mathrm{N}$ справджується нерівність:

а) $\frac{2}{\pi} - \frac{1}{n} < \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \cos\frac{k\pi}{2n} < \frac{2}{\pi}$;

б) $1 - \frac{1}{n} < \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} < 1$;

13) якщо послідовність (a_n) задовольняє умову $b = a_0 \le a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n$, то

а) $\sum_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{a_{k-1}}{a_k}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt[m]{a_k}} < \frac{1}{m}$, де $b = 1, m \in \mathrm{N}$;

б) $\sum_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{a_{k-1}}{a_k}\right) \cdot \frac{1}{a_k^m} < \frac{1}{m}$, де $b = 1, m \in \mathrm{N}$;

в) $\sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k-1}) \cdot \mathrm{e}^{-ak} \le 1$, де $b = 0, a > 0$.

25. Для заданої функції $[a,b] \xrightarrow{f} \mathrm{R}$ побудуйте вказані інтегральні суми $S_n, n \in \mathrm{N}$ для заданого розбиття $P_{[a;b]}$ та сукупності проміжних точок ξ_P, якщо

1) S_n – верхня інтегральна сума Дарбу та:

а) $f(x) = x^3$, $[a,b] = [2,3]$, $P_{[a;b]}$ – рівномірне розбиття проміжку на n частин;

б) $f(x) = \frac{1}{x}$, $[a,b] = [-3,-1]$, $P_{[a;b]}$ – рівномірне розбиття проміжку на $2n$ частин;

в) $f(x) = x^2$, $[a,b] = [-2,1]$, $P_{[a;b]}$ – рівномірне розбиття проміжку на $3n$ частин;

2) S_n – нижня інтегральна сума Дарбу та:

а) $f(x) = \sin x$, $[a,b] = [-1,1]$, $P_{[a;b]}$ – рівномірне розбиття проміжку на n частин;

б) $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$, $[a,b] = [0,6]$, $P_{[a;b]}$ – рівномірне розбиття проміжку на $2n$ частин;

в) $f(x) = |x|$, $[a,b] = [-1,3]$, $P_{[a;b]}$ – рівномірне розбиття проміжку на $4n$ частин;

3) S_n –інтегральна сума Рімана, де ξ_P – ліві точки кожного проміжку розбиття $P_{[a;b]}$ та:

а) $f(x) = \operatorname{sgn} x$, $[a,b] = [-2,3]$, $P_{[a;b]}$ – рівномірне розбиття проміжку на n частин;

б) $f(x) = [x]$, $[a,b] = \left[-\frac{1}{2}, 2\right]$, $P_{[a;b]}$ – рівномірне розбиття проміжку на n частин;

в) $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $[a,b] = [1,4]$, $P_{[a;b]}$ –розбиття проміжку на n частин, де точки розбиття утворюють геометричну прогресію;

г) $f(x) = \ln x$, $[a,b]$, $a > 0$, $P_{[a;b]}$ –розбиття проміжку на n частин, де точки розбиття утворюють геометричну прогресію;

4) S_n –інтегральна сума Рімана, де ξ_P – праві точки кожного проміжку розбиття $P_{[a;b]}$ та:

а) $f(x) = 1 + x$, $[a,b] = [1,4]$, $P_{[a;b]}$ – рівномірне розбиття проміжку на n частин;

б) $f(x) = x^2$, $[a,b] = [-1,2]$, $P_{[a;b]}$ – рівномірне розбиття проміжку на n частин;

в) $f(x) = \frac{1}{x}$, $[a,b] = \left[\frac{1}{2}, 2\right]$, $P_{[a;b]}$ –розбиття проміжку на n частин, де точки розбиття утворюють геометричну прогресію;

г) $f(x) = x^m$, $m \neq -1$, $[a,b]$, $a > 0$, $P_{[a;b]}$ –розбиття проміжку на n частин, де точки розбиття утворюють геометричну прогресію.

26. Для заданої функції $[a,b] \xrightarrow{f} \mathrm{R}$ знайдіть різницею між верхнею та нижньою інтегральними сумами Дарбу для рівномірного розбиття $P_{[a;b]}$ проміжку на n частин, якщо

1) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathrm{Q}, \\ 0, & x \in \mathrm{R}\backslash\mathrm{Q}, \end{cases}$, $[a,b] = [0,1]$;

2) $f(x) = \begin{cases} -x, & x \in \mathrm{Q}, \\ x, & x \in \mathrm{R}\backslash\mathrm{Q}, \end{cases}$, $[a,b] = [0,2]$;

3) $f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathrm{Q}, \\ 0, & x \in \mathrm{R}\backslash\mathrm{Q}, \end{cases}$, $[a,b] = [-1,1]$, $n = 100$;

4) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in \mathrm{Q}, \\ x, & x \in \mathrm{R}\backslash\mathrm{Q}, \end{cases}$, $[a,b] = [0,1]$, $n = 200$;

5) $f(x) = x$, $[a,b] = [0,10]$; ***6)*** $f(x) = 2^x$, $[a,b] = [0,1]$;

7) $f(x) = \sin x$, $[a,b] = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$; ***8)*** $f(x) = \frac{1}{x}$, $[a,b] = [1,2]$.

27. Знайдіть інтеграли Рімана, розглядаючи їх як границі інтегральних сум:

1) $\int_{-2}^{3} \operatorname{sgn} x \, dx$; ***2)*** $\int_{-\frac{1}{2}}^{2} [\, x \,] \, dx$;

3) $\int_{1}^{3} 2x \, dx$; ***4)*** $\int_{-1}^{1} 2 \, dx$;

5) $\int_{-1}^{4} (1 + x) \, dx$; ***6)*** $\int_{-1}^{2} x^2 \, dx$;

7) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx$; ***8)*** $\int_{-1}^{2} a^x \, dx$;

9) $\int_{1}^{4} \frac{1}{x^2} \, dx$; ***10)*** $\int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{1}{x} \, dx$;

11) $\int_{a}^{b} x^m \, dx$; ***12)*** $\int_{a}^{b} \ln x \, dx$.

28. Використовуючи інтегральні суми Рімана, знайдіть границі $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$:

1) $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$; ***2)*** $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}$;

3) $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$; ***4)*** $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^p}{n^{p+1}}, p > 0$;

5) $S_n = \frac{3}{n} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{n}{n+3k}}$; ***6)*** $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{\sqrt{4n^2-k^2}}$;

7) $S_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{n+k}$; ***8)*** $S_n = \frac{1}{n^4} \sum_{k=1}^{n} k^2 \sqrt[3]{k^3+n^3}$;

9) $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln(n+k) - \ln n$; ***10)*** $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2} \mathrm{e}^{\frac{k}{n}}$;

11) $S_n = \frac{1}{n} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}}$; ***12)*** $S_n = \left(\prod_{k=1}^{2^n-1} \left(1 + \frac{k}{2^n}\right)\right)^{\frac{1}{2^n}}$;

13) $S_n = \frac{1}{n} \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} (n+k)}$; ***14)*** $S_n = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$;

15) $S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n}\right) \sin \frac{\pi k}{n^2}$; ***16)*** $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin\frac{\pi}{n} \sin\frac{k}{n}}{2+\cos\frac{k}{n}}$;

17) $S_n = \sum_{k=1}^{n} \sin \frac{k\pi}{n} \cdot \operatorname{tg} \frac{k\pi}{n^2} \cdot \cos \frac{k\pi}{n^3}$; ***18)*** $S_n = \sum_{k=1}^{n} \sin \frac{k}{n^2} \cdot \operatorname{arcctg} \frac{k}{n^3}$;

19) $S_n = n \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right) \operatorname{arctg} \frac{k^2}{n^3}$; ***20)*** $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \cos \frac{k}{n^3} \cdot \sin \frac{k}{n}$;

21) $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2^{\frac{k}{n}}}{n+\frac{1}{k}}$; ***22)*** $S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right) \operatorname{arctg} \frac{k}{n^2}$;

23) $S_n = n^2 \sum_{k=1}^{n} \sin\frac{k}{n} \cdot \sin\frac{k}{n^2} \cdot \sin\frac{k}{n^3}$; ***24)*** $S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right) \sin\frac{k}{n^2}$;

25) $S_n = n \sum_{k=1}^{n} \cos\frac{k}{n^2} \cdot \sin\frac{k^2}{n^3}$; ***26)*** $S_n = n \sum_{k=1}^{n} \cos\frac{k}{n^2} \cdot \sin\frac{k}{n^2}$;

27) $S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right) \operatorname{arctg}\frac{k^2}{n^3}$; ***28)*** $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{k}{n}\right) \operatorname{tg}\frac{k^2}{n^3}$;

29) $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n^4}{n^4+k^4} \ln\left(1+\frac{k}{n^3}\right) \mathrm{e}^{\frac{k}{n^2}}$; ***30)*** $S_n = n^2 \sum_{k=1}^{n} \sin\frac{k}{n^3} \cdot \operatorname{arcctg}\frac{k^2}{n^4}$;

31) $n \sum_{k=1}^{n} \sin\frac{k}{n} \cdot \sin\frac{k}{n^2}$; ***32)*** $S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right) \sin\frac{k}{n^2}$;

33) $n \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^4+k^4} \cdot \operatorname{arctg}\frac{k}{n} \cdot \sin\frac{\sqrt{k}}{n\sqrt{n}}$.

29. Доведіть твердження:

1) множини лебегової та жорданової міри нуль на мають такі властивості:

а) якщо для деякої множини A $\mu_J(A) = 0$, то $\mu_L(A) = 0$;

б) якщо множина A – це скінченний набір точок, то $\mu_J(A) = 0$;

в) якщо множина A – це зліченний набір точок, то $\mu_L(A) = 0$;

г) якщо $\forall i = \overline{1,n}$ $\mu_J(A_i) = 0$, то $\mu_J(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = 0$;

д) якщо $\forall i \in \mathrm{N}$ $\mu_L(A_i) = 0$, то $\mu_L(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = 0$;

е) існує злічена множина A, для якої $\mu_J(A) = 0$;

є) існує більш ніж злічена множина A, для якої $\mu_L(A) = 0$;

ж) існує більш ніж злічена множина A, для якої $\mu_J(A) = 0$;

з) якщо для компакта K $\mu_L(K) = 0$, то $\mu_J(K) = 0$;

и) якщо множина A замкнена та $\mu_L(A) = 0$, то вона ніде не щільна на R.

2) якщо для функцій $[a,b] \overset{f,g}{\to} \mathbf{R}$ $\mu_J(E) = 0$, де $E = \{x \mid f(x) \neq g(x)\}$, то $f, g \in R[a,b]$ або $f, g \notin R[a,b]$;

3) твердження попереднього пункту не справджується, якщо замість умови $\mu_J(E) = 0$, має місце умова $\mu_L(E) = 0$;

4) якщо функція f – T-періодична на **R** та інтегрована за Ріманом на сегменті $[0,T]$, то для довільного a справджується рівність:

$$\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{dx} = \int_0^T f(x)\,\mathrm{dx};$$

5) якщо функція f – T-періодична та неперервна на **R,** то функція $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{dt}$ є сумою T-періодичної та лінійної функцій;

6) якщо функція f – неперервна та невід'ємна на $[a,b]$ та $\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}=0$, то $\forall x\in[a,b]\ f(x)=0$;

7) якщо функція f – неперервна на $[a,b]$ та $\forall[c,d]\subset(a,b)\ \int_c^d f(x)\,\mathrm{dx}=0$, то $\forall x\in[a,b]\ f(x)=0$;

8) якщо функція f – неперервна на $[a,b]$ та для довільної функції $g(x)\in C[a,b]\ \int_c^d f(x)g(x)\,\mathrm{dx}=0$, то $\forall x\in[a,b]\ f(x)=0$;

9) якщо функції $f,g\in R[a,b]$ та $\forall x\in[a,b]\ f(x)\le g(x)$, при цьому $f(x_0)<g(x_0)$, де $f,g\in C(x_0)$, то $\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}<\int_a^b g(x)\,\mathrm{dx}$;

10) якщо функція $f\in R[a,b]$, то $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$: $\forall[c,d]\subset(a,b)$, для якого справджується умова $0<d-c<\delta$ випливає, що $\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}<\varepsilon$;

11) якщо функція $f\in R[a,b]$, F – її ПШР, при цьому $\{x\mid F'(x)\neq f(x)\}=\{c_i\mid i=\overline{1,n}\}$, де $n\in\mathbf{N}$, і усі точки c_i є точками розриву першого роду, тоді

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}=F(b-0)-F(a+0)+\sum_{i=1}^{n}\big(F(c_i+0)-F(c_i-0)\big);$$

12) якщо функція $f\in R[a,b]$, то точки її неперервності на $[a,b]$ утворюють скрізь щільну множину;

13) якщо функції $f,g\in C^{(n+1)}[a,b]$, то справджується формула:

$$\int_a^b f(x)g^{(n+1)}(\mathrm{x})\mathrm{dx}=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x)\Big|_a^b-(-1)^{n+1}\int_a^b f^{(n+1)}(\mathrm{x})g(x)\mathrm{dx},$$

тут $f^{(0)}(x)=f(x)$;

14) якщо функція $f\in C[a,b]$, монотонно зростає на $[a,b]$ та $f(a)>0$, то справджується формула:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}+\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(x)\,\mathrm{dx}=bf(b)-af(a).$$

30. З'ясуйте, чи мають наведені множини жорданову, лебегову міру 0, де

1) $\mathrm{Q}\cap[0,1]$;

2) $\mathrm{Q}\cap(0,100)$;

3) $(\mathrm{R}\backslash\mathrm{Q})\cap[-1,1]$;

4) $\left(0,\frac{1}{100000}\right)$;

5) $\left\{\frac{2^n}{n!}\mid n\in\mathrm{N}\right\}$;

6) $\left\{\pm\frac{1}{n}\mid n\in\mathrm{N}\right\}$;

7) $\left\{\frac{(-1)^n}{2n} \mid n \in \mathrm{N}\right\}$;

8) $\left\{\frac{(2n)!!}{\mathrm{e}^n} \mid n \in \mathrm{N}\right\}$;

9) $\left\{\frac{n}{5^{-n}} \mid n \in \mathrm{N}\right\}$;

10) $\left\{\frac{6^n}{(2n+1)!!} \mid n \in \mathrm{N}\right\}$;

11) $\left\{\frac{n^{1000}}{(1{,}01)^n} \mid n \in \mathrm{N}\right\}$;

12) $\left\{\frac{n^3}{(0{,}1)^n} \mid n \in \mathrm{N}\right\}$;

13) $\bigcup_{n=1}^{\infty}(2n, 2n+1)$;

14) $\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{2n+1}, \frac{2n+1}{2n+2}\right)$;

15) $[-1,1]\setminus \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$;

16) $[-1,1]\setminus \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n}, 1-\frac{1}{n}\right)$;

17) $[-1,1]\setminus \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-1, 1-\frac{1}{n}\right)$;

18) $\bigcup_{n=1}^{\infty}(1,2n) \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty}(1,n)$;

19) $\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(-1-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right)\setminus(-1,1)$;

20) $\left\{\frac{1}{n}, \frac{n-1}{n} \mid n \in \mathrm{N}\right\}$;

21) N;

22) Z;

23) K_3;

24) K_{10};

25) $[0,1]\setminus K_3$;

26) $\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty}\left\{n-\frac{1}{k}\right\}$;

27) $\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty}\{n+q_k \mid q_k -$ це $k-$ те раціональне число$\}$?

31. З'ясуйте, чи буде функція $[a,b] \xrightarrow{f} \mathbf{R}$ інтегрованою за Ріманом на $[a,b]$, де

1) $f(x)=\begin{cases}\operatorname{sgn}\left(\sin\frac{\pi}{x}\right), & x\neq 0,\\ 1, & x=0,\end{cases}$ $[a,b]=[-1,1]$;

2) $f(x)=\begin{cases}\left\{\frac{1}{x}\right\}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ $[a,b]=[0,2]$;

3) $f(x)=\begin{cases}\left[\frac{2}{x}\right], & x\neq 0,\\ 1, & x=0,\end{cases}$ $[a,b]=[0,10]$;

4) $f(x)=\begin{cases}\left[\frac{2}{x}\right]-2\cdot\left[\frac{1}{x}\right], & x\neq 0,\\ 2, & x=0,\end{cases}$ $[a,b]=[0,2]$;

5) $f(x)=\begin{cases}a_n, & x\in\left(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right],n\in\mathbf{N},\\ 1, & x=0,\end{cases}$, $[a,b]=[0,1]$ де

а) $a_n=\frac{1-\mathrm{e}^n}{1+\mathrm{e}^n}$;

б) $a_n=\frac{n^2+1}{2n}$;

в) $a_n=\frac{2^n}{1+3^{-n}}$;

г) $a_n=\frac{n^2+1}{n^3+3n+1}$;

6) $D(x)$ – функція Діріхле, $[a,b]=[0,1]$ та:

а) $f(x)=D(x)$;

б) $f(x)=D(x)(D(x)-1)$;

в) $f(x)=\left(D(x)-\frac{1}{2}\right)^2$;

г) $f(x)=\frac{1}{x\left(D(x)-\frac{1}{2}\right)}$;

д) $f(x)=\frac{xD(x)}{(x-1)}$;

е) $f(x)=\frac{1}{(x-2)(D(x)+1)}$;

7) $R(x)$ – функція Рімана, $[a,b]=[0,1]$ та:

а) $f(x)=R(x)$; ***б)*** $f(x)=\operatorname{sgn} R(x)$;

8) $f(x)=\tau(x)$ – функція Кантора, $[a,b]=[0,1]$;

9) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2^n}, & x\in A_n,\ A_n-\text{множина,що видаляються на } n-\text{му кроці при побудові } K_3,\\ x^3, & x=0,\end{cases}$
$[a,b]=[0,2]$;

10) $f(x)=\max\{g(x),h(x)\}$, де $f,g\ \in R[a,b]$;

11) f – функція, для якої $\forall x_0\in[a,b]\ \exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x)\in \mathbf{R}$.

32. Доведіть нерівності:

1) якщо функції $f,g\in R[a,b]$, то

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{dx}\right)^2\le\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{dx}\cdot\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{dx}$$

(нерівність Шварца);

2) якщо функції $f\in C^{(1)}[a,b]$, то

$$\left(\sup_{a\le x\le b}|f(x)|\right)^2\le(b-a)\int_a^b(f'(x))^2\,\mathrm{dx};$$

3) якщо функції $f,g\in R[a,b]$ та додатні числа p,q задовольняють умову $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, то

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{dx}\le\left(\int_a^b|f(x)|^p\,\mathrm{dx}\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\int_a^b|f(x)|^q\,\mathrm{dx}\right)^{\frac{1}{q}}$$

(нерівність Гельдера);

4) якщо функції $f,g\in R[a,b]$ та число $p\ge1$, то

$$\left(\int_a^b|f(x)+g(x)|^p\,\mathrm{dx}\right)^{\frac{1}{p}}\le\left(\int_a^b|f(x)|^p\,\mathrm{dx}\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_a^b|g(x)|^p\,\mathrm{dx}\right)^{\frac{1}{p}}$$

(нерівність Мінковського);

33. З’ясуйте, чи справджуються твердження:

1) якщо функція $[a,b]\xrightarrow{f}\mathbf{R}$ розривна у кожній точці деякої відкритої множини $E\subset[a,b]$, то $f\notin R[a,b]$;

2) $f\in R[a,b]$, якщо:

а) $f\in R[c,d]$ для усіх c,d таких, що $a<c<d<b$;

б) $f \in R[c,d]$ для усіх c,d таких, що $a < c < d < b$ та f – обмежена на $[a,b]$;

3) якщо $\forall n \in \mathbf{N}$ функції $f_n \in R[a,b]$, $\exists M: \forall n \in \mathbf{N}$ та $\forall x \in [a,b]$ $|f_n(x)| \le M$, $\forall x \in [a,b]$ $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, то $f \in R[a,b]$;

4) якщо $f \in R[a,b]$ та для функції $[a,b] \xrightarrow{g} \mathbf{R}$ множина $E = \{x|\ f(x) \ne g(x)\}$ не більш ніж злічена, то $g \in R[a,b]$;

5) якщо $|f| \in R[a,b]$, то $f \in R[a,b]$;

6) якщо функції $[A,B] \xrightarrow{f} \mathbf{R}$, $[a,b] \xrightarrow{\varphi} \mathbf{R}$ такі, то $f \in R[A,B]$, $\varphi \in R[a,b]$, $E_\varphi \subset D_f$, $f \circ \varphi \in R[a,b]$;

7) якщо $f \in R[a,b]$ то $\forall \varepsilon > 0$ існують кусково-сталі функції φ та ψ, для яких справджуються такі умови: $\forall x \in [a,b]$ $\varphi(x) \le f(x) \le \psi(x)$ та $\int_a^b (\psi(x) - \varphi(x))\,\mathrm{dx} < \varepsilon$;

8) якщо $\forall x \in [a,b]$ $f(x) \ge 0$ та $\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} > 0$, то $\exists [c,d] \subset [a,b]$: $\forall x \in [c,d]$ $f(x) > 0$ за умови, що:

а) $f \in R[a,b]$; ***б)*** $f \in C[a,b]$;

9) існує функція $[a,b] \xrightarrow{f} \mathbf{R}$, для якої справджуються умови $\forall x \in [a,b]$ $f(x) \ne 0$ та $\frac{1}{f} \notin R[a,b]$ за умови, що

а) $f \in R[a,b]$; ***б)*** $f \in C[a,b]$;

10) існує функція $f \in C(0,+\infty)$, для якої справджуються умови:

а) $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a \in \mathbf{R}$ та $\exists \lim\limits_{X\to+\infty} \frac{1}{X}\int_0^X f(x)\,\mathrm{dx} = b \ne a,\ b \in \overline{\mathbf{R}}$;

б) $\exists \lim\limits_{X\to+\infty} \frac{1}{X}\int_0^X f(x)\,\mathrm{dx} = a \in \mathbf{R}$ та $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b \ne a,\ b \in \overline{\mathbf{R}}$;

в) $\exists \lim\limits_{X\to+\infty} \frac{1}{X}\int_0^X f(x)\,\mathrm{dx} = a \in \mathbf{R}$ та не існує $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$;

Розділ 4.2. Властивості інтегрованих за Ріманом функцій

Короткі теоретичні відомості

Теорема 1. *(Інтегрованість модуля)*

Якщо $f \in R[a,b]$, то $|f| \in R[a,b]$, при цьому справджується нерівність:

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx.$$

Теорема 2. *(Інтегрованість добутку)*

Якщо $\{f,g\} \subset R[a,b]$, то $f \cdot g \in R[a,b]$.

Теорема 3. *(Інтегрованість звуження)*

Якщо $f \in R[a,b]$, то $\forall [a',b'] \subset [a,b]\ f \in R[a',b']$.

Теорема 4. *(Адитивність по області інтегрування)*

Нехай $[a,b] \xrightarrow{f} R$ і $c \in (a,b)$, якщо $f \in R[a,c] \cap R[c,b]$, то $f \in R[a,b]$ і

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Теорема 5. *(Інтеграл Рімана з нерівними функціями)*

Якщо $\{f,g\} \subset R[a,b]$ і $\forall x \in [a,b]\ f(x) \le g(x) \Rightarrow$

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx.$$

Теорема 6. *(Основна формула інтегрального числення)*

Якщо $f \in R[a,b]$ і множина точок розриву не більш ніж злічена, F – будь-яка первісна в широкому розумінні функції f на $[a,b]$, тоді виконується рівність (***формула Ньютона-Лейбніца***):

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a).$$

Теорема 7. *(Заміна змінної в інтегралі Рімана)*

Нехай $f \in C[a,b]$, $[\alpha,\beta] \xrightarrow{\phi} R$, ϕ – диференційована на $[\alpha,\beta]$ і $\phi' \in R[\alpha,\beta]$, $E_\phi \subset D_f$, $\phi(\alpha) = a$, $\phi(\beta) = b$, тоді має місце рівність (***формула заміни змінної в інтегралі Рімана***):

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta (f \circ \phi)\phi'(t)\,dt.$$

Теорема 8. *(Інтегрування частинами)*

Нехай $[a,b] \xrightarrow{f,g} R$ – диференційовані функції і $f'g \in R[a,b]$, тоді $fg' \in R[a,b]$ і виконується рівність (***формула інтегрування частинами інтеграла Рімана***):

$$\int_a^b f(x)\,g'(x)\mathrm{dx} = f(x)g(x)\Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b g(x)f'(x)\,\mathrm{dx}.$$

Теорема 9. *(Інтегрованість композиції функцій)*

Нехай $[a,b] \xrightarrow{f} R$, $f \in R[a,b]$, $E_f \subset [A,B]$, $[A,B] \xrightarrow{\psi} R$, $\psi \in C[A,B]$. $[a,b] \xrightarrow{g=\psi\circ f} R \Rightarrow g \in R[a,b]$.

Якщо $E \subset X \subset \mathbf{R}$, то функція $X \xrightarrow{\chi_E} \mathbf{R}$, де $\chi_E(x) = \begin{cases} 0, x \in X \backslash E \\ 1, x \in E \end{cases}$ називається ***характеристичною функцією*** множини E (***ХФ***).

Нехай $E \subset [a,b] \subset \mathbf{R}$, $[a,b] \xrightarrow{f} \mathbf{R}$ – обмежена функція. Якщо $f \cdot \chi_E \in R[a,b]$, то покладемо:

$$\int_E f(x)dx \overset{def}{=} \int_a^b (f\chi_E)(x)dx,$$

цей інтеграл називається ***інтегралом Рімана функції f по множині E***.

Нехай $E \subset [a,b] \subset \mathbf{R}$, $E \xrightarrow{f} \mathbf{R}$ – обмежена функція. Продовжимо f на весь $[a,b]$:

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in E, \\ 0, & x \in [a,b] \backslash E. \end{cases}$$

Якщо $F \in R[a,b]$, то покладемо

$$\int_E f(x)dx \overset{def}{=} \int_a^b F(x)dx,$$

і цей інтеграл називається ***інтегралом Рімана функції f по множині E***.

Нехай X – упорядкований простір, E – деяка множина з X. ***Межею $fr(E)$*** називається множина таких точок, кожна з яких є точкою дотикання як E, так і $X \backslash E$. Точки множини $fr(E)$ називаються ***межовими***, або ***точками межі***.

Теорема 10. *(Інтегрованість ХФ)*
Нехай $E \subset [a;b] \subset \mathbf{R}$. Тоді $\chi_E \in R[a,b] \Leftrightarrow$ міра Лебега множини $fr(E)$ дорівнює нулю.

Обмежена множина $E \subset R$, межа якої має лебегова міру нуль, називається ***вимірною за Жорданом***, або ***жордановою***, а інтеграл

$$\int_E \chi_E(x) = \int_E dx = \int_a^b \chi_E(x)dx$$

називається ***мірою жордана*** множини E (або її ***довжиною***) та назначається $\mu_J(E)$).

Задачі

34. Обчисліть інтеграли Рімана:

1) $\int_5^9 \sqrt{x^2+144}\,\mathrm{dx}$;
2) $\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\,\mathrm{dx}$;
3) $\int_{\mathrm{sh}\,1}^{\mathrm{sh}\,2} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{dx}$;
4) $\int_{-0,5}^{+0,5} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{dx}$;
5) $\int_0^3 |1-x|\mathrm{dx}$;
6) $\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}} |\ln x|\,\mathrm{dx}$;
7) $\int_0^{100\pi} \frac{1}{\sin^2 x + 4\cos^2 x}\,\mathrm{dx}$;
8) $\int_0^{4\pi} \frac{1}{1+\frac{1}{2}\cos x}\,\mathrm{dx}$;
9) $\int_0^{100\pi} \sqrt{1-\sin 2x}\,\mathrm{dx}$;
10) $\int_0^{10\pi} \sqrt{1-\cos 2x}\,\mathrm{dx}$;
11) $\int_0^{\ln 2} x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{dx}$;
12) $\int_0^{\pi} x \sin x\,\mathrm{dx}$;
13) $\int_0^{2\pi} x^2 \cos x\,\mathrm{dx}$;
14) $\int_0^{\pi} (x\ln x)^2\mathrm{dx}$;
15) $\int_0^1 \arccos x\,\mathrm{dx}$;
16) $\int_0^{\pi} x \cdot \mathrm{arctg}\, x\,\mathrm{dx}$;
17) $\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\mathrm{dx}$;
18) $\int_0^{\pi} \mathrm{e}^x \cos^2 x\,\mathrm{dx}$;
19) $\int_0^1 \frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{dx}$;
20) $\int_0^1 \frac{x}{x^2+x+1}\,\mathrm{dx}$;

21) $\int_2^4 \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{dx}$; ***22)*** $\int_0^3 \arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}\,\mathrm{dx}$;

23) $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \{x\}\mathrm{dx}$; ***24)*** $\int_{-\pi}^{\pi} [x]\mathrm{dx}$;

25) $\int_0^{3,5} [x]\sin \pi x\,\mathrm{dx}$; ***26)*** $\int_{-2}^{2} \operatorname{sgn}(\cos x)\mathrm{dx}$;

27) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\sin^2 x}\,\mathrm{dx}$; ***28)*** $\int_0^{4\pi} x^{-3}\mathrm{e}^{-x^{-2}}\mathrm{dx}$;

29) $\int_1^{\mathrm{e}} \sin(\ln x)\,\mathrm{dx}$; ***30)*** $\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\cos(\ln x)}{x}\,\mathrm{dx}$;

31) $\int_{-3}^{2} \max\{x, x^3\}\,\mathrm{dx}$; ***32)*** $\int_{-2}^{3} \min\{1, x^2\}\,\mathrm{dx}$;

33) $\int_{-0,5}^{2} \frac{\ln x}{x^2+1}\,\mathrm{dx}$; ***34)*** $\int_{-\pi}^{\pi} x^7 \sin^2 x\,\mathrm{dx}$;

35) $\int_{-0,5}^{0,5} \cos x\,\mathrm{th}\frac{1+x}{1-x}\,\mathrm{dx}$; ***36)*** $\int_{-0,5}^{+0,5} \arcsin^3 x\,\mathrm{dx}$;

37) $\int_0^1 \arcsin^2 x\,\mathrm{dx}$; ***38)*** $\int_0^1 \operatorname{arctg} x\mathrm{dx}$;

39) $\int_0^1 \ln\left(1+\sqrt{1+x}\right)\mathrm{dx}$; ***40)*** $\int_0^1 \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\mathrm{dx}$;

41) $\int_{0,5}^{2} \left(1+x-\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}\mathrm{dx}$; ***42)*** $\int_0^{2\pi} \frac{1}{\sin^4 x+\cos^4 x}\,\mathrm{dx}$.

35. Доведіть рівності:

1) $\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} = (b-a)\int_0^1 f(a+(b-a)t)\,\mathrm{dt}$, якщо $f \in C[a,b]$;

2) $\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} = \int_a^b f(a+b-t)\,\mathrm{dt}$, якщо $f \in C[a,b]$;

3) $\int_0^a x^3 f(x^2)\,\mathrm{dx} = \frac{1}{2}\int_0^{a^2} tf(t)\,\mathrm{dt}$, якщо $f \in C[0,a^2]$, $a > 0$;

4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,\mathrm{dx} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t)\,\mathrm{dt}$, якщо $f \in C[0,1]$;

5) $\int_0^{\pi} xf(\sin x)\,\mathrm{dx} = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin t)\,\mathrm{dt}$, якщо $f \in C[0,1]$;

6) $\int_0^t f(x)g(t-x)\,\mathrm{dx} = \int_0^t g(x)f(t-x)\,\mathrm{dx}$, якщо $f, g \in C[0,t]$;

7) $\int_0^t f(u)(t-u)\,\mathrm{du} = \int_0^t F(u)\,\mathrm{du}$, де $F(u) = \int_0^u f(x)\,\mathrm{dx}$ та $f \in C[0,t]$;

8) $\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,\mathrm{dx} = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t}{\sin t}\,\mathrm{dt}$.

36. Обчисліть значення виразу:

1) $\int_0^{\sin^2 x} \arcsin\sqrt{t}\,\mathrm{dt} + \int_0^{\cos^2 x} \arccos\sqrt{t}\,\mathrm{dt}$;

2) $\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{\operatorname{tg} x} \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{dt} + \int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{\operatorname{ctg} x} \frac{1}{t(1+t^2)}\,\mathrm{dt}$; ***3)*** $\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x}\,\mathrm{dx}$;

4) $\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{dx}$; ***5)*** $\int_0^{2\pi} \frac{x\sin^{20} x}{\sin^{20} x+\cos^{20} x}\,\mathrm{dx}$.

37. Доведіть твердження:

1) нехай $[a,b] \xrightarrow{f} R$ і $c \in \mathbf{R}$, якщо $f \in R[a,c] \cap R[c,b]$, то $f \in R[a,b]$ і

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx\,;$$

2) якщо $f \in R[a,b]$, і $\forall x \in [a,b]\ f(x) \geq 0$, то $\int_a^b f(x)dx \geq 0$;

3) якщо $f \in R[a,b]$, $\forall x \in [a,b]\ f(x) \geq 0$, та $\exists x_0 \in (a,b)\ f \in C(x_0)$ і $f(x_0) > 0$, то $\int_a^b f(x)dx > 0$;

4) якщо $f \in R[a,b]$ та $\forall x \in [a,b]$ виконується нерівність $m \leq f(x) \leq M$, то

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\mathrm{dx} \leq M(b-a);$$

5) якщо $f \in C^{(n)}[a,b]$, то $x \in [a,b]$ має місце така ***формула Тейлора*** із залишковим членом в інтегральній формі:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} (x-a)^k \frac{f^{(k)}(a)}{k!} + \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)\, f^{(n)}(t)\mathrm{dt};$$

6) для довільної обмеженої функції $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ і $\forall a \in D_f$ справджується рівність:

$$\int_a^a f(x)dx = 0\,;$$

7) якщо $[a,b] \overset{f}{\to} R$, $f \in R[a,b]$, $E_f \subset [A,B]$, $[A,B] \overset{\psi}{\to} R$, $\psi \in R[A,B]$. $[a,b] \overset{g=\psi\circ f}{\to} R$, то не обов'язково $g \in R[a,b]$;

8) для довільних жорданових множин E_1, E_2 справджується умови:

а) $E_1 \cap E_2$ – жорданова множина;

б) $E_1 \cup E_2$ – жорданова множина і, якщо $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, то

$$\mu_J(E_1 \cup E_2) = \mu_J(E_1) + \mu_J(E_2);$$

в) $E_1 \backslash E_2$ – жорданова множина і, якщо $E_2 \subset E_1$, то

$$\mu_J(E_1 \backslash E_2) = \mu_J(E_1) - \mu_J(E_2).$$

38. З'ясуйте, чи можна застосувати:

1) вказану заміну змінної для інтегралу:

а) $\int_0^1 \sqrt{x^2+1}\mathrm{dx}$, $x = \frac{1}{\cos t}$;

б) $\int_0^2 \sqrt[3]{1-x^2}\mathrm{dx}$, $x = \cos t$;

в) $\int_0^{2\pi} \frac{1}{12-5\cos x}\mathrm{dx}$, $t = \mathrm{tg}\frac{x}{2}$;

г) $\int_0^{\pi} \frac{1}{1+\sin^2 x}\mathrm{dx}$, $t = \mathrm{tg}\, x$;

д) $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\mathrm{dx}$, $x = \sin t$, $t \in \left[\pi, \frac{13\pi}{2}\right]$;

е) $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{dx}$, $x = \cos t$, $t \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{13\pi}{4}\right]$;

є) $\int_{-1}^2 \frac{1+x^2}{1+x^4}\mathrm{dx}$, $t = x - \frac{1}{x}$;

ж) $\int_{-1}^1 \sin\left(x^{\frac{4}{3}}\right)\mathrm{dx}$, $t = x^{\frac{2}{3}}$;

з) $\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{arctg}\, x}{1+x^2}\mathrm{dx}$, $x = \frac{1}{t}$;

и) $\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{dx},\ x = \operatorname{sh} t;$

2) формулу Ньютона-Лейбниця для інтегралів $\int_a^b \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}F(x)\right)\mathrm{dx} = F(b) - F(a)$:

а) $\int_{-1}^1 \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right)\mathrm{dx};$ ***б)*** $\int_{-1}^1 \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\right)\mathrm{dx};$

в) $\int_{-1}^2 \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\left(x^5 + x^{\frac{1}{5}}\right)\right)\mathrm{dx};$ ***г)*** $\int_{-2}^2 \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}x|x|\right)\mathrm{dx}.$

39. Для наведених інтегралів I_n отримайте рекурентне співвідношення, за допомогою цього співвідношення обчисліть значення інтегралу для заданого значення n:

1) $I_n = \int_a^b \sin^n x\,\mathrm{dx},\ n = 7$, якщо

а) $[a,b] = \left[0, \frac{\pi}{2}\right];$ ***б)*** $[a,b] = [0,\pi];$

в) $[a,b] = [0, 2\pi];$ ***г)*** $[a,b] = \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right];$

2) $I_n = \int_a^b \cos^n x\,\mathrm{dx},\ n = 8$, якщо

а) $[a,b] = \left[0, \frac{\pi}{2}\right];$ ***б)*** $[a,b] = \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right];$

в) $[a,b] = \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right];$ ***г)*** $[a,b] = \left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right];$

3) $I_n = \int_0^1 (\arccos x)^n \mathrm{dx},\ n = 3;$

4) $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^{2n} x\,\mathrm{dx},\ n = 4;$

5) $I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n \mathrm{dx},\ n = 4;$

6) $I_n = \int_0^{0,5} (\arcsin x)^n \mathrm{dx},\ n = 4;$

7) $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\right)^{2n+1} \mathrm{dx},\ n = 3;$

8) $I_n = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^n x}\,\mathrm{dx},\ n = 4;$ ***9)*** $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos^n x}\,\mathrm{dx},\ n = 5;$

10) $I_n = \int_{-1}^1 \operatorname{sh}^n x\,\mathrm{dx},\ n = 7;$ ***11)*** $I_n = \int_0^1 \operatorname{ch}^n x\,\mathrm{dx},\ n = 5.$

40. Обчисліть інтеграли Рімана:

1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x \cos^{2n} x\,\mathrm{dx},\ n, m \in \mathbf{N};$

2) $\int_E x^m x \ln^n x\,\mathrm{dx},\ E = (0,1],\ n, m \in \mathbf{N};$

3) $\int_E \frac{\sin nx}{\sin x}\,\mathrm{dx},\ E = (0,\pi],\ n \in \mathbf{N};$

4) $\int_E \frac{\cos(2n+1)x}{\cos x}\,\mathrm{dx},\ E = [0,\pi]\backslash\{\frac{\pi}{2}\},\ n \in \mathbf{N};$

5) $\int_0^{\pi} \cos nx \cos^n x\,\mathrm{dx},\ n \in \mathbf{N};$

6) $\int_0^{\pi} \sin nx \sin^n x\,\mathrm{dx},\ n \in \mathbf{N}.$

41. Визначить ХФ множини D, через ХФ множин A, B, (A_n), $n \in \mathbf{N}$, якщо:

1) $D = \mathrm{C}A$; ***2)*** $D = A \cap B$;
3) $D = A \cup B$; ***4)*** $D = A \backslash B$;
5) $D = A \Delta B$; ***6)*** $D = \bigcap_{k=1}^{n} A_k$;
7) $D = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$; ***8)*** $D = \coprod_{k=1}^{n} A_k$.

42. Чи буде ХФ множини $D \subset [a, b]$ інтегрованою за Ріманом на проміжку $[a, b]$, якщо:

1) $\mu_L(D) = 0$;
2) D – ніде не щільна на $[a, b]$;
3) D – ніде не щільна на $[a, b]$ та $\mu_L(D) = 0$;
4) D – замкнена множина та $\mu_L(D) = 0$.

43. Для функції $[a, b] \xrightarrow{f} R$ знайдіть $\int_E f(x)\mathrm{d}x$, якщо він існує:

1) $f(x) = 1$, $[a, b] = [0, 1]$ та
а) $E = Q \cap [a, b]$; ***б)*** $E = (R \backslash Q) \cap [a, b]$;
в) $E = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$; ***г)*** $E = \left\{0; \frac{1}{3}; \frac{1}{2}; 1\right\}$;
д) $E = \left\{\frac{1}{i} \mid i \in N\right\}$; ***е)*** $E = [a, b] \backslash \left\{\frac{1}{i} \mid i \in N\right\}$;

2) $f(x) = x$, $[a, b] = [-1, 1]$ та
а) $E = (0; 1)$; ***б)*** $E = \left(-\frac{1}{2}, 0\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right)$;
в) $E = \left\{-\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}\right\}$; ***г)*** $E = (R \backslash Q) \cap [0;\ 1]$;
д) $E = \left\{\frac{(-1)^i}{i} \mid i \in N\right\}$; ***е)*** $E = [a, b] \backslash \left\{-\frac{1}{i} \mid i \in N\right\}$;

3) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in Q, \\ 0, & x \in R \backslash Q, \end{cases}$ $[a, b] = [0, 1]$ та
а) $E = Q \cap [a, b]$; ***б)*** $E = (R \backslash Q) \cap [a, b]$;
в) $E = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right)$; ***г)*** $E = \left\{\frac{1}{\sqrt{i}} \mid i \in N\right\}$.

44. Для функції $E \xrightarrow{f} R$ знайдіть якщо існує $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, де:

1) $E = \{1\}$, $f(x) = 10$, $[a, b] = [-1, 1]$;
2) $E = (R \backslash Q) \cap [0, 1]$, $f(x) = x^2$, $[a, b] = [-1, 1]$;
3) $E = Q \cap [0, 1]$, $[a, b] = [-1, 1]$ та:
а) $f(x) = 1$, ***б)*** $f(x) = 0$;
4) $E = (-1, 1)$, $f(x) = [\,x\,]$, $[a, b] = [-2, 2]$.

45. Для множини $E \subset R$ знайдіть $\mathrm{fr}E$, а також $\mu_J(E)$, якщо вона існує:

1) $E = (0; 1) \cup [3; 4]$; ***2)*** $E = (-1; 2]$;
3) $E = \left\{\frac{1}{i} \mid i \in N\right\}$; ***4)*** $E = [-2; 2] \backslash \left\{\frac{1}{i} \mid i \in N\right\}$;
5) $E = \{1, 2, 3\}$; ***6)*** $E = N$;
7) $E = Q \cap [0, 1]$; ***8)*** $E = (R \backslash Q) \cap [-1, 1]$;

9) $E = K_3$; ***10)*** $E = [-1, 1] \backslash K_3$.

46. Перевірте, чи справджується твердження в упорядкованому просторі $(R, \leq)$:

1) існує множина $E \neq \emptyset$, для якої $\mathrm{fr}E = \emptyset$;

2) існує множина E, для якої $\mathrm{fr}E \neq \emptyset$ та $\mathrm{fr}E \cap E = \emptyset$;

3) існує більш ніж злічена множина E, для якої $\mathrm{fr}E = E$;

4) множина E замкнена тоді і тільки тоді, коли містить свої межові точки;

5) якщо множина E замкнена, то $\mathrm{fr}(\mathrm{cl}\, E) = \mathrm{fr}(\mathrm{fr}\, E)$;

6) для довільної множини E має місце включення $\mathrm{fr}(\mathrm{fr}(\mathrm{fr}\, E)) = \mathrm{fr}(\mathrm{fr}\, E) \subset \mathrm{fr}E$;

7) для множин X, Y має місце одна з трьох умов: $X = Y$, $X \subset Y \wedge X \neq Y$ чи $X \supset Y \wedge X \neq Y$, де E, (E_n), $n \in N$ – довільні множини та:

а) $X = \mathrm{cl}\, E$, $Y = \mathrm{fr}\, E \cup \mathrm{int}\, E$;

б) $X = \mathrm{fr}\, E$, $Y = \mathrm{cl}\, E \backslash \mathrm{int}\, E$;

в) $X = \mathrm{fr}\,(E_1 \cup E_2)$, $Y = \mathrm{fr}\, E_1 \cup \mathrm{fr}\, E_2$;

г) $X = \mathrm{fr}\,(E_1 \cap E_2)$, $Y = \mathrm{fr}\, E_1 \cap \mathrm{fr}\, E_2$;

д) $X = \mathrm{fr}\,(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n)$, $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{fr}\, E_n$.

Розділ 4.3. Теореми про середнє, інтеграл, як функція межі інтегрування

Короткі теоретичні відомості

Теорема 1. *(Перша теорема про середнє)*

Якщо $\{f, g\} \subset R[a,b]$ і $\forall x \in [a,b]\ g(x) \geq 0 (g(x) \leq 0)$, то має місце рівність:

$$\int_a^b f(x)\, g(x) dx = \mu \int_a^b g(x) dx.$$

Наслідок 1. *(Для неперервної функції)*

Якщо в умовах теореми про середнє $f \in C[a,b]$, то формула набуває вигляду:

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx.$$

Нехай $f \in R[a,b]$. Назвемо функцію $[a,b] \xrightarrow{\Phi} R$, де $\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$, ***інтегралом, як функцією верхньої межі*** (***ІФМ***).

Теорема 2. *(Неперервність ІФМ)*

Якщо $f \in R[a,b]$, то $\Phi \in C[a,b]$.

Теорема 3. *(Похідна ІФМ)*

Якщо $f \in R[a,b]$, то Φ диференційована в кожній точці $x \in [a,b]$, в якій f неперервна і при цьому в цих точках $\Phi'(x) = f(x)$.

Теорема 4. *(Основна формула інтегрального числення)*

Якщо $f \in R[a,b]$ і множина точок розриву не більш ніж злічена, F – будь-яка первісна в широкому розумінні функції f на $[a,b]$, тоді виконується рівність (***формула Ньютона-Лейбніца***):

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a).$$

Теорема 5. *(Друга теорема про середнє)*

Нехай $[a,b] \xrightarrow{F} R$ – монотонна функція, $g \in R[a,b]$. Тоді $\exists \xi \in [a,b]$, для якого виконується рівність:

$$\int_a^b f(x)\, g(x) dx = f(a) \int_a^\xi g(x)\, dx + f(b) \int_\xi^b g(x)\, dx.$$

Якщо при цьому f – не зростає на $[a,b]$ і $\forall x \in [a,b]\ f(x) \geq 0$, то $\exists \xi \in [a,b]$:

$$\int_a^b f(x)\, g(x) dx = f(a) \int_a^\xi g(x)\, dx.$$

Якщо при цьому f – не спадає на $[a,b]$ і $\forall x \in [a,b]\ f(x) \geq 0$, то $\exists \xi \in [a,b]$:

$$\int_a^b f(x)\, g(x) dx = f(b) \int_\xi^b g(x)\, dx.$$

Теорема 6. *(Диференціювання складної ІФМ)*

Якщо $[a,b] \xrightarrow{f} R, f \in C[a,b], [\alpha,\beta] \xrightarrow{\psi,\phi} R, E_\phi \subset [a,b], E_\phi \subset [a,b], \phi, \psi$ диференційовані $\forall x \in [\alpha,\beta]$, тоді має місце формула:

$$\frac{d}{dx}\int_{\psi(x)}^{\phi(x)} f(y)\,dy = f\big(\phi(x)\big)\phi'(x) - f\big(\psi(x)\big)\phi'(x).$$

Теорема 7. *(Заміна змінної в інтегралі Рімана)*

Нехай $f \in C[a,b]$, $[\alpha,\beta] \xrightarrow{\phi} R$, ϕ – диференційована на $[\alpha,\beta]$ і $\phi' \in R[\alpha,\beta]$, $E_\phi \subset D_f$, $\phi(\alpha) = a$, $\phi(\beta) = b$, тоді має місце рівність:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta (f\circ\phi)\phi'(t)\,dt.$$

Теорема 8. *(Інтегрування частинами)*

Нехай $[a,b] \xrightarrow{f,g} R$ – диференційовані функції і $f'g \in R[a,b]$, тоді $fg' \in R[a,b]$ і виконується рівність:

$$\int_a^b f(x)\,g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b g(x)f'(x)\,dx.$$

Задачі

47. Визначить знак виразу:

1) $\int_0^\pi x\sin x\,\mathrm{dx} + \int_\pi^{2\pi} x\sin x\,\mathrm{dx}$;
2) $\int_0^\pi \frac{\sin x\mathrm{dx}}{x} + \int_\pi^{2\pi} \frac{\sin x\mathrm{dx}}{x}\mathrm{dx}$;
3) $\int_{-2}^0 x^3 2^x\mathrm{dx} + \int_0^2 x^3 2^x\mathrm{dx}$;
4) $\int_{\frac{1}{2}}^1 x^2\ln x\,\mathrm{dx} + \int_1^2 x^2\ln x\,\mathrm{dx}$;
5) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^8\cos x\,\mathrm{dx} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} x^8\cos x\,\mathrm{dx}$;
6) $\int_0^{\sqrt{\pi}} \sin x^2\,\mathrm{dx} + \int_{\sqrt{\pi}}^{\sqrt{2\pi}} \sin x^2\,\mathrm{dx}$;
7) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\,\mathrm{dx} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x\,\mathrm{dx}$;
8) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^8 x\,\mathrm{dx} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x\,\mathrm{dx}$;
9) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 x\,\mathrm{dx} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x\,\mathrm{dx}$;
10) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^8 x\,\mathrm{dx} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{12} x\,\mathrm{dx}$.

48. Оцініть інтеграл I, тобто знайдіть такі сталі A та B, для яких справджується нерівність $A \le I \le B$, при цьому оцінка вважається більш точною, чим меншою є величина $B - A$, якщо:

1) $I = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{dx}}{1+\frac{1}{2}\cos x}$;
2) $I = \int_0^1 \frac{x^9\mathrm{dx}}{\sqrt{1+x}}$;
3) $I = \int_0^{100} \frac{\mathrm{e}^{-x}\mathrm{dx}}{1+\frac{1}{2}\cos x}$;
4) $I = \int_0^1 \frac{\sin x\mathrm{dx}}{x}$;
5) $I = \int_{10}^{50} \frac{\cos x\mathrm{dx}}{\sqrt{x}}$;
6) $I = \int_{\sqrt{10}}^{10} \sin(\pi x^2)\,\mathrm{dx}$;
7) $I = \int_{100}^{200} \frac{x^3\mathrm{dx}}{x^4+x+1}$;
8) $I = \int_0^1 \frac{\mathrm{dx}}{\sqrt{4-x^2-x^3}}$;
9) $I = \int_{100}^{200} \frac{\sin\pi x\mathrm{dx}}{x}$;
10) $I = \int_0^1 \frac{1+x^{20}}{1+x^{40}}\mathrm{dx}$;
11) $I = \int_0^1 \frac{x^{19}\mathrm{dx}}{\sqrt[3]{1+x^6}}$;
12) $I = \int_{10}^{20} \frac{x^{10}\mathrm{dx}}{x^3+x+2}$;
13) $I = \int_{-1}^1 \frac{\cos x\mathrm{dx}}{2+x^2}$;
14) $I = \int_0^2 \mathrm{e}^{x^2-x}\mathrm{dx}$;
15) $I = \int_{-1}^1 \frac{\cos\pi x\mathrm{dx}}{x^4-4x+5}$;
16) $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\pi\mathrm{dx}}{x^3+4x-16}$;

17) $I = \int_{-1}^{2} \frac{2^x \mathrm{dx}}{(x^2+1)(x+2)}$;
18) $I = \int_{-1}^{2} \frac{\mathrm{e}^x \mathrm{dx}}{(x+1)(2-x)}$;
19) $I = \int_{-1}^{2} \frac{\sin\frac{\pi(x+1)}{6} \mathrm{dx}}{(x+1)(3-x)}$;
20) $I = \int_{-1}^{2} \frac{x^{17} \mathrm{dx}}{x^2-x+1}$;
21) $I = \int_{0}^{1} \frac{\sin x \mathrm{dx}}{x}$;
22) $I = \int_{0}^{1} \frac{\sin x \mathrm{dx}}{x(x+1)}$;
23) $I = \int_{0}^{1} \frac{\ln(1+x) \mathrm{dx}}{x}$;
24) $I = \int_{0}^{1} \frac{\mathrm{tg}\, x \mathrm{dx}}{x}$;
25) $I = \int_{10}^{100} \frac{x \ln x \mathrm{dx}}{\mathrm{e}^x}$;
26) $I = \int_{0}^{100} \frac{\sin x \mathrm{dx}}{2^x}$.

49. Доведіть твердження:

1) якщо $f \in C[a,b]$, то $\exists \xi \in [a,b]$: $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$;

2) якщо $f \in C[a,b]$, то $\forall x \in [a,b]$ $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} \int_a^x f(t)dt = f(x)$;

3) якщо $f \in R[a,b]$ і множина її точок розриву не більш як злічена, то $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ є первісною в широкому розумінні функції f на $[a,b]$.

4) якщо $f \in C^{(n)}[a,b]$, то справджується така формула:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} (x-a)^k \frac{f^{(k)}(a)}{k!} + \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t) f^{(n)}(t) \mathrm{dt}, x \in [a,b]$$

(формула Тейлора із залишковим членом в інтегральній формі);

5) якщо $f \in C[0,+\infty)$, та $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A \in \overline{R}$, то

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) \mathrm{dt} = A;$$

6) якщо $f \in C^{(1)}[a,b]$, та $f(a) = f(b) = 0$, то

$$\max_{x\in[a,b]} |f'(x)| \geq \frac{4}{(b-a)^2} \int_a^b |f(t)| dt;$$

7) якщо $f \in C^{(1)}[a,b]$, та $f(a) = f(b) = 0$, то

$$\max_{x\in[a,b]} |f'(x)| \geq \frac{4}{(b-a)^2} \int_a^b |f(t)| dt.$$

50. Знайдіть границі (параметр $p > 0$):

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} \mathrm{dx}$;
2) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, \mathrm{dx}$;
3) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 \mathrm{e}^{-nx} x^p \mathrm{dx}$;
4) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_n^{n+p} \frac{\sin x}{x} \mathrm{dx}$;
5) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin^n x \, \mathrm{dx}$;
6) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_n^{n+p} \frac{x^{pn}}{1+x^n} \mathrm{dx}$;
7) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{1}{1+\frac{x^3}{n}} \mathrm{dx}$.

51. Знайдіть на області визначення для заданої функції f:

1) похідну $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{dx}}$, вважаючи, що t – фіксована стала;

2) похідну $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{dt}}$, вважаючи, що x – фіксована стала, якщо:

а) $f = \int_{t-\cos(x^2)}^{t+\cos^2 x} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{dt}$;

б) $f = \int_{x+\sin t}^{t+\sin x} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{dt}$;

в) $f = \int_{t^2 x}^{t x^2} \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{dt}$;

г) $f = \int_{x^2+t^2}^{(t+x)^2} \operatorname{arctg}\,(t^3)\mathrm{dt}$;

д) $f = \int_{x^3+\sqrt{x}}^{t+t^2} \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{dt}$;

е) $f = \int_{-x-t}^{2t+2x} \cos(t^2)\,\mathrm{dt}$;

є) $f = \int_{t^3 x^2}^{t+x} \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{dt}$;

ж) $f = \int_{t^4}^{x} x^x \mathrm{dt}$.

52. Знайдіть границі:

1) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}\int_0^x \cos(t^2)\,\mathrm{dt}$;

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\int_0^x (\operatorname{arctg}\,t)^2\mathrm{dt}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\int_0^x t^{1+t}\mathrm{dt}$;

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\ln x}\int_0^x \frac{\mathrm{dt}}{\sqrt[4]{1+t^4}}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^4}\int_{\sin x}^{x} e^t \ln(1+t)\,\mathrm{dt}$;

6) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{e^x-1-x}\int_{\cos x}^{1-\frac{1}{2}x^2} \operatorname{arctg}\,t\mathrm{dt}$;

7) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\int_x^{x^3} \operatorname{arctg}\,t\mathrm{dt}}{x^3+2x+2}$;

8) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x\int_0^x e^{t^2}\mathrm{dt}}{e^{x^2}}$;

9) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\int_0^{\sin x}\sqrt{\operatorname{tg} t}\mathrm{dt}}{\int_0^{\operatorname{tg} x}\sqrt{\sin t}\mathrm{dt}}$;

10) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\left(\int_0^x e^{t^2}\mathrm{dt}\right)^2}{\int_0^x e^{2t^2}\mathrm{dt}}$;

11) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}\int_0^x \frac{(1+t)^{\frac{1}{3}}-1}{t}\,\mathrm{dt}$;

12) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^p}\int_x^{x^3} \frac{\ln t\mathrm{dt}}{t}, p>0$;

13) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\int_0^{x^4} \operatorname{arctg}\,(t^2)\mathrm{dt}}{\int_0^{x^2} \operatorname{arctg}\,(t^4)\mathrm{dt}}$;

14) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\int_x^{\sin x} \ln\,(1+t^3)\mathrm{dt}}{\int_0^x (\mathrm{e}^t-1)(\cos t-1)\mathrm{dt}}$;

15) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\int_{x^2}^{x} \sin(t^2)\mathrm{dt}}{\int_{x^3}^{x^4} \cos(t^2)\mathrm{dt}}$;

16) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\int_{x-\sin x}^{\operatorname{tg} x-x} e^{t^2}\mathrm{dt}}{\int_{x^2}^{x^3} \frac{\sin t\mathrm{dt}}{t}}$;

17) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\left(\int_0^x e^{t^2}\mathrm{dt}\right)^3}{\left(\int_0^{\sqrt[3]{x}} e^{t^3}\mathrm{dt}\right)^2}$;

18) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\left(\int_{x^2}^{x^3} \sin\sqrt{t}\mathrm{dt}\right)^4}{\left(\int_{\sqrt{x}}^{\sqrt[3]{x}} \sin(t^2)\mathrm{dt}\right)^3}$;

19) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\int_{-x^2}^{x^2} \frac{\sin(t^2)\mathrm{dt}}{t}}{\int_{x^3}^{x^4} \frac{\sin(t^3)\mathrm{dt}}{t}}$.

;

Розділ 4.4. Застосування інтеграла Рімана

Короткі теоретичні відомості

Якщо $\forall[\alpha,\beta]\subset[a,b]\subset R$ ставиться у відповідність значення деякої величини F, то кажуть, що на сегменті $[a,b]$ задано ***<u>функцію проміжку</u>*** $[\alpha,\beta]\mapsto F([\alpha,\beta])$. Функція проміжку $[\alpha,\beta]\mapsto F([\alpha,\beta])$ $([\alpha,\beta]\subset[a,b])$ називається ***<u>адитивною функцією проміжку</u>*** (***<u>АФП</u>***), якщо $\forall\gamma\in(\alpha,\beta)$ виконується рівність:

$$F([\alpha,\beta])=F([\alpha,\gamma])+F([\gamma,\beta]).$$

Теорема 1. *(Зв'язок АФП та інтеграла Рімана)*

Якщо для АФП F, що визначена на $[a,b]$, існує функція $f\in R[a,b]$: $\forall\alpha,\beta\in[a,b]$ справджуються нерівності: $\inf\limits_{x\in[\alpha,\beta]}f(x)(\beta-\alpha)\le F([\alpha,\beta])\le\sup\limits_{x\in[\alpha,\beta]}f(x)(\beta-\alpha)$, то

$$F([a,b])=\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}.$$

Для невід'ємної функції $f\in C[a,b]$ назвемо ***<u>криволінійною трапецією</u>*** T_f множину точок, яка є підграфіком цієї функції на проміжку $[a,b]$, що знаходиться вище осі абсцис.

Теорема 2. *(Обчислення площі криволінійної трапеції)*

Площа криволінійної трапеції T_f обчислюється за формулою:

$$S(T_f)=\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}.$$

Для невід'ємної функції $f\in C[\alpha,\beta]$ назвемо ***<u>криволінійним сектором</u>*** E_f множину точок, яка задається в полярних координатах (r,φ), умовами:

$$E_f=\{(r,\varphi)|\ 0\le\alpha\le\varphi\le\beta\le2\pi, r\le f(\varphi)\}.$$

Теорема 3. *(Обчислення площі криволінійного сектора)*

Площа криволінійного сектора E_f обчислюється за формулою:

$$S(E_f)=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f^2(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi.$$

Нехай межа області M задається параметрично $x=x(t), y=y(t), t\in[\alpha,\beta]$ і задовольняє такі умови: $\forall t\in[\alpha,\beta]\ x^2(t)+y^2(t)\neq0, x(\alpha)=x(\beta), y(\alpha)=y(\beta)$ та межа не має самоперетинів і обходиться в додатному напрямі.

Теорема 4. *(Обчислення площі фігури з межею, що задана параметрично)* ,

Площа області M обчислюється за такими формулами:

$$S(M)=-\int_\alpha^\beta y(t)x'(t)\mathrm{dt}=\int_\alpha^\beta y'(t)x(t)\mathrm{dt}=\int_\alpha^\beta\big(y'(t)x(t)-y(t)x'(t)\big)\mathrm{dt}.$$

Для заданої невід'ємної кусково неперервної функції $S(x)$, $x\in[a,b]$, позначимо через U_S тіло, що розташоване у тривимірній декартовій системі координат між площинами $x=a$ та $x=b$, $a<b$ та $\forall x\in[a,b]$ площа горизонтального перерізу тіла U_S дорівнює $S(x)$,

Теорема 5. *(Об'єм тіла за поперечними перерізами)*

Об'єм тіла U_S обчислюється за формулою:

$$V(U_S) = \int_a^b S(x)\,\mathrm{dx}.$$

Теорема 6. *(Об'єм тіла обертання навколо осі абсцис)*

При обертанні криволінійної трапеції T_f навколо осі OX утворюється тіло обертання W_x, об'єм якого обчислюється за формулою:

$$V(W_x) = \pi \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{dx}.$$

Для заданих функцій $[a,b] \xrightarrow{\varphi,\psi} R$ назвемо множину

$$\Gamma_{AB} = \{(x,y) |\, x = \varphi(t), y = \psi(t), t \in [a,b]\}$$

<u>гладкою кривою</u>, що сполучає точки $A\big(\varphi(a),\psi(a)\big)$, $B\big(\varphi(b),\psi(b)\big)$, якщо існують інтегровані за Ріманом функції $\varphi'(t)$ та $\psi'(t)$, $t \in [a,b]$.

Теорема 7. *(Довжина гладкої кривої)*

Довжина гладкої кривої Γ_{AB} обчислюється за формулою:

$$L(\Gamma_{AB}) = \int_a^b \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\,\mathrm{dt}.$$

Задачі

53. Доведіть твердження:

1) якщо F – АФП, що визначена на сегменті $[a,b]$ та приймає лише невід'ємні значення, для якої покладемо $F(\emptyset) = 0$; тоді для довільних $A = [\alpha_1,\beta_1]$, $B = [\alpha_2,\beta_2]$, $A,B \subset [a,b]$ справджуються умови:

а) якщо $A \cup B = [\alpha,\beta]$, то $F(A \cup B) + F(A \cap B) = F(A) + F(B)$;

б) якщо $A \subset B$, то $F(A) \le F(B)$;

в) у пунктах ***а)*** та ***б)*** не можна відмовитися від умови невід'ємності функції F;

2) для функцій $f_1, f_2 \in C[a,b]$, де $f_1(x) \le f_2(x) \quad \forall x \in [a,b]$, площа криволінійної трапеції

$$T = \{(x,y) |\, a \le x \le b, f_1(x) \le y \le f_2(x)\}$$

обчислюється за формулою:

$$S(T) = \int_a^b \big(f_2(x) - f_1(x)\big)\,\mathrm{dx};$$

3) для функції $[a,b] \xrightarrow{g} R$, що має додатну похідну, площа криволінійного сектора

$$E_g = \{(r,\varphi) |\, r \in [0,a], g(a) \le \varphi \le g(b) \vee r \in [a,b], g(r) \le \varphi \le g(b)\}$$

обчислюється за формулою:

$$S\big(E_g\big) = \frac{1}{2}\int_a^b r^2 g'(r)\,\mathrm{dr}.$$

4) для гладкої кривої Γ_f, що задається умовою:

$$\Gamma_f = \{(x,y)|\ x \in [a,b], y = f(x)\},$$

де $f \in C^{(1)}[a,b]$, її довжина обчислюється за формулою:

$$L(\Gamma_{AB}) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{dx}.$$

5) для гладкої кривої Γ_φ, задається в полярних координатах (r,φ), умовами:

$$\Gamma_\varphi = \{(r,\varphi)|\ \alpha \le \varphi \le \beta, r = f(\varphi)\}.$$

де $f \in C^{(1)}[\alpha,\beta]$, її довжина обчислюється за формулою:

$$L(\Gamma_\varphi) = \int_\alpha^\beta \sqrt{(f(\varphi))^2 + (f'(\varphi))^2}\,\mathrm{d}\varphi.$$

6) для гладкої кривої Γ_r, задається в полярних координатах (r,φ), умовами:

$$\Gamma_r = \{(r,\varphi)|\ a \le r \le b, \varphi = g(r)\}.$$

де функція g має додатну похідну $\forall r \in [a,b]$, довжина Γ_r обчислюється за формулою:

$$L(\Gamma_r) = \int_\alpha^\beta \sqrt{1 + r^2(g'(r))^2}\,\mathrm{dr}.$$

7) при обертанні криволінійної трапеції T_f навколо осі OX утворюється тіло обертання W_y, об'єм якого обчислюється за формулою:

$$V(W_y) = 2\pi \int_a^b xf(x)\,\mathrm{dx}.$$

8) при обертанні навколо полярної осі криволінійного сектора E_f, який задається в полярних координатах (r,φ), умовами:

$$E_f = \{(r,\varphi)|\ 0 \le \alpha \le \varphi \le \beta \le \pi, r \le f(\varphi)\},$$

де $[a,b] \xrightarrow{f} R$ неперервна та невід'ємна функція, утворюється тіло обертання W_φ, об'єм якого обчислюється за формулою:

$$V(W_\varphi) = \frac{2\pi}{3}\int_a^b f^3(\varphi)\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi.$$

54. Для функції $f \in C[a,b]$ визначимо $\forall[\alpha,\beta] \subset [a,b]$ функцію $[\alpha,\beta] \longmapsto F[\alpha,\beta]$. Перевірити, чи буде F – АФП, якщо:

1) $F([\alpha,\beta]) = \int_\alpha^{\frac{\alpha+\beta}{2}} f(x)\mathrm{dx}$; ***2)*** $F([\alpha,\beta]) = \int_{\frac{2\alpha+\beta}{3}}^{\frac{\alpha+2\beta}{3}} f(x)\mathrm{dx}$;

3) $F([\alpha,\beta]) = \int_\alpha^{\frac{\alpha+\beta}{2}} f(x)\mathrm{dx} - \int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^\beta f(x)\mathrm{dx}$;

4) $F([\alpha,\beta]) = \int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{dx} - \int_\alpha^\beta f(\beta+\alpha-x)\mathrm{dx}$;

5) $F([\alpha,\beta]) = \int_a^{\alpha} f(x)\mathrm{dx} + \int_{\beta}^{b} f(x)\mathrm{dx}$;

6) $F([\alpha,\beta]) = \int_a^{\beta} f(x)\mathrm{dx} - \int_{\alpha}^{b} f(x)\mathrm{dx}$;

7) $F([\alpha,\beta]) = f(\alpha)$; ***8)*** $F([\alpha,\beta]) = f(a)$;

9) $F([\alpha,\beta]) = f(\alpha) + f(\beta)$; ***10)*** $F([\alpha,\beta]) = \max\{f(a), f(b)\}$;

11) $F([\alpha,\beta]) = \max\limits_{x\in[\alpha,\beta]} f(x)$; ***12)*** $F([\alpha,\beta]) = \min\limits_{x\in[\alpha,\beta]} f(x)$;

13) $F([\alpha,\beta])$ – кількість розв'язків рівняння $f(x) = 0$ на проміжку:

а) $[\alpha,\beta]$; ***б)*** $[\alpha,\beta)$; ***в)*** (α,β).

55. Для параметрично заданої функції $x(t) = 3 + \cos t,\ y(t) = 2 + \sin t,\ t \in [-\pi,\pi]$, з'ясуйте, площі яких фігур обчислюються такими інтегралами:

1) $-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} y(t)x'(t)\mathrm{dt}$; ***2)*** $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} y'(t)x(t)\mathrm{dt}$;

3) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi}\big(y'(t)x(t) - y(t)x'(t)\big)\mathrm{dt}$.

В усіх наступних задачах усі параметри $a, b, c, \ldots$ вважаються додатними

56. Знайдіть площі обмежених фігур, межі яких задаються такими кривими:

1) $y = x^2, y = x^4$; ***2)*** $y = x, y = x^3$;

3) $y = \log_2 x, y = \frac{2}{3}(x-1)$; ***4)*** $y = \frac{3}{2}\log_2 x, y = x^2 - 4x + 3$;

5) $y = \frac{2}{x}, y + x = 3$; ***6)*** $y = \frac{1}{x^2}, y = 4 - 3x^2$;

7) $x = y^2, y = x^2$; ***8)*** $y = 2 - 2x - x^2, y = 2x^2 + x - 4$;

9) $y = (x+1)^2, x = \sin \pi y\ (0 \le y \le 1)$;

10) $y = \sin x, y = \cos x\ \left(-\frac{3\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{4}\right)$;

11) $y = |x \sin x|, y = x\ \left(\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2}\right)$;

12) $y = \frac{4}{\pi}|\mathrm{arctg}\, x|, y = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}$; ***13)*** $y^2 = (1-x^2)^3$;

14) $y = \frac{1}{x^2+1}, y = \frac{x^2}{2}$; ***15)*** $y = 2x^2\mathrm{e}^x, y = -x^3\mathrm{e}^x$;

16) $y = \frac{\ln x}{4x}, y = x\ln x$; ***17)*** $y^2 = 2ax, 27ay^2 = 8(x-a)^3$;

18) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; ***19)*** $y^2 = \frac{x^3}{2a-x}$;

20) $y^2 = x^2(a^2 - x^2)$; ***21)*** $(y-x)^2 = x^3, y = 0$;

22) $y = \arcsin x, y = \arccos x,\ y = 0$;

23) $y^2 = 4ax, x^2 + y^2 = 2ax, y = 2a - x, y = 0$;

24) $(y - \arcsin x)^2 = x - x^2$;

57. Знайдіть площі обмежених фігур, які утворюються при перетині кривих Γ_1 та Γ_2, де:

1) $\Gamma_1: y^2 = 2x$, $\Gamma_2: x^2 + y^2 = 8$;

2) $\Gamma_1: x^2 + y^2 = 4$, $\Gamma_2: x^2 - 2y^2 = 1$;

3) $\Gamma_1: y = 4x^2 - 2$, $\Gamma_2: x^2 + y^2 = 9$;

4) $\Gamma_1: x^2 + y^2 = 100$, $\Gamma_2: \frac{x^2}{32} - \frac{y^2}{36} = 1$;
5) $\Gamma_1: x^2 + y^2 = 2x$, $\Gamma_2: y^2 = 2x - 1$;

58. Знайдіть площі обмежених фігур, межі яких задаються кривими, що задані у полярних координатах:

1) $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$;
2) $r = a \sin 3\varphi$;
3) $r^2 = a^2 \sin 4\varphi$;
4) $r = -\sin \varphi$;
5) $r = 1 + \cos 2\varphi$;
6) $r = \sin 3\varphi - 1$;
7) $r = 3 + \cos 4\varphi$;
8) $r = 1 + 2\sin 2\varphi$;
9) $r = \operatorname{tg} \varphi$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$;
10) $r = 1 + 2\sin 2\varphi$;
11) $r = \frac{1}{\varphi}$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$, $\varphi = \frac{5\pi}{4}$;
12) $r = \frac{1}{\varphi}$, $r = \frac{1}{\sin \varphi}$, $0 < \varphi \leq \frac{\pi}{2}$;
13) $r = \mathrm{e}^{2\varphi}$, $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$;
14) $r = \frac{1}{1-\cos \varphi}$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$;
15) $\varphi = \sin \pi r$, $\varphi = 0$, $r \leq 1$;
16) $\varphi = r - \sin r$, $\varphi = \pi$;
17) $\varphi = 0$, $\varphi \geq 0$ та:
а) $\varphi = 4r - r^3$;
б) $\varphi = (r + 1)(2 - r)$;
в) $\varphi = (r + 1)(1 - r)(r + 2)$;
18) $r = a \cos \varphi$, $r = a(\sin \varphi + \cos \varphi)$;
19) $r = 3a\sqrt{2} \cos \varphi$, $r = 3a \sin \varphi$;
20) $r = 1 + \cos \varphi$, $r = \sqrt{3} \sin \varphi$;

59. Знайдіть площі обмежених фігур, обмежених такими кривими (в усіх пунктах вважаємо, що $0 \leq t \leq 2\pi$):

1) $x(t) = a(t - \sin t)$, $y(t) = a(1 - \cos t)$ та:
а) $y = 0$;
б) $y = a$;
2) $x(t) = a(\cos t + t \sin t)$, $y(t) = a(\sin t - t \cos t$, та $x = a$, $y \leq 0$;
3) $x(t) = a \sin t$, $y(t) = b \sin 2t$;
4) $x(t) = a \cos t$, $y(t) = b \sin t \cos^2 t$;
5) $x(t) = a \cos t\,(1 + \cos t)$, $y(t) = a \sin t\,(1 + \cos t)$;

60. Знайдіть площі фігур, що обмежені петлями кривих (відповідні криві задані параметрично або неявно):

1) $x(t) = 2t - t^2$, $y(t) = 2t^2 - t^3$,
2) $x(t) = 1 + t - t^3$, $y(t) = 1 - t^2$,
3) $x(t) = \frac{1}{1+t^2}$, $y(t) = \frac{t(1-t^2)}{1+t^2}$,
4) $x(t) = 3t^2$, $y(t) = 3t - t^3$,
5) $x(t) = a \sin t \cos^2 t$, $y(t) = a \cos t \sin^2 t$;
6) $x(t) = 1 + 2\cos t$, $y(t) = \operatorname{tg} t + 2 \sin t$;
7) $x(t) = 2 \cos t$, $y(t) = 3 \sin t$;
8) $x(t) = \cos t\,(1 - \cos t)$, $y(t) = \sin t\,(1 - \cos t)$;
9) $x(t) = \cos^3 t$, $y(t) = \sin^3 t$;

10) $x(t) = a\cos t,\ y(t) = \frac{a\sin^2 t}{2+\sin t}$;
11) $x(t) = 2\cos t - \cos 2t,\ y(t) = 2\sin t - \sin 2t$;
12) $x^4 + y^4 = a^2(x^2 + y^2)$;
13) $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$;
14) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$;
15) $(a - x)y^2 = (a + x)x^2$;
16) $x^7 + y^7 = ax^3y^3$;
17) $x^3 + x^2 = y^2$;
18) $y^2 = x(x - 1)^2$;
19) $x^3 + y^3 = 3axy$;

61. Обчисліть довжини дуг кривих, що задані в декартових координатах явно, параметрично або неявно:

1) $y = x^{\frac{3}{2}},\ 0 \le x \le 4$;
2) $y^2 = 2x,\ 1 \le x \le 8$;
3) $y = \mathrm{e}^x,\ 0 \le x \le 1$;
4) $y = 4\sqrt{x-2},\ 2 \le x \le 11$;
5) $y = \ln\frac{\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^x-1},\ 1 \le x \le 2$;
6) $y = x^2 - 2x + 2,\ -1 \le x \le 1$;
7) $y = \sqrt{x - x^2} + \arcsin\sqrt{x},\ 0 \le x \le 1$;
8) $y = \sqrt{1 - x^2} + \arcsin x,\ -1 \le x \le 1$;
9) $y = \mathrm{ch}\, x,\ 0 \le x \le 1$;
10) $y = \ln\frac{4}{4-x^2},\ 0 \le x \le 1$;
11) $y = \ln\cos x,\ 0 \le x \le \frac{\pi}{4}$;
12) $y = \sqrt{\frac{x^2}{2a-x}},\ 0 \le x \le a$;
13) $y = 4\ln\frac{2+\sqrt{4-x^2}}{x} - \sqrt{4-x^2},\ 1 \le x \le 2$;
14) $x(t) = a(t - \sin t),\ y(t) = a(1 - \cos t),\ 0 \le t \le 2\pi$
15) $x(t) = \mathrm{sh}\, t - t,\ y(t) = \mathrm{ch}\, t - 1,\ 0 \le t \le 1$;
16) $x(t) = 8t^3,\ y(t) = 2t^2 - t^4,\ y \ge 0$;
17) $x(t) = a\left(\cos t + \ln\mathrm{tg}\,\frac{t}{2}\right),\ y(t) = a\sin t,\ \frac{\pi}{4} \le t \le \frac{\pi}{2}$;
18) $x(t) = a\cos^3 t,\ y(t) = b\sin^3 t,\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$;
19) $x(t) = \mathrm{ch}^3\, t,\ y(t) = \mathrm{sh}^3\, t,\ 0 \le t \le 1$;
20) $x(t) = 2\cos t - \cos 2t,\ y(t) = 2\sin t - \sin 2t,\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$;
21) $x(t) = 4a\sqrt{2}\sin t,\ y(t) = a\sin 2t,\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$;
22) $x(t) = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t,\ \ y(t) = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin 2t,\ \ 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$;

62. Знайдіть площі фігур, що обмежені петлями кривих (відповідні криві задані параметрично або неявно):

1) $x(t) = \cos^4 t,\ y(t) = \sin^4 t$;
2) $x(t) = \cos^5 t,\ y(t) = \sin^5 t$;
3) $x(t) = t^2,\ y(t) = \frac{1}{2}t - t^3$;
4) $x(t) = 2t^3(1 - t^2),\ y(t) = \sqrt{15}t^4$;
5) $x(t) = a(t^2 - 1),\ y(t) = \frac{2a}{\sqrt{3}}\left(t^3 - \frac{t}{4}\right)$;
6) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$;
7) $x^3 + y^3 = 3axy$;

63. Обчисліть довжини дуг кривих, що задані в полярних координатах:

1) $r = \varphi,\ 0 \le \varphi \le 2\pi$; ***2)*** $r = 1 + \cos\varphi,\ 0 \le \varphi \le 2\pi$;

3) $r = a\sin^3\frac{\varphi}{3},$; ***4)*** $r = a\cos^3\frac{\varphi}{3}$;

5) $r = \text{th}\ \frac{\varphi}{2},\ 0 \le \varphi \le 2\pi$; ***6)*** $r = a\varphi^2,\ 0 \le \varphi \le 1$;

7) $r = \frac{a}{1+\cos\varphi},\ -\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$; ***8)*** $\varphi = r + \frac{1}{r},\ \frac{1}{2} \le r \le 3$;

8) $r = \frac{\sqrt{r^2-4}}{2} - \arccos\frac{2}{r},\ 3 \le r \le 6$;

64. Знайдіть об’єми тіл, що обмежені заданими поверхнями:

1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$; ***2)*** $z = \frac{x^2}{4} + y^2,\ z = 1$;

3) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1,\ z = 1$; ***4)*** $(z-1)^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2},\ z = 0$;

5) $2z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9},\ z^2 = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$; ***6)*** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,\ z = \pm c$;

7) $x^2 + z^2 = a^2,\ y^2 + z^2 = a^2$; ***8)*** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{z^2} = 1,\ z = 0,\ z = a$;

9) $z = x^2 + 4y^2,\ x^2 + 4y^2 = 1,\ z = 0$;

10) $z = x^2 + 2y^2,\ x^2 + 2y^2 + z^2 = 6$;

11) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ z = \frac{c}{a}x,\ z = 0$; ***12)*** $z^2 = b(a-x),\ x^2 + y^2 = ax$;

13) $y^2 = 2b(a-x),\ x - z = 0,\ x - 2z = 0$;

14) $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$ та:

а) $x + y + z^2 = 1$; ***б)*** $z^2 = a(a-x-y)$;

15) $x^2 + y^2 = R^2,\ y = 0,\ z = 0,\ \frac{z}{R} + \frac{z}{H} = 1,\ ,\ \frac{z}{R} - \frac{z}{H} = -1$;

65. Знайдіть об’єми тіл, що утворені обертанням фігури, яка обмежена заданими кривими, навколо прямої $l_1 = OX$, $l_2 = OY$ або l_3:

1) $y = 2x - x^2,\ y = 0,\ l_1$ та l_2; ***2)*** $y = x^2,\ y = x,\ l_1$ та l_2;

3) $y = \sin x,\ (0 \le x \le \pi),\ l_1$; ***4)*** $y = \text{e}^{-x},\ 0 \le x \le 10,\ l_1$;

5) $x^4 + y^4 = a^2x^2,\ l_1$; ***6)*** $(x-4)y^2 = x(x-3),\ x \ge 0,\ l_1$;

7) $y = \arcsin x,\ y = 0,\ x = 0,\ l_1$ та l_2;

8) $x^2 + (y-b)^2 = a^2,\ l_1$ та:

а) $a = 2, b = 3$; ***б)*** $a = 3, b = 2$;

9) $y = \frac{8}{4+x^2},\ y = 0,\ x = 0,\ x = 2,\ l_1$ та l_2;

10) $y = \sqrt[3]{x},\ y = \frac{1}{x},\ y = 0,\ x = 2,\ l_3$: $y = 1$;

11) $y = 2^x + 6,\ y = 2^{2x},\ x = 0,\ l_1$ та l_2;

12) $(10-x)y^2 = x^3,\ 0 \le x < 8,\ l_1$;

13) $x(t) = t - \sin t,\ y(t) = 1 - \cos t,\ 0 \le t \le 2\pi,\ l_1,\ l_2$ та l_3: $y = 2x$;

14) $x(t) = a\sin^3 t,\ y(t) = b\cos^3 t,\ 0 \le t \le 2\pi,\ l_1$ та l_2;

15) $x(t) = 2t - t^2,\ y(t) = 4t - t^3,\ l_1$ та l_2;

16) $r = a(1 + \cos\varphi),\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ l_1$;

17) $r = a\sqrt{\sin\varphi},\ l_2$; ***18)*** $r = a\varphi,\ l_1$;

19) $r = a(1 - \cos\varphi)$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, l_1 та l_2;
20) $r = \sqrt[3]{\cos 3\varphi}$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$, l_2;
21) $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$, l_1 та l_2;
22) $x^4 + y^4 = 2axy^2$, l_2; ***23)*** $(x^2 + y^2)^3 = ax^4$, l_1.

Відповіді. Розділ 3. Невизначений інтеграл

В задачах 2–7 та 9–22 ми наводимо явний вигляд однієї з первісних, без додавання вільної сталої.

2. ***1)*** $\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} - \frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}} + \frac{24}{11}x^{\frac{11}{12}}$; ***2)*** $-\frac{1}{x} - \frac{4}{\sqrt{x}} + \ln x$; ***3)*** $\frac{8}{15}x^{\frac{15}{8}} + 8x^{-\frac{1}{8}}$; ***4)*** $x - arctgx$; ***5)*** $\frac{1}{2}ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - x$; ***6)*** $\frac{1}{2}ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2+1}}\right|$; ***7)*** $\frac{1}{2^x ln\,2} - \frac{2}{5^x ln\,5} - \frac{x}{10}$; ***8)*** $\frac{e^x}{2^x} \cdot \frac{2e}{1-ln\,2} - 2x$; ***9)*** $x + arctgx$; ***10)*** $7x + 3\,ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$; ***11)*** $x^3 - 4x^2 + 9x - 7\,ln|x+1|$; ***12)*** $\frac{2}{3} \cdot \left((x+1)^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{3}{2}}\right)$; ***13)*** $-x - ctgx$; ***14)*** $tgx - x$; ***15)*** $x - thx$; ***16)*** $x - cthx$; ***17)*** $-ctg\frac{x}{2}$; ***18)*** $tg\frac{x}{2}$; ***19)*** $\frac{cos(\beta-\alpha)x}{2(\beta-\alpha)} - \frac{cos(\beta+\alpha)x}{2(\beta+\alpha)}$ при $|\beta| \neq |\alpha|$, $-\frac{cos\,2\alpha x}{4\alpha}$ при $|\beta| = |\alpha|$; ***20)*** $\frac{sin(\alpha-\beta)x}{2(\alpha-\beta)} - \frac{sin(\alpha+\beta)x}{2(\alpha+\beta)}$ при $|\beta| \neq |\alpha|$, $\pm\left(\frac{x}{2} - \frac{sin\,2\alpha x}{4\alpha}\right)$ при $\beta = \pm\alpha$; ***21)*** $\frac{sin(\alpha-\beta)x}{2(\alpha-\beta)} + \frac{sin(\alpha+\beta)x}{2(\alpha+\beta)}$ при $|\beta| \neq |\alpha|$, $\frac{x}{2} + \frac{sin\,2\alpha x}{4\alpha}$ при $|\beta| = |\alpha|$; ***22)*** $\frac{x}{4} + \frac{sin\,2x}{8} + \frac{sin\,4x}{10} + \frac{sin\,6x}{24}$; ***23)*** $\frac{x}{2} - \frac{sin\,2x}{4}$; ***24)*** $\frac{x}{2} + \frac{sh2x}{4}$; ***25)*** $-\frac{3\,cos\,x}{4} + \frac{cos\,3x}{12}$; ***26)*** $\frac{3\,sin\,x}{4} + \frac{sin\,3x}{12}$; ***27)*** $-\frac{2x}{3} - \frac{5\,ln|3x-1|}{9}$; ***28)*** $-\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - x - ln|x-1|$; ***29)*** $x + ln(1+x^2)$; ***30)*** $\frac{arctgx}{3} - \frac{1}{6}arctg\frac{x}{2}$.

3. ***1)*** $\frac{1}{87(1-3x)^{29}}$; ***2)*** $-\frac{3}{5\sqrt[3]{2+5x}}$; ***3)*** $\frac{15}{64}(1+4x)^{\frac{16}{15}}$; ***4)*** $\frac{sin(3-5x)}{5}$; ***5)*** $\frac{ch(2x-1)}{2}$; ***6)*** $ch(1-x)$; ***7)*** $tg\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$; ***8)*** $-\frac{1}{2} \cdot ctg\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$; ***9)*** $-\frac{5}{24}(5-2x)^{\frac{12}{5}}$; ***10)*** $\frac{2^{3x+1}}{3\,ln\,2}$; ***11)*** $-\frac{cos(6x-1)}{6}$; ***12)*** $\frac{(2x-1)^{11}}{22}$; ***13)*** $\frac{1}{ab} \cdot arctg\frac{bt}{a}$; ***14)*** $\frac{1}{b} \cdot arcsin\frac{bt}{a}$; ***15)*** $\frac{(x+1)^8}{8} - \frac{(x+1)^7}{7}$; ***16)*** $\frac{(x-1)^8}{8} + \frac{2(x-1)^7}{9}$; ***17)*** $-\frac{1}{98(x-1)^{98}} - \frac{1}{99(x-1)^{99}}$; ***18)*** $-\frac{1}{6(2+x)^6} + \frac{1}{7(2+x)^7} - \frac{3}{2(2+x)^8} + \frac{8}{9(2+x)^9}$.

4. ***1)*** $\frac{1}{2}ln|x| - \frac{1}{4}ln(x^2+2)$; ***2)*** $\frac{ln(1+x^4)}{4}$; ***3)*** $\frac{2}{15}(1+x^5)^{\frac{6}{5}}$; ***4)*** $\frac{1}{3}(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}$; ***5)*** $-\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$; ***6)*** $\frac{x^2}{2} + 2\,ln|x^2-4|$; ***7)*** $-\frac{cos(x^5+1)}{5}$; ***8)*** $\frac{1}{3}e^{x^5}$; ***9)*** $\frac{arcsin(x^8)}{8}$; ***10)*** $\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{x^2}}$; ***11)*** $\frac{ln(x^4-x^2+2)}{4} + \frac{1}{2\sqrt{7}} \cdot arctg\frac{2x^2-1}{\sqrt{7}}$; ***12)*** $\frac{arctg(x^3)}{3}$;

13) $\frac{ln^3 x}{3}$; ***14)*** $ln|ln\,x|$; ***15)*** $ln|lnln\,x|$; ***16)*** $sinln\,x$; ***17)*** $\frac{1}{\sqrt{6}} \cdot arctg\frac{3\,ln\,x}{\sqrt{6}}$; ***18)*** $ln|ln\,x - 1|$;

19) $2\,ln(e^{-\frac{x}{2}} + 1) - e^{-\frac{x}{2}}$; ***20)*** $-e^x - 2\,ln|e^x - 1|$; ***21)*** $sin(e^x)$; ***22)*** $ln(e^x + 1)$;

23) $-arcsin(e^{-x})$; ***24)*** $ln|arcsin\,x|$; ***25)*** $\frac{2}{3}(arcsin\,x)^{\frac{3}{2}}$; ***26)*** $2\,sin\sqrt{x}$.

5. ***1)*** $\frac{sin^6 x}{6}$; ***2)*** $\frac{cos^5 x}{5} - \frac{cos^3 x}{3}$; ***3)*** $-ln(cos\,x + \sqrt{cos^2 x + 1})$; ***4)*** $-\frac{6}{5}(ctgx)^{\frac{5}{6}}$; ***5)*** $-ln|cos\,x|$;

6) $ln|sin\,x|$; ***7)*** $ln\,c\,hx$; ***8)*** $ln|shx|$; ***9)*** $ln\left|tg\frac{x}{2}\right|$; ***10)*** $ln\left|tg\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right|$; ***11)*** $ln\left|th\frac{x}{2}\right|$; ***12)*** $2arctge^x$;

13) $-\frac{1}{2\,sin^2 x} - ctgx$; ***14)*** $-\frac{arctg\,cos\,2x}{2}$; ***15)*** $-\frac{ctg^5 x}{5}$; ***16)*** $\frac{tg^3 x}{3}$; ***17)*** $e^{tgx} + ln|tgx|$;

18) $\frac{3}{2}\sqrt[3]{(sin\,x - cos\,x)^2}$.

6. ***1)*** $\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x} + sgn\,x \cdot \frac{\pi}{2\sqrt{2}}, x \neq 0,\ 0, x = 0$; ***2)*** $\frac{1}{2\sqrt{2}}ln\left|\frac{x^2-\sqrt{2}x+1}{x^2+\sqrt{2}x+1}\right|$; ***3)*** $(-1)^{\left[\frac{2x+\pi}{2\pi}\right]}sin\,x + 2\left[\frac{2x+\pi}{2\pi}\right]$; ***4)*** ; ***5)*** $(-1)^{\left[\frac{4x+\pi}{4\pi}\right]}sin\,x + 2\left[\frac{4x+\pi}{4\pi}\right]$; ***6)*** ;

7. ***1)*** $x(ln\,x - 1)$; ***2)*** ; ***3)*** ; ***4)*** $\frac{x^2}{4}\left(2\,ln^3 x - 3\,ln^2 x + 3x - \frac{3}{2}\right)$; ***5)*** $\frac{x^2-1}{2}ln\frac{1+x}{1-x} + x$; ***6)*** $\frac{x^3}{3}ln\frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{3}ln(1-x^2) + \frac{x^2}{3}$; ***7)*** $x \cdot arctgx - \frac{ln(1+x^2)}{2}$; ***8)*** $\frac{(x^2+1)}{2}arctgx - \frac{x}{2}$; ***9)*** $x \cdot arctg\sqrt{x} - x + ln(x +$

1); ***10)*** ; ***11)*** ; ***12)*** $\frac{2x\sqrt{x}arctg\sqrt{x}}{3}-\frac{x}{3}+\frac{ln(x+1)}{3}$; ***13)*** $\frac{(2x-1)\,arcsin\sqrt{x}}{2}+\frac{\sqrt{x-x^2}}{2}$; ***14)*** $\frac{(4x-5)\,arcsin(1-x)}{4}-\frac{(x+3)\sqrt{2x-x^2}}{4}$; ***15)*** $\frac{x^2}{2}\,arccos\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{x^2-1}\,sgn\,x}{2}$; ***16)*** $-\frac{arcsin\,x}{x}+\frac{1}{2}\cdot ln\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}$; ***17)*** ; ***18)*** $x\,arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}-2\sqrt{x}+2arctg\sqrt{x}$; ***19)*** $\frac{x^6}{6}arctg^2x-\frac{x^4}{12}+\frac{ln(x^4-1)}{12}$; ***20)*** $x\,arcsin^2x+2\sqrt{1-x^2}\,arcsin\,x-2x$; ***21)*** $\frac{x(sinln\,x-cosln\,x)}{2}$; ***22)*** $\frac{x(sinln\,x+cosln\,x)}{2}$; ***23)*** $x\,ln(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})-\frac{x}{2}+\frac{arcsin\,x}{2}$; ***24)*** $\frac{x}{2}+\frac{x}{10}(cos(2\,ln\,x)+2\,sin(2\,ln\,x))$; ***25)*** $-ctgx(lnsin\,x+1)-x$; ***26)*** $-cos\,x\cdot ln\,t\,gx+ln\left|tg\frac{x}{2}\right|$.

9. ***1)*** $x\,sin\,x+cos\,x$; ***2)*** ; ***3)*** $(x^2+2)chx-2xshx$; ***4)*** ; ***5)*** $\frac{x^2}{4}+\frac{x\,sin\,2x}{4}+\frac{cos\,2x}{8}$; ***6)*** ; ***7)*** ; ***8)*** ; ***9)*** $-\frac{e^{-x^2}}{2}(x\quad-3x^4+6x^2-6)$; ***10)*** $-e^{-x}(x^5-5x^4+16x^3-47x^2+94x-95)$; ***11)*** ; ***12)*** ; ***13)*** $-\frac{cos\,3x}{3}\left(x^6-\frac{10x^4}{3}+\frac{40x^2}{9}-\frac{161}{81}\right)+\frac{sin\,3x}{9}\left(6x^5-\frac{40x^3}{3}+\frac{80x}{9}\right)$; ***14)*** ; ***15)*** ; ***16)*** ; ***17)*** $5(x^4-12x^2+24)\,sin\,x-(x^5-20x^3+120x+2)\,cos\,x++\frac{sin\,2x}{4}(2x^5-10x^3+15x+4)+\frac{5\,cos\,2x}{4}(2x^4-6x^2+3)$; ***18)*** $(x^3-7x+6)\,sin\,x-(x^3-6x^2+5x+8)\,cos\,x$; ***19)*** $\frac{e^{\alpha x}(\alpha\,cos\,\beta x+\beta\,sin\,\beta x)}{\alpha^2+\beta^2}$; ***20)*** $\frac{e^{\alpha x}(\alpha\,sin\,\beta x-\beta\,cos\,\beta x)}{\alpha^2+\beta^2}$; ***21)*** $\frac{e^{\alpha x}}{2\alpha}+\frac{e^{\alpha x}(2\beta\,sin\,2\beta x+\alpha\,cos\,2\beta x)}{2(\alpha^2+4\beta^2)}$; ***22)*** $\frac{chx\cdot sin\,x-shx\cdot cos\,x}{2}$; ***23)*** $\frac{shx\cdot sin\,2x-2chx\cdot cos\,2x}{5}$; ***24)*** $\frac{e^x(sin\,x+(2x+1)\,cos\,x)}{4}$; ***25)*** $\frac{(x^2-1)\,cos\,x\cdot shx}{2}+\frac{(x^2+1)\,sin\,x\cdot chx}{2}+x\,sin\,x\cdot shx$; ***26)*** $\frac{2x(25x^2+6)\,cos\,x\cdot ch2x}{125}+\frac{3(75x^2-14)\,cos\,x\cdot sh2x}{625}+\\+\frac{x(25x^2+64)\,sin\,x\cdot sh2x}{125}+\frac{12(25x^2+12)\,sin\,x\cdot ch2x}{625}$.

10. ***1)*** $\frac{2}{5}(2-x)^{\frac{5}{2}}-2(2-x)^{\frac{3}{2}}$; ***2)*** ; ***3)*** $-\frac{2(2+3x)\sqrt{1-3x}}{27}$; ***4)*** ; ***5)*** ; ***6)*** ; ***7)*** ; ***8)*** $\sqrt{x^2-x+1}+\frac{3}{2}ln\left|x-\frac{1}{2}+\sqrt{x^2-x+1}\right|$; ***9)*** ; ***10)*** ; ***11)*** $-\sqrt{5+x-x^2}+\frac{1}{2}arcsin\frac{2-x}{|x|\sqrt{5}}$; ***12)*** ; ***13)*** $\frac{arctg(x^2-1)}{2}$; ***14)*** $\frac{1}{6\sqrt{11}}\cdot ln\left|\frac{2x^3-3-\sqrt{11}}{2x^3-3+\sqrt{11}}\right|$; ***15)*** $\frac{1}{6}ln(x^6+x^3+3)-\frac{1}{3\sqrt{11}}arctg\frac{2x^3+1}{\sqrt{11}}$; ***16)*** $\frac{2}{\sqrt{95}}arctg\frac{2x^4-3}{\sqrt{95}}$; ***17)*** $\frac{1}{2\sqrt{3}}arcsin\frac{3x^2+1}{2}$; ***18)*** $\sqrt{1-x^2-x^4}+arcsin\frac{2x^2+1}{\sqrt{5}}$; ***19)*** $-sgn\,x\cdot ln\left(\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{|x|}\right)$; ***20)*** $\frac{1}{2\sqrt{2}}arcsin\frac{4x^2+3}{\sqrt{17}}$; ***21)*** $-\sqrt{1-ln\,x-ln^2x}+\frac{3}{2}arcsin\frac{2\,ln\,x+1}{\sqrt{5}}$; ***22)*** $arcsin\frac{sin\,x+2}{\sqrt{6}}$; ***23)*** $\sqrt{e^{2x}+e^x+1}+\frac{5}{2}ln\left(e^x+\frac{1}{2}+\sqrt{e^{2x}+e^x+1}\right)$; ***24)*** $-\frac{1}{ln\,2}ln\frac{1-2^x+\sqrt{4^x+2^x+1}}{2^x+1}$.

11. ***1)*** $I_n=\frac{sin\,x\,cos^{n-1}x}{n}+\frac{n-1}{n}I_{n-2}$, ***а)*** $\frac{sin\,x\,cos^4x}{5}+\frac{4\,sin\,x\,cos^2x}{15}+\frac{8\,sin\,x}{15}$; ***б)*** $\frac{sin\,x\,cos^5x}{6}+\frac{5\,sin\,x\,cos^3x}{24}+\frac{15\,sin\,x\,cos\,x}{48}+\frac{15x}{48}$; ***2)*** $I_n=\frac{cos\,x\,sin^{n-1}x}{n}+\frac{n-1}{n}I_{n-2}$, ***а)*** $\frac{cos\,x\,sin^3x}{4}+\frac{3\,cos\,x\,sin\,x}{8}+\frac{3x}{8}$; ***б)*** $\frac{cos\,x\,sin^6x}{6}+\frac{6\,cos\,x\,sin^4x}{35}+\frac{8\,cos\,x\,sin^6x}{35}+\frac{16\,cos\,x}{35}$; ***3)*** $I_n=\frac{sin\,x}{(n-1)\,cos^{n-1}x}+\frac{n-2}{n-1}I_{n-2}$, ***а)*** $\frac{sin\,x}{3\,cos^3x}+\frac{2\,sin\,x}{3\,cos\,x}$; ***б)*** $\frac{sin\,x}{6\,cos^6x}+\frac{5\,sin\,x}{24\,cos^4x}+\frac{5\,sin\,x}{16\,cos^2x}+\frac{5}{16}ln\left|tg\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|$; ***4)*** $I_n=\frac{cos\,x}{(n-1)\,sin^{n-1}x}+\frac{n-2}{n-1}I_{n-2}$, ***а)*** $\frac{cos\,x}{4\,sin^4x}+\frac{3\,cos\,x}{8\,sin^2x}+\frac{3}{8}ln\left|tg\frac{x}{2}\right|$; ***б)*** $\frac{cos\,x}{5\,sin^5x}+\frac{4\,cos\,x}{15\,sin^3x}-\frac{8\,cos\,x}{15\,sin\,x}$; ***5)*** $I_n=\frac{shxch^{n-1}x}{n}+\frac{n-1}{n}I_{n-2}$, ***а)*** $\frac{shxch^3x}{4}+\frac{3shxchx}{8}+\frac{3x}{8}$; ***б)*** $\frac{shxch^4x}{5}+\frac{4shxch^2x}{15}+\frac{8chx}{15}$; ***6)*** $I_n=\frac{chxsh^{n-1}x}{n}-\frac{n-1}{n}I_{n-2}$, ***а)*** $\frac{chxsh^2x}{3}+\frac{2chx}{3}$; ***б)*** $\frac{chxsh^5x}{6}-\frac{5chxsh^3x}{24}+\frac{5chxshx}{16}-\frac{5x}{16}$; ***7)*** $I_n=\frac{shx}{(n-1)ch^{n-1}x}+\frac{n-2}{n-1}I_{n-2}$, ***а)*** $\frac{shx}{2ch^2x}+\frac{1}{2}arctgshx$; ***б)*** $\frac{shx}{5ch^5x}+\frac{4shx}{15ch^3x}+\frac{8shx}{15chx}$; ***8)*** $I_n=-\frac{chx}{(n-1)sh^{n-1}x}-\frac{n-2}{n-1}I_{n-2}$, ***а)*** $-\frac{chx}{3sh^3x}-\frac{2chx}{3shx}$; ***б)*** $-\frac{chx}{4sh^4x}+\frac{3chx}{8sh^2x}+\frac{3}{16}ln\frac{chx-1}{chx+1}$; ***9)*** $I_n=\frac{tg^{n-1}x}{n-1}-I_{n-2}$, $\frac{tg^4x}{4}-\frac{tg^2x}{2}-ln\,|\,cos\,x\,|$; ***10)*** $I_n=-\frac{ctg^{n-1}x}{n-1}-I_{n-2}$, $-\frac{ctg^5x}{5}+$

$\frac{ctg^3x}{3} - ctgx - x$; **11)** $I_{n,m} = \frac{sin^{n-1}x}{(m-1)cos^{m-1}x} - \frac{n-1}{m-1}I_{n-2,m-2}$, ***а)*** $\frac{sin^4x}{5cos^5x} - \frac{4sin^2x}{15cos^3x} + \frac{8}{15cosx}$, ***б)*** $\frac{sin^{64}x}{4cos^4x} - \frac{3sin^4x}{4cos^2x} + \frac{3cos^2x}{2} - 3ln|cosx|$; **12)** $I_{n,m} = \frac{sin^{n+1}xcos^{m-1}x}{m+n} - \frac{m-1}{m+n}I_{n,m-2}$, ***а)*** $\frac{sin^9xcos^4x}{13} - \frac{4sin^9xcos^2x}{143} + \frac{8sin^9x}{1287}$, ***б)*** $\frac{sin^5xcos^5x}{10} - \frac{sin^5xcos^3x}{16} + \frac{sin^5xcosx}{32} - \frac{sin^5xcosx}{128} + \frac{3sinxcosx}{256} + \frac{3x}{256}$; **13)** $I_n = \frac{\beta sinx}{(n-1)(\alpha^2-\beta^2)(\alpha+\beta cosx)^{n-1}} - -\frac{(2n-3)\alpha}{(n-1)(\alpha^2-\beta^2)}I_{n-1} - \frac{n-2}{(n-1)(\alpha^2-\beta^2)}I_{n-2}$; **14)** $I_n = \frac{1}{(n-1)(\alpha^2+\beta^2)}\left(\frac{\beta sinx-\alpha cosx}{(\alpha sinx+\beta cosx)^{n-1}} + (n-2)I_{n-2}\right)$; **15)** $I_n = \frac{2x+\beta}{(n-1)|\beta^2-4\gamma|(x^2+\beta x+\gamma)^{n-1}} + \frac{2(2n-3)}{(n-1)|\beta^2-4\gamma|}I_{n-1}$; **16)** $I_n = \frac{x^{n-1}}{n\alpha}\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma} - \frac{\alpha\beta+2(n-1)\beta}{2n\alpha}I_{n-1} - \frac{(n-1)\gamma}{n\alpha}I_{n-2}$; **17)** $I_n = \frac{x}{2a^2(n-1)(a^2+x^2)^{n-1}} - \frac{2n-3}{2a^2(n-1)}I_{n-1}$, $\frac{x}{6a^2(a^2+x^2)^3} - \frac{5x}{8a^4(a^2+x^2)^2} + \frac{5x}{16a^6(a^2+x^2)} - \frac{5x}{16a^7}arctg\frac{x}{a}$; **18)** $I_n = \frac{2sin\alpha}{n-1}\left(\frac{sin\frac{1}{2}(x-\alpha)}{sin\frac{1}{2}(x+\alpha)}\right)^n - I_{n-2} + 2cos\alpha\cdot I_{n-2}$; **19)** $I_n = x\,ln^nx - nI_{n-1}$, $x\,ln^6x - 6x\,ln^5x + 30x\,ln^4x - 120x\,ln^3x + 360x\,ln^2x - 720x\,lnx + 720x$; **20)** $I_n = \frac{x^{\alpha+1}ln^nx}{\alpha+1} - \frac{n}{\alpha+1}I_{n-1}$, $\frac{x^{\alpha+1}ln^3x}{\alpha+1} - \frac{3x^{\alpha+1}ln^2x}{(\alpha+1)^2} + \frac{6x^{\alpha+1}lnx}{(\alpha+1)^3} - \frac{6x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^4}$; **21)** $I_n = x^ne^x - nI_{n-1}$, $(x^5 - 5x^4 + 20x^3 - 60x^2 + 120x - 120)e^x$; **22)** $I_n = \frac{e^{\alpha x}sin^{n-1}x(\alpha sinx - ncosx)}{n^2+\alpha^2} + \frac{n(n-1)}{n^2+\alpha^2}I_{n-2}$, $\frac{e^{\alpha x}sin^3x(\alpha sinx - 4cosx)}{16+\alpha^2} + \frac{12e^{\alpha x}sinx(\alpha sinx - 2cosx)}{(16+\alpha^2)(4+\alpha^2)} + \frac{24e^{\alpha x}}{\alpha(16+\alpha^2)(4+\alpha^2)}$.

12. ***1)*** $x - 3x\,ln|x-2| + 2\,ln|x-3|$; ***2)*** $x + \frac{ln|x-1|}{2} - 8\,ln|x-2| + 9\,ln|x-3|$; ***3)*** $\frac{x^2}{2} + \frac{16\,ln|x-2|}{9} + \frac{11\,ln|x+1|}{9} + \frac{1}{3(x+1)}$; ***4)*** $\frac{ln|x|}{6} - \frac{5\,ln|x-2|}{2} + \frac{10\,ln|x-3|}{3}$; ***5)*** $\frac{ln|x+10|-ln|x-1|}{121} - \frac{1}{11(x-1)}$; ***6)*** $\frac{ln|x|}{2} - \frac{9\,ln|x-1|}{2} - \frac{ln|x+1|}{6} + \frac{49\,ln|x-2|}{6}$; ***7)*** $ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| - \frac{3}{x}$; ***8)*** $\frac{1}{\sqrt{5}}arctg\frac{2x}{\sqrt{5}-1} + \frac{1}{\sqrt{5}}arctg\frac{2x}{\sqrt{5}+1}$; ***9)*** $\frac{3\,ln|x-2|}{7} - \frac{2\,ln(x^2+x+1)}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{7}arctg\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$; ***10)*** $3x + 2\,ln|x+1| + ln|x-3| + \frac{2}{x+2}$; ***11)*** $\frac{ln|x-1|}{4} - \frac{3\,ln(x^2-x+4)}{8} + \frac{\sqrt{15}}{20}arctg\frac{2x-1}{\sqrt{15}}$; ***12)*** $\frac{11}{25}ln\left|\frac{x+3}{x-2}\right| + \frac{2}{25(x-2)} + \frac{12}{25(x+3)}$; ***13)*** $ln\left|\frac{x}{x+1}\right| + \frac{2\sqrt{3}}{3}arctg\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$; ***14)*** $-\frac{1}{x-2} - arctg(x-2)$; ***15)*** $\frac{ln|x|}{4} - \frac{ln|x^2-1|}{6} + \frac{ln|x^2-4|}{24}$; ***16)*** $-x + \frac{ln|x-1|}{72} - \frac{16\,ln|x+2|}{9} + \frac{81\,ln|x+3|}{8} - \frac{625\,ln|x+5|}{36}$; ***17)*** $\frac{1}{4}ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{arctgx}{2}$; ***18)*** $\frac{1}{4\sqrt{2}}ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1} - \frac{arctg(x\sqrt{2}+1)}{2\sqrt{2}} + \frac{arctg(x\sqrt{2}-1)}{2\sqrt{2}}$; ***19)*** $\frac{ln|x+1|}{3} - \frac{ln(x^2-x+1)}{6} + \frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$; ***20)*** $\frac{ln|x-1|}{3} - \frac{ln(x^2+x+1)}{6} - \frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$; ***21)*** $\frac{1}{4}ln\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} + \frac{arctg(2x+1)}{2\sqrt{3}} + \frac{arctg(2x-1)}{2\sqrt{3}}$; ***22)*** $\frac{ln|x|}{6} - \frac{ln|x+2|}{18} - \frac{ln|x+3|}{48} - \frac{19\,ln|x-1|}{144} - \frac{1}{12(x-1)}$; ***23)*** $2\,ln\left|\frac{x+2}{x-3}\right| - \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x-3} + \frac{x^2}{2}$; ***24)*** $-\frac{4}{x^2} - ln|x| + 3\,ln|x-1| - \frac{2}{x-1} + ln|x+2| + \frac{ln(x^2+1)}{2} - 2arctgx$; ***25)*** $-\frac{2}{x+1} + ln|x+1| - 3\,ln|x| + \frac{ln(x^2-2x+2)}{2} + \frac{ln(x^2+2x+2)}{2} + +arctg(x-1) - 4arctg(x-1)$;

13. ***1)*** $-\frac{x^2+1}{x^3(x+2)^2} - ln|x| + 2\,ln|x+2|$; ***2)*** $\frac{x^5-2x}{(x^2-1)^3} + 3\,ln|x-1| - 2\,ln|x+1|$; ***3)*** $\frac{x^3+2x-1}{(x^2-1)^4} + 2\,ln|x| - ln|x+1|$; ***4)*** $-\frac{x^3+x}{4(x^2+1)^2} + \frac{3arctgx}{4}$; ***5)*** $\frac{x}{4(x^4+1)} + \frac{1}{4\sqrt{2}}ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1} + \frac{1}{2\sqrt{2}}arctg(x\sqrt{2}+1) - \frac{1}{2\sqrt{2}}arctg(x\sqrt{2}-1)$; ***6)*** $\frac{60x^5+210x^4+260x^3+5x^2+12x+2}{4x^2(x-1)^4} - 15\,ln\left|\frac{x}{x-1}\right|$; ***7)*** $\frac{24x^5+6x^4-40x^3-9x^2+1}{4x^2(x^2-1)^2} - 3\,ln|x| + \frac{9\,ln|x-1|}{2} - \frac{3\,ln|x+1|}{2}$; ***8)*** $\frac{7x^5-11x}{32(x^4-1)^2} + \frac{21}{128}ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{21arctgx}{64}$; ***9)*** $\frac{4-x}{4(x^2+2)} + \frac{3}{4\sqrt{2}}arctg\frac{x}{\sqrt{2}}$; ***10)*** $\frac{4x^3+6x^2+8x+3}{6(x^2+x+1)^2} + \frac{2arctgx}{3}$; ***11)*** $\frac{63x^4-11x^3-91x^2+16x+16}{8x^2(x-1)^2(x+1)} - 13\,ln|x| + \frac{167\,ln|x-1|}{16} + \frac{41\,ln|x+1|}{16}$;

12) $\frac{15x^5+40x^3+33x}{48(x^2+1)^4}-13\,ln|x|+\frac{167\,ln|x-1|}{16}+\frac{41\,ln|x+1|}{16}$; **13)** $\frac{-3x+6}{(x-1)^2}+2\,ln|x+1|$;
14) $\frac{105x^7+770x^5+2044x^3+2232x}{6144(x^8+8x^6+24x^4+32x^2+16)}+\frac{35}{2048\sqrt{2}}arctg\frac{x}{\sqrt{2}}$; **15)** $\frac{2(8x-5)}{7(x^2-x+1)}+\frac{139}{49\sqrt{3}}arctg\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+\frac{17}{98}ln\frac{(x-3)^2}{x^2-x+1}$.

14. **1)** $ln\,x-\frac{3}{2}ln(\sqrt[6]{x}+1)-\frac{3}{4}(2\,ln\sqrt[3]{x}-\sqrt[6]{x}+1)$; **2)** $\frac{3}{4}\sqrt[3]{(2+x)^4}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{(2+x)^2}+ln\frac{\sqrt[3]{(2+x)^2}+\sqrt[3]{2+x}+2}{|\sqrt[3]{2+x}-1|}$; **3)** $-\frac{6}{7}\sqrt[6]{(x+1)^7}+\frac{6}{5}\sqrt[6]{(x+1)^5}+\frac{3}{2}\sqrt[6]{(x+1)^4}-2\sqrt[6]{(x+1)^3}-3\sqrt[6]{(x+1)^2}+6\sqrt[6]{x+1}++2\,ln(\sqrt[3]{x+1}+1)-6arctg\sqrt[6]{x+1}$; **4)** $\frac{2}{(\sqrt[4]{x}+1)^2}-\frac{4}{\sqrt[4]{x}+1}$;
5) $\frac{x(x-\sqrt{x^2-1})}{2}+\frac{1}{2}ln|x+\sqrt{x^2-1}|$; **6)** $\frac{4}{3}ln|\sqrt{x}-1|-\frac{2}{3}ln(x+\sqrt{x}+1)$; **7)** $-\sqrt[4]{(8-x)^3x}+2\sqrt{2}arctg\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left(\sqrt[4]{\frac{x}{8-x}}-\sqrt[4]{\frac{8-x}{x}}\right)\right)++\sqrt{2}\,ln\frac{\sqrt{x}+\sqrt[4]{(8-x)x}+\sqrt{8-x}}{\sqrt{x}-\sqrt[4]{(8-x)x}+\sqrt{8-x}}$; **8)** $\frac{n}{3}\cdot\sqrt[n]{\frac{x+2}{x-1}}$; **9)** $2\sqrt{x}-4\sqrt[4]{x}+4\,ln(\sqrt[4]{x}+1)$; **10)** $\sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}-\frac{2}{3}\cdot ln\left|\sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}+1\right|+\frac{1}{3}ln\left(\sqrt[3]{\frac{(1-x)^2}{(1+x)^2}}-\sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}+1\right)-\\-\frac{2}{\sqrt{3}}arctg\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$; **11)** $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+6arctg\sqrt[6]{x}$; **12)** $\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}+2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}-6\,ln(\sqrt[6]{x}+1)+4\sqrt{3}arctg\frac{2\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt{3}}$;

15. **1)** $\frac{\sqrt{x^2+x-1}}{x}-\frac{1}{2}arcsin\frac{2-x}{\sqrt{5}|x|}$; **2)** $-\frac{1}{\sqrt{2}}sgn(x+1)\cdot ln\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{2}|x+1|}\right)$; **3)** $-\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x}+\frac{1}{2}sgn\,x\cdot ln\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{|x|}\right)$; **4)** $arcsin\frac{x-2}{\sqrt{2}|x-1|}$; **5)** $\frac{\sqrt{x^2+2x-5}}{5(x+2)}+\frac{1}{5\sqrt{5}}arcsin\frac{x+7}{\sqrt{6}|x+2|}$;
6) $\frac{1}{2}ln\frac{x^2+\sqrt{x^4+1}}{1+\sqrt{x^4+1}}-ln|x|$; **7)** $\frac{x+10}{2}\sqrt{x^2-4x+5}+\frac{19}{2}ln\left(x-2+\sqrt{x^2-4x+5}\right)$; **8)** $\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{x^2-x+1}}{|x+1|}$;
9) $-\frac{1}{2}ln\frac{x^2+2+2\sqrt{x^4+x^2+1}}{x^2}$; **10)** $\sqrt{x^2+3x+1}+\frac{1}{2}ln\left|x+\frac{3}{2}+\sqrt{x^2+3x+1}\right|$;

16. **1)** $\left(\frac{x^9}{10}-\frac{9x^7}{80}+\frac{21x^5}{160}-\frac{21x^3}{128}+\frac{63x}{256}\right)\sqrt{x^2+1}-\frac{63}{256}ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$; **2)** $\left(\frac{x^2}{3}+\frac{31x}{12}-\frac{163}{8}\right)\sqrt{x^2+5x+3}+\frac{675}{16}ln\left|x+\frac{5}{2}+\sqrt{x^2+5x+3}\right|$; **3)** $\left(\frac{x^5}{6}-\frac{x^3}{6}-x\right)\sqrt{4-x^2}+4\,arcsin\frac{x}{2}$;
4) $\left(\frac{x^3}{4}+\frac{7x^2}{6}+\frac{5x}{8}-\frac{109}{24}\right)\sqrt{x^2+2x-1}-\frac{25}{6}ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x-1}\right)$; **5)** $\left(\frac{x^2}{3}-\frac{5x}{6}+\frac{1}{6}\right)\sqrt{x^2+2x+2}+\frac{1}{2}ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right)$; **6)** $\left(\frac{x^2}{3}-\frac{14x}{3}+37\right)\sqrt{x^2+4x+3}-66\,ln\left(x+2+\sqrt{x^2+4x+3}\right)$; **7)** $\left(\frac{x^2}{2}-\frac{5x}{16}-\frac{373}{64}\right)\sqrt{2x^2+5x+7}+\frac{3297}{128\sqrt{2}}ln\left(x+\frac{5}{4}+\sqrt{x^2+\frac{5}{2}x+\frac{7}{2}}\right)$; **8)** $\left(-\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{6}\right)\sqrt{1-x^2}+\frac{arcsin\,x}{6}$; **9)** $-\frac{\sqrt{x^2+5x+3}}{2x^2}+\frac{sgn\,x}{2}ln\left|\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{x^2+1}}{|x|}\right|$;
10) $\frac{3(x+1)^2+2}{8(x+1)^2}\sqrt{x^2+2x}-\frac{3}{8}arcsin\frac{1}{|x+1|}$; **11)** $-\frac{sgn(x-1)}{3(x-1)^3}\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{5(x-1)}{27}+\frac{4(x-1)^2}{81}\right)\sqrt{x^2+2x+6}++\frac{7}{729}ln\left|\frac{2x+5}{3(x+1)}+\sqrt{\frac{x^2+2x+6}{(x+1)^2}}\right|$; **12)** $-sgn(x+2)\frac{-6x-11}{2(x+2)}\cdot\sqrt{\frac{x^2+4x+5}{(x+2)^2}}+\frac{11}{2}ln\left|\frac{2x+5}{x+2}+\sqrt{\frac{x^2+4x+5}{(x+1)^2}}\right|$;
13) $\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}+\ln\left|\frac{2x+1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right|+\frac{sgn(x+1)}{2}+ln\left|\frac{1-x}{1+x}+\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{|x+1|}\right|$; **14)** $\frac{2\sqrt{x^2+x+1}}{9(x+2)}-\frac{5\,sgn(x-1)}{9\sqrt{2}}ln\left|\frac{1+3x}{4(x-1)}+\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{\sqrt{2}|x+1|}\right|++\frac{8\,sgn(x+2)}{9\sqrt{3}}ln\left|\frac{x}{2(x+2)}+\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{\sqrt{3}|x+2|}\right|$; **15)** $\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot arctg\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}}$;
16) $-2\,arcsin\frac{1}{|x-2|}-\frac{\sqrt{x^2-4x+3}}{x-1}$; **17)** $\frac{x}{2\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{4\sqrt{2}}ln\left|\frac{x\sqrt{2}+\sqrt{1+x^2}}{x\sqrt{2}-\sqrt{1+x^2}}\right|$; **18)** $ln\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot$

$arctg\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}$; **19)** $\frac{(2x^2-1)\sqrt{x^2-1}}{3x^3}$; **20)** $\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot arcsin\frac{x\sqrt{2}}{|x+1|}-\frac{sgn(x-1)}{2\sqrt{2}}ln\left|\frac{\sqrt{2}}{x-1}+\frac{\sqrt{1+2x-x^2}}{|x-1|}\right|$;

21) $\frac{5\,\mathrm{sgn}(x-1)}{4}\ln\left|\frac{3x-1}{2(x-1)}+\frac{\sqrt{x^2+x-1}}{|x-1|}\right|-\frac{(5x-1)\sqrt{x^2+x-1}}{2(x^2-1)}-arcsin\frac{x+3}{\sqrt{3}|x+1|}$;

22) $\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{6}}ln\left|\frac{\sqrt{2+2x-x^2}-\sqrt{6}}{\sqrt{2+2x-x^2}+\sqrt{6}}\right|-\frac{\sqrt{2}}{3}arctg\frac{(x-1)\sqrt{2}}{\sqrt{2+2x-x^2}}$; **23)** $\frac{2(x-1)}{3\sqrt{x^2+x+1}}$;

24) $\frac{1}{\sqrt{21}}ln\left|\frac{\sqrt{7}(2x+3)+\sqrt{3}\cdot\sqrt{2x^2+6x-1}}{\sqrt{7}(2x+3)-\sqrt{3}\cdot\sqrt{2x^2+6x-1}}\right|$; **25)** $\frac{1}{2}ln\left|\frac{2\sqrt{2x^2+6x-1}-2x+1}{2\sqrt{2x^2+6x-1}+2x-1}\right|-\frac{1}{\sqrt{7}}arctg\frac{2x-1}{\sqrt{7(x^2-x+3)}}$;

26) $\frac{1}{2\sqrt{5}}ln\left|\frac{\sqrt{5}(x+1)+\sqrt{2x^2+4x-1}}{\sqrt{5}(x+1)-\sqrt{2x^2+4x-1}}\right|$; **27)** $\frac{1}{\sqrt{6}}ln\left|\frac{\sqrt{2}(x+1)+\sqrt{3(x^2+x+1)}}{\sqrt{x^2-x+1}}\right|-\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{\sqrt{2}(1-x)}{\sqrt{x^2+x+1}}$;

28) $\frac{1}{6\sqrt{2}}ln\left|\frac{\sqrt{4x^2-4x+10}+x-2}{\sqrt{4x^2-4x+10}-x+2}\right|-\frac{1}{3}arctg\frac{\sqrt{2x^2-2x+5}}{x+1}$; **29)** $\frac{1}{2\sqrt{3}}ln\left|\frac{2\sqrt{x^2-2x+4}-\sqrt{2}}{2\sqrt{x^2-2x+4}+\sqrt{2}}\right|-\frac{1}{3}arctg\frac{x}{\sqrt{x^2-2x+4}}$.

17. ***1)*** $2\,ln\left|x+\sqrt{x^2+x+1}\right|-\frac{3}{2}ln\left|2x+1+2\sqrt{x^2+x+1}\right|+\frac{3}{4x+1+4\sqrt{x^2+x+1}}$;

2) $-\frac{(x+1)^2}{6(x+1+\sqrt{x^2+3x+2})^2}-\frac{5(x+1)}{18(x+1+\sqrt{x^2+3x+2})}-\frac{17}{108}ln\left|1+\frac{\sqrt{x^2+3x+2}}{x+1}\right|++\frac{3}{4}ln\left|\frac{\sqrt{x^2+3x+2}}{x+1}-1\right|-\frac{16}{27}ln\left|\frac{\sqrt{x^2+3x+2}}{x+1}-2\right|$; ***3)*** $2\,ln\left|\frac{1-x+\sqrt{1-2x-x^2}}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}\right|-2arctg\frac{1+\sqrt{1-2x-x^2}}{x}$; ***4)*** $\frac{(\sqrt{x^2-2x+2}-x)^3}{24}-\frac{1}{2}ln\left|\sqrt{x^2-2x+2}-x+1\right|+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2-2x+2}-x+1}++\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{(\sqrt{x^2-2x+2}-x+1)^2}+\frac{1}{24}\cdot\frac{1}{(\sqrt{x^2-2x+2}-x+1)^3}$;

5) $-\frac{2}{5}\cdot\frac{\sqrt{x(x+1)}-2x}{1+\sqrt{x(x+1)}}-\frac{2}{5\sqrt{5}}ln\left|\frac{2\sqrt{x+1}-(\sqrt{5}-1)\sqrt{x}}{2\sqrt{x+1}+(\sqrt{5}+1)\sqrt{x}}\right|$; ***6)*** $ln\left|\left(\frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x}\right)^2-1\right|$; ***7)*** $\frac{3}{8}\cdot\frac{x}{x+2}-\frac{x}{4\sqrt{x^2+2x}}$;

8) $\frac{1}{\sqrt{3}}ln\left|\frac{\sqrt{4x^2+4x+3}-2x-\sqrt{3}}{\sqrt{4x^2+4x+3}-2x+\sqrt{3}}\right|$; ***9)*** $-2arctg\frac{1+x+\sqrt{1+x-x^2}}{x}$; ***10)*** $-\frac{2}{\sqrt{x^2+2x+2}}-ln\left|\sqrt{x^2+2x+2}-x-1\right|$;

11) $2\,ln\left|x+\sqrt{x^2-x+1}\right|-\frac{3}{2}ln\left|2x+2\sqrt{x^2-x+1}-1\right|-\frac{3}{4x+4\sqrt{x^2-x+1}-2}$; ***12)*** $ln\left|\frac{\sqrt{x^2+x+1}+x}{\sqrt{x^2+x+1}+x+2}\right|$;

13) $2\,ln\left|\sqrt{x^2+2x+4}-x\right|-\frac{3}{2}ln\left|\sqrt{x^2+2x+4}-x-1\right|-\frac{3}{2\sqrt{x^2+2x+4}-2x-2}$; ***14)*** $\frac{2(1-x)}{\sqrt{1-x^2}-1+x}+2arctg\frac{\sqrt{1-x^2}}{1-x}$.

18. ***1)*** $\frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}}+\frac{24}{11}x^{\frac{11}{6}}+3x^{\frac{4}{3}}$; ***2)*** $\frac{1}{15}(1+x^2)+\sqrt{1+x^2}(3x^2-2)$; ***3)*** $3arctg\sqrt[3]{x}$; ***4)*** $\frac{1}{15}(1+x^2)+\sqrt{1+x^2}(3x^2-2)$; ***5)*** $\frac{3}{22}(1+x^2)^{\frac{11}{3}}-\frac{3}{8}(1+x^2)^{\frac{8}{3}}+\frac{3}{10}(1+x^2)^{\frac{5}{3}}$; ***6)*** $\frac{3}{22}(1+x^2)^{\frac{11}{3}}-\frac{3}{8}(1+x^2)^{\frac{8}{3}}+\frac{3}{10}(1+x^2)^{\frac{5}{3}}$; ***7)*** $2(\sqrt[3]{x}+1)^{\frac{3}{2}}$; ***8)*** $3\,ln\left|\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}+1}\right|+\frac{3}{\sqrt[3]{x}+1}$; ***9)*** $\frac{12}{7}(1+\sqrt[4]{x})^{\frac{7}{3}}-3(1+\sqrt[4]{x})^{\frac{4}{3}}$;

10) $\sqrt{1+x^{-2}}-\frac{1}{3}(1+x^{-2})^{\frac{3}{2}}$; ***11)*** $\frac{1}{4}ln\frac{(\sqrt[3]{1+x^2}-1)^2}{\sqrt[3]{(1+x^2)^2}+\sqrt[3]{1+x^2}+1}+\frac{\sqrt{3}}{2}arctg\frac{2\sqrt[3]{1+x^2}+1}{\sqrt{3}}$; ***12)*** $\frac{5}{4}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{4}{5}}-\frac{5}{9}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{9}{5}}$; ***13)*** $6x^{\frac{3}{2}}\cdot\left(\frac{1}{17}\cdot x^{\frac{4}{3}}+\frac{4}{15}\cdot x+\frac{6}{13}\cdot x^{\frac{2}{3}}+\frac{4}{11}\cdot x^{\frac{1}{3}}+\frac{1}{9}\right)$; ***14)*** $\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{12}\cdot ln\frac{(\sqrt[3]{1-x^2}+\sqrt[3]{x^2})^2}{\sqrt[3]{(1-x^2)^2}+\sqrt[3]{(1-x^2)x^2}+\sqrt[3]{x^4}}-\frac{1}{2\sqrt{3}}arctg\frac{2\sqrt[3]{1-x^2}-\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{x^2}}$; ***15)*** $\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}\cdot ln\frac{(\sqrt[3]{3-x^2}+\sqrt[3]{x^2})^2}{\sqrt[3]{(3-x^2)^2}+\sqrt[3]{(3-x^2)x^2}+\sqrt[3]{x^4}}-\frac{\sqrt{3}}{2}arctg\frac{2\sqrt[3]{3-x^2}-\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{x^2}}$; ***16)*** $2\sqrt{3}arctg\frac{2\cdot\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}+1}{\sqrt{3}}-ln\frac{(\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}-1)^2}{(\sqrt[3]{1+\sqrt{x}})^2+\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}+1}$; ***17)*** $-\frac{\sqrt{1-x^4}}{4x^4}-\frac{1}{8}\cdot ln\frac{1-\sqrt{1-x^4}}{\sqrt{1-x^4}+1}$; ***18)*** $3\,ln\left|\sqrt[3]{x}+1\right|+\frac{6}{\sqrt[3]{x}+1}-\frac{3}{2(\sqrt[3]{x}+1)^2}$; ***19)*** $\frac{1}{4}\cdot ln\left|\frac{\sqrt[4]{1+x^4}+x}{\sqrt[4]{1+x^4}+x}\right|-\frac{1}{2}arctg\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}$;

20) $\frac{\sqrt{3}}{5}arctg\frac{2\cdot\sqrt[3]{1+x^5}+1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{10}\cdot ln\frac{(\sqrt[3]{1+x^5}-1)^2}{(\sqrt[3]{1+x^5})^2+\sqrt[3]{1+x^5}+1}$; ***21)*** $12(\sqrt[4]{x}+1)^{\frac{4}{3}}\cdot\left(\frac{1}{13}\cdot(\sqrt[4]{x}+1)^3-\frac{3}{10}\cdot(\sqrt[4]{x}+1)^2+\frac{3}{7}\cdot(\sqrt[4]{x}+1)-\frac{1}{4}\right)$; ***22)–24)*** не визначаються через елементарні функції.

19. ***1)*** $-\frac{3}{4}\cos x+\frac{1}{12}\cos 3x$; ***2)*** $\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x$; ***3)*** $\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x$;
4) $\sin x-\frac{2}{3}\sin^3 x+\frac{1}{5}\sin^5 x$; ***5)*** $\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\sin 2x+\frac{1}{48}\sin 6x-\frac{1}{32}\sin 8x+\frac{1}{80}\sin 10x$;
6) $-\frac{3}{16}\cos x-\frac{1}{8}\cos 3x-\frac{3}{80}\cos 5x+\frac{1}{112}\cos 7x+\frac{1}{72}\cos 9x+\frac{1}{176}\cos 11x$;
7) $\frac{1}{\sin(\alpha-\beta)}\ln\left|\frac{\sin(x+\beta)}{\sin(x+\alpha)}\right|$ при $\alpha\neq\beta+\pi n, n\in Z$, $(-1)^{n+1}ctg(x+\beta)$ при $\alpha=\beta+\pi n, n\in Z$;
8) $\frac{1}{\cos(\alpha-\beta)}\ln\left|\frac{\sin(x+\alpha)}{\cos(x+\beta)}\right|$ при $\alpha\neq\beta+\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$, $(-1)^n tg(x+\beta)$ при $\alpha=\beta+\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$; ***9)*** $\frac{1}{\sin(\alpha-\beta)}\ln\left|\frac{\cos(x+\beta)}{\cos(x+\alpha)}\right|$ при $\alpha\neq\beta+\pi n, n\in Z$, $(-1)^n tg(x+\beta)$ при $\alpha=\beta+\pi n, n\in Z$.

20. ***1)*** $\frac{1}{6}\ln\frac{1(2+\cos x)^2(1-\cos x)}{(1+\cos x)^3}$; ***2)*** $-\frac{1}{5}(\cos x+2\sin x)+\frac{2\sqrt{5}}{25}\ln\left|\frac{5\sin x\cos x-\sqrt{5}\sin x+2\sqrt{5}\cos x-2}{5\sin x\cos x+\sqrt{5}\sin x-2\sqrt{5}\cos x-2}\right|$;
3) $\frac{1}{2}arctg(tgx)-\frac{\sqrt{3}}{6}arctg(\sqrt{3}tgx)+\frac{(3-\sqrt{3})}{6}\cdot\left[\frac{2x+\pi}{2\pi}\right]$ при $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$, $\frac{2n+1}{12}(3-\sqrt{3})$ при $x=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$; ***4)*** $\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{2tgx-1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{6}\ln\frac{(tgx+1)^2}{tg^2x-tgx+1}+\frac{\pi}{\sqrt{3}}\cdot\left[\frac{2x+\pi}{2\pi}\right]$ при $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$, $\frac{2n+1}{2\sqrt{3}}\pi$ при $x=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$; ***5)*** $\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{tg2x}{\sqrt{2}}+\frac{\pi}{\sqrt{2}}\cdot\left[\frac{4x+\pi}{2\pi}\right]$ при $x\neq\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}, n\in Z$, $\frac{2n+1}{2\sqrt{2}}\pi$ при $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}, n\in Z$; ***6)*** $\sin x-\cos x-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\right|$; ***7)*** $\ln(tg^2x+2)+\frac{3}{\sqrt{2}}arctg\frac{tgx}{\sqrt{2}}$;
8) $arctg(\sin^2 x)$; ***9)*** $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+\sin 2x}{\sqrt{2}-\sin 2x}$; ***10)*** $arctg\frac{tg2x}{2}+\pi\cdot\left[\frac{4x+\pi}{2\pi}\right]$ при $x\neq\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}, n\in Z$, $\frac{\pi}{2}+\pi n$ при $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}, n\in Z$; ***11)*** $\frac{1}{6}arctg\frac{2tgx}{3}+\frac{\pi}{6}\cdot\left[\frac{2x+\pi}{2\pi}\right]$ при $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$, $\frac{2n+1}{12}\pi$ при $x=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$; ***12)*** $\frac{5}{72}\cdot\frac{tgx}{9tg^2x+4}+\frac{13}{432}\left(arctg\frac{3tgx}{2}+\frac{\pi}{6}\cdot\left[\frac{x+\pi}{2\pi}\right]\right)$ при $x\neq\pi+2\pi n,\ n\in Z$, $\frac{13(2n+1)\pi}{864}$ при $x=\pi+2\pi n, n\in Z$; ***13)*** $-\frac{1}{2}\cdot\frac{\cos x}{2\sin x+3\cos x}$; ***14)*** $\ln(tg^2x+2)-\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{tgx}{\sqrt{2}}$; ***15)*** $\frac{1}{4}\ln\frac{5-\sin x}{1-\sin x}$;
16) $\sin x-\frac{3}{\sin x}-8arctg\sin x$; ***17)*** $-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|tg\left(x-\frac{\pi}{8}\right)\right|$; ***18)*** $\frac{1}{2}\ln\frac{1-\sin x}{1+\sin x}$; ***19)*** $\frac{1}{3\cos^3 x}-\frac{1}{\cos x}$;
20) $-\cos x-\ln\left|tg\frac{x}{2}\right|-\frac{1}{2\sin^2 x}$; ***21)*** $\frac{1}{2}\ln\left|tg\frac{x}{2}\right|-\frac{\cos x}{2\sin^2 x}$; ***22)*** $\frac{\sin x}{2\cos^2 x}-\frac{1}{2}\ln\left|tg\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right|$; ***23)*** $\frac{tg^4x}{4}+\frac{3tg^2x}{2}+3\ln|tgx|-\frac{1}{2tg^2x}$; ***24)*** $\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{3\cos^3 x}+\ln\left|tg\frac{x}{2}\right|$; ***25)*** $\frac{tg^4x}{4}-\frac{tg^2x}{2}-\ln|\cos x|$; ***26)*** $-x-ctgx+\frac{ctg^3x}{3}-\frac{ctg^5x}{5}$; ***27)*** $-\frac{1}{2tgx}-\frac{1}{2\sqrt{2}}arctg\frac{tgx}{\sqrt{2}}$; ***28)*** $\frac{1}{6}arctg\frac{2tgx}{3}+\frac{\pi}{6}\cdot\left[\frac{2x+\pi}{2\pi}\right]$ при $x\neq\pi+2\pi n, n\in Z$, $\frac{2n+1}{2\sqrt{5}}\pi$ при $x=\pi+2\pi n, n\in Z$; ***29)*** $\frac{5}{2}arctg\left(\frac{tgx}{2}\right)+\frac{5\pi}{2}\cdot\left[\frac{x+\pi}{2\pi}\right]$ при $x\neq\pi+2\pi n,\ n\in Z$, $\frac{5(2n+1)\pi}{4}$ при $x=\pi+2\pi n, n\in Z$; ***30)*** $\frac{4}{3}\ln\left|\frac{tg\frac{1}{2}x+3}{tg\frac{1}{2}x-3}\right|$ при $x\neq\pi+2\pi n, n\in Z$, 0 при $x=\pi+2\pi n, n\in Z$; ***31)*** $tg\frac{x}{2}$; ***32)*** $\frac{2\cos\frac{1}{2}x}{3\cos\frac{1}{2}x+\sin\frac{1}{2}x}$; ***33)*** $\ln\left|tg\left(\frac{x}{2}+1\right)\right|$; ***34)*** $\frac{2}{\sqrt{15}}arctg\frac{4tg\frac{1}{2}x+3}{\sqrt{15}}+\frac{2\pi}{\sqrt{15}}\cdot\left[\frac{x+\pi}{2\pi}\right]$ при $x\neq\pi+2\pi n, n\in Z$, $\frac{2n+1}{\sqrt{15}}\pi$ при $x=\pi+2\pi n, n\in Z$; ***35)*** $\frac{2}{3}arctg\frac{5tg\frac{1}{2}x+4}{3}+\frac{2\pi}{3}\cdot\left[\frac{x+\pi}{2\pi}\right]$ при $x\neq\pi+2\pi n,\ n\in Z$, $\frac{2n+1}{3}\pi$ при $x=\pi+2\pi n, n\in Z$; ***36)*** $\ln\left(\sin^2\frac{x}{2}+3\cos^2\frac{x}{2}\right)$; ***37)*** $-\frac{1}{4}tg\frac{x}{2}-\frac{1}{16}\ln\left|2tg^2\frac{x}{2}-1\right|-\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}tg\frac{1}{2}x-1}{\sqrt{2}tg\frac{1}{2}x+1}\right|$; ***38)*** $\frac{1}{4}tg^2\frac{x}{2}+tg\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\ln\left|tg\frac{x}{2}\right|$; ***39)*** $\ln\left|\frac{\sin\frac{1}{2}x-5\cos\frac{1}{2}x}{\sin\frac{1}{2}x-3\cos\frac{1}{2}x}\right|$;
40) $\frac{1}{13}\ln\left|tg\left(\frac{x}{2}+\frac{arctg\frac{5}{12}}{2}\right)\right|$; ***41)*** $\frac{x}{10}+\frac{1}{5}\ln|2\sin x-4\cos x|$; ***42)*** $\frac{x}{5}+\frac{2}{5}\ln|2\sin x+\cos x|$; ***43)*** $\frac{8x}{61}-\frac{27}{61}\ln|6\cos x-5\sin x|$; ***44)*** $\ln|\sin x-\cos x+1|-\ln\left|\frac{\sin\frac{1}{2}x}{\sin\frac{1}{2}x+\cos\frac{1}{2}x}\right|$; ***45)*** $\frac{x}{5}-\frac{2}{5}\ln|\sin x+2\cos x+3|-\frac{3}{5}arctg\frac{tg\frac{1}{2}x+1}{2}-\frac{3}{5}\pi\left[\frac{x+\pi}{2\pi}\right]$, $x\neq\pi+2\pi n$, $\frac{x}{5}-\frac{2}{5}\ln|\sin x+2\cos x+3|-\frac{3}{5}\cdot\left(\frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $x=\pi+2\pi n$; ***46)*** $-\frac{x}{5}+\frac{3}{5}\ln|\sin x-2\cos x+3|+\frac{8}{5}arctg\frac{5tg\frac{1}{2}x+1}{2}-\frac{3}{5}\pi\left[\frac{x+\pi}{2\pi}\right]$, $x\neq$

$\pi + 2\pi n, -\frac{x}{5} + \frac{3}{5} ln|sin\, x - 2\, cos\, x + 3| + \frac{8}{5} \cdot \left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right), x = \pi + 2\pi n$; ***47)*** $-\frac{2}{5} sin\, x + \frac{6}{5} cos\, x + \frac{11}{5\sqrt{5}} ln \left|\frac{2\, sin\frac{1}{2}x + (1-\sqrt{5})\, cos\frac{1}{2}x}{2\, sin\frac{1}{2}x + (1+\sqrt{5})\, cos\frac{1}{2}x}\right|$; ***48)*** $-2\, sin\, x + \frac{4}{\sqrt{5}} ln \left|\frac{2\, sin\frac{1}{2}x + (\sqrt{5}-1)\, cos\frac{1}{2}x}{2\, sin\frac{1}{2}x - (\sqrt{5}+1)\, cos\frac{1}{2}x}\right|$;

21. ***1)*** $-\frac{1}{2}\ln\left(\sin x + \cos x + \sqrt{2 + \sin 2x}\right) + \frac{1}{2}\arcsin\frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{3}}$; ***2)*** $\frac{3\left(\cos^2 x + 5\right)}{5 \cdot \sqrt[3]{\cos x}}$; ***3)*** $-3\sqrt[3]{\cos^4 x\, \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\cos^2 x + \frac{1}{16}\cos^4 x\right)}$; ***4)*** $2\sqrt{\operatorname{tg} x} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\frac{\operatorname{tg} x + \sqrt{2\operatorname{tg} x} + 1}{\operatorname{tg} x - \sqrt{2\operatorname{tg} x} + 1} - \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2\operatorname{tg} x} + 1\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2\operatorname{tg} x} + 1\right)$; ***5)*** $\frac{e^x}{5}(\sin x\, \operatorname{sh} x - \sin x \operatorname{ch} x - 3\cos x \operatorname{sh} x + 2\cos x \operatorname{ch} x)$; ***6)*** $e^{3x}\left(-\frac{3}{40}\sin 4x \operatorname{sh} 5x + \frac{1}{8}\sin 4x \operatorname{ch} 5x + \frac{1}{10}\cos 4x \operatorname{sh} 5x + 2\cos x \operatorname{ch} x\right)$; ***7)*** $e^{2x}\left(\frac{7}{30}\sin 3x \operatorname{sh} x - \frac{1}{15}\sin 3x \operatorname{ch} x + \frac{2}{15}\cos 3x \operatorname{sh} x + \frac{1}{30}\cos 3x \operatorname{ch} x\right)$; ***8)*** $\frac{e^x}{8}(-\sin 2x \operatorname{sh} x + 3\sin 2x \operatorname{ch} x + \cos 2x \operatorname{sh} x + 2\cos 2x \operatorname{ch} x)$; ***9)*** $e^x\left((2x-1)\sin x - (2x+1)\cos x\right)$; ***10)*** $\frac{e^{3x}}{169}\left(\left(26x^2 - 24x + \frac{92}{13}\right)\sin 2x + \left(39x^2 - 10x - \frac{18}{13}\right)\cos 2x\right)$; ***11)*** $\frac{e^x}{5}\left(\left(x^2 - \frac{6}{5}x - \frac{22}{25}\right)\cos 2x + \left(2x^2 + \frac{8}{5}x - \frac{4}{25}\right)\sin 2x\right)$; ***12)*** $-\frac{e^{-x}}{5}\left((2x-1)\cos x + (2x+1)\sin x\right)$; ***13)*** $x - \ln(1 + e^x) + \frac{1}{1+e^x} + \frac{1}{(1+e^x)^2}$; ***14)*** $e^x - \ln(1 + e^x)$; ***15)*** $x - 3\ln\left(e^{\frac{x}{6}} + 1\right) - \frac{3}{2}\ln\left(e^{\frac{x}{3}} + 1\right) - 3\operatorname{arctg} e^{\frac{x}{6}}$; ***16)*** $x + \frac{8}{e^{\frac{x}{4}} + 1}$;

22. ***1)*** $\frac{x^2|x|}{3}$; ***2)*** $\frac{2}{3}x^2(x + |x|)$; ***3)*** $F(x) = |x|$; ***4)*** $\frac{x^3|x|}{4}$; ***5)*** e^x при $x < 0$, $2 - e^{-x}$ при $x \geq 0$; ***6)*** x при $x < 1$, $\frac{1}{2}(x^2 + 1)$ при $x \geq 1$; ***7)*** $\frac{1}{2}x^2$ при $x \leq 1$, $\frac{1}{3}x^3$ при $0 < x < 1$, $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}$ при $x \geq 1$; ***8)*** $\frac{[x]}{\pi}\left([x] - (-1)^{[x]}\cos \pi x\right)$; ***9)*** $x + \frac{1}{2}x^2$ при $x < -1$, $x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{6}$ при $-1 \leq x \leq 1$, $x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}$ при $x > 1$; ***10)*** $\frac{3}{2} - e^{-x}$ при $x < 0$, $\frac{1}{2}e^{x^2} + 1$ при $x \geq 0$; ***11)*** $F(x) = x + 1 + \frac{1}{e}$ при $x < -1$, e^x при $-1 \leq x \leq 0$, $\frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{2}$ при $x > 0$; ***12)*** $F(x) = \frac{1}{4}\sin \pi x$ при $x < -1$, $x + 1$ при $-1 \leq x \leq 1$, $x \ln x - x + 3$ при $x > 1$; ***13)*** $(-1)^{\left[\frac{x}{\pi}\right]-1}\cos x + 2\left[\frac{x}{\pi}\right]$; ***14)*** $F(x) = x[x] - \frac{1}{2}[x]([x] + 1)$; ***15)*** $F(x) = x$ при $|x| > 2$, $-x$ при $-2 < x \leq -1$; $x + 2$ при $-1 < x \leq 1$, $-x + 4$ при $1 < x < 2$; ***16)*** $F(x) = x$ при $x < -2$, $-x - 4$ при $-2 \leq x \leq -1$; $x - 2$ при $-1 < x \leq 1$, $-x$ при $1 < x < 2$, $x - 4$ при $x > 2$; ***17)*** $F(x) = x[e^x] - \ln([e^x]!)$; ***18)*** $F(x) = \frac{1}{2}x^2[x] - \frac{1}{12}[x]([x] + 1)(2[x] + 1)$; ***19)*** $F(x) = \frac{1}{\pi}\arccos\cos \pi x$; ***20)*** $F(x) = \frac{1}{2}x^2 - x[x] + \frac{1}{2}[x]([x] + 1)$; ***21)*** $5x - \frac{x^3}{3}$ при $x < -2$, $x - \frac{16}{3}$ при $-2 \leq x < -1$; $\frac{x^3}{3} - 6$ при $-1 \leq x < 1$, $x - \frac{20}{3}$ при $1 \leq x < 2$, $5x - \frac{x^3}{3} - 12$ при $x \geq 2$; ***22)*** $\frac{x^2}{2} - 2x$ при $x < -4$, $6x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{80}{3}$ при $-4 \leq x \leq 2$, $\frac{x^2}{2} - 2x + 36$ при $x > 2$; ***23)*** $F(x) = \frac{x^2}{2}$ при $x \leq 0$, $2x + 3\ln|x - 1|$ при $x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$; ***24)*** $F(x) = \frac{x^3}{3} - x$ при $x \leq 0$, $2x - 2\ln|x + 1|$ при $x > 0$; ***25)*** $\frac{x^2}{2}$ при $x < 0$, $\frac{x^6}{6}$ при $x \geq 0$; ***26)*** $\frac{x^2}{2}$ при $x < 1$, $\frac{x^6}{6} + \frac{1}{3}$ при $x \geq 1$; ***27)*** $\frac{x^4|x|}{5}$; ***28)*** $\frac{x^3|x|}{4}$; ***29)*** $x - x^2$ при $x < -1$, $3x + 1$ при $-1 \leq x \leq 2$, $x^2 - x + 5$ при $x > 2$; ***30)*** $x - x^2$ при $x < 0$, x при $0 \leq x \leq 1$, $x^2 - x + 1$ при $x > 1$; ***31)*** $\frac{x^2}{2}$ при $x < 0$, $\frac{x^3}{3}$ при $0 \leq x \leq 1$; $\frac{x^2}{2} - \frac{1}{6}$ при $x \geq 1$; ***32)*** $\frac{x^5}{5}$ при $x < -1$, $\frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}$ при $-1 \leq x \leq 1$; $\frac{x^5}{5} + \frac{4}{15}$ при $x \geq 1$; ***33)*** $\frac{x^3}{3} - 5x$ при $x < -\sqrt{5}$, $-\frac{x^3}{3} + 5x + \frac{20\sqrt{5}}{3}$ при $-\sqrt{5} \leq x < -1$; $\frac{x^3}{3} + 3x + \frac{20\sqrt{5}-4}{3}$ при $-1 \leq x < 1$, $-\frac{x^3}{3} + 5x + \frac{20\sqrt{5}-8}{3}$ при $1 \leq x < \sqrt{5}$, $\frac{x^3}{3} - 5x + \frac{40\sqrt{5}-8}{3}$ при $x \geq \sqrt{5}$; ***34)*** $-\frac{x^2}{2} - x$ при $x <$

$-1, \frac{x^2}{2} + x + 1$ при $-1 \le x < 0$; $-\frac{x^2}{2} + x + 1$ при $0 \le x < 1$, $\frac{x^2}{2} - x + 2$ при $x \ge 1$; ***35)*** $\frac{x^2}{2} - \pi x \left[\frac{2x+\pi}{2\pi}\right]$; ***36)*** $\frac{x^2}{2} - \pi x \left[\frac{x}{\pi}\right]$.

Відповіді. Розділ 4. Інтеграл Рімана

25. ***1) а)*** $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(2+\frac{k}{n}\right)^3$; ***б)*** $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{2n-1}\frac{1}{-3+\frac{k}{n}}$; ***в)*** $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{2n-1}\left(-2+\frac{k}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\sum_{k=2n}^{3n-1}\left(-2+\frac{k+1}{n}\right)^2$; ***2) а)*** $S_n = \frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sin\left(-1+\frac{2k}{n}\right)$; ***б)*** $S_n = \frac{3}{n}\sum_{k=1}^{2n}\mathrm{e}^{-\frac{3k}{n}}$; ***в)*** $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left|-1+\frac{k+1}{n}\right| + \frac{1}{n}\sum_{k=n}^{4n-1}\left|-1+\frac{k}{n}\right|$; ***3) а)*** $S_n = \frac{5}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\operatorname{sgn}\left(-2+\frac{5k}{n}\right)$; ***б)*** $S_n = \frac{5}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}\left[-\frac{1}{2}+\frac{5k}{2n}\right]$; ***в)*** $S_n = \left(4^{\frac{1}{n}}-1\right)\sum_{k=0}^{n-1}4^{-\frac{k}{n}}$; ***г)*** $S_n = \left(b^{\frac{1}{n}}-a^{\frac{1}{n}}\right)\sum_{k=0}^{n-1}a^{\frac{n-k-1}{n}}b^{\frac{k}{n}}\left(\frac{n-k}{n}\ln a + \frac{k}{n}\ln b\right)$; ***4) а)*** $S_n = \frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{3k}{n}\right)$; ***б)*** $S_n = \frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(-1+\frac{3k}{n}\right)^2$; ***в)*** $S_n = 2\cdot\left(1-4^{-\frac{1}{n}}\right)\sum_{k=1}^{n}1$; ***г)*** $S_n = a^m\left(b^{\frac{1}{n}}-a^{\frac{1}{n}}\right)\sum_{k=0}^{n-1}a^{\frac{n-k-1}{n}}b^{\frac{k}{n}}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{km}{n}}$.

26. ***1)*** 1; ***2)*** $\frac{4(n+1)}{n}$; ***3)*** $\frac{51}{50}$; ***4)*** $\frac{3533}{20000}$; ***5)*** $\frac{100}{n}$; ***6)*** $\frac{1}{n}$; ***7)*** $\frac{\pi}{2n}$; ***8)*** $\frac{1}{2n}$.

27. ***1)*** 1; ***2)*** $\frac{1}{2}$; ***3)*** 8; ***4)*** 4; ***5)*** $\frac{13}{2}$; ***6)*** 3; ***7)*** 1; ***8)*** $\frac{a-1}{\ln a}$; ***9)*** $\frac{3}{4}$; ***10)*** $\ln 4$; ***11)*** $\frac{1}{m+1}(b^{m+1}-a^{m+1})$; ***12)*** $b(\ln b-1)-a(\ln a-1)$.

28. ***1)*** $\ln 2$; ***2)*** $\frac{1}{2}$; ***3)*** $\frac{\pi}{4}$; ***4)*** $\frac{1}{p+1}$; ***5)*** 2; ***6)*** $\frac{\pi}{6}$; ***7)*** $\ln 3$; ***8)*** $\frac{1}{4}\left(\sqrt[3]{16}-1\right)$; ***9)*** $2\ln 2-1$; ***10)*** e; ***11)–13)*** $\frac{4}{\mathrm{e}}$; ***14)*** $\frac{4}{\mathrm{e}}$; ***15)*** $\frac{5\pi}{6}$; ***16)*** $\pi\ln\left(1+\frac{1}{2}\sin 1\right)$; ***17)*** 1; ***18)*** $\frac{\pi}{4}$; ***19)*** $\frac{1}{4}$; ***20)*** $1-\cos 1$; ***21)*** $\frac{1}{\ln 2}$; ***22)*** $\ln\frac{4}{\mathrm{e}}$; ***23)*** $\sin 1-\cos 1$; ***24)–13)*** 0; ***25), 26)*** $+\infty$; ***27)–29)*** 0; ***30), 31)*** $+\infty$; ***32), 33)*** 0.

30. ***1), 2)*** $\mu_L = 0$; ***3), 4)*** $\mu_L > 0$; ***5)–7)*** $\mu_G = 0$; ***8), 9)*** $\mu_L = 0$; ***10), 11)*** $\mu_G = 0$; ***12)*** $\mu_L = 0$; ***13), 14)*** $\mu_L > 0$; ***15)–20)*** $\mu_G = 0$; ***21), 22)*** $\mu_L = 0$; ***23), 24)*** $\mu_G = 0$; ***25)*** $\mu_L > 0$; ***26), 27)*** $\mu_L = 0$.

31. ***1), 2)*** так; ***3)*** ні; ***4), 5) а)*** так; ***5) б), в)*** ні; ***5) г)*** так; ***6) а)*** ні; ***б), в)*** так; ***г)–е)*** ні; ***7) а)*** так; ***б)*** ні; ***8)–11)*** так;

33. ***1)*** так; ***2) а)*** ні; ***б)*** так; ***3)*** так; ***4), 5)*** ні; ***6), 7)*** так; ***8) а)*** ні; ***б)*** так; ***9) а)*** так; ***б)*** ні; ***10) а)*** ні; ***б), в)*** так;

34. ***1)*** $35-72\ln\frac{4}{3}$; ***2)*** $\frac{9\pi}{4}$; ***3)*** 1; ***4)*** $\frac{\pi}{3}$; ***5)*** $\frac{5}{2}$; ***6)*** 2; ***7)*** $200\sqrt{2}$; ***8)*** $\frac{8\pi}{\sqrt{3}}$; ***9)*** $200\sqrt{2}$; ***10)*** $20\sqrt{2}$; ***11)*** $\ln\sqrt{\frac{\mathrm{e}}{2}}$; ***12)*** π; ***13)*** 4π; ***14)*** $\frac{5\mathrm{e}^3-2}{27}$; ***15)*** 1; ***16)*** $\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$; ***17)*** 1; ***18)*** $\frac{3\mathrm{e}^{\pi}-3}{5}$; ***19)*** $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$; ***20)*** $\frac{\ln 3}{2}-\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$; ***21)*** $\frac{\pi}{6}-\arcsin\frac{1}{4}$; ***22)*** $\frac{4\pi-\sqrt{27}}{3}$; ***23)*** $\sqrt{2}$; ***24)*** $-\pi$; ***25)*** $\frac{1}{\pi}$; ***26)*** $2\pi-4$; ***27)*** $\frac{\ln 2}{2}$; ***28)*** $\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}-e^{-1}\right)$; ***29)*** $\frac{1}{2}(\mathrm{e}\sin 1+\mathrm{e}\cos 1+1)$; ***30)*** $\sin 1$; ***31)*** $\frac{65}{4}$; ***32)*** $\frac{11}{3}$; ***33) –36)*** 0; ***37)*** $\frac{\pi^2}{4}-2$; ***38)*** $\frac{\pi}{4}-\frac{\ln 2}{2}$; ***39)*** $\ln\left(\sqrt{2}+1\right)+\sqrt{2}-\frac{3}{2}$; ***40)*** $\ln\left(\sqrt{2}+1\right)+1-\sqrt{2}$; ***41)*** $\frac{3}{2}\mathrm{e}^{\frac{5}{2}}$; ***42)*** $2\sqrt{2}\pi$;

36. ***1)*** $\frac{\pi}{4}$; ***2)*** 1; ***3)*** $\frac{\pi}{8}\ln 2$; ***4)*** $\frac{\pi^2}{4}$; ***5)*** $\frac{\pi}{2}$;

38. ***1) а) – г)*** не можна; ***д)*** можна; ***е – з)*** не можна; ***и)*** можна; ***2) а) – в)*** не можна; ***г)*** можна;

39. ***1) а)*** $I_n = \frac{n-1}{n}I_{n-2}$, $I_7 = \frac{16}{35}$; ***б)*** $I_n = \frac{n-1}{n}I_{n-2}$, $I_7 = \frac{32}{35}$; ***в)*** $I_n = \frac{n-1}{n}I_{n-2}$, $I_7 = 0$; ***г)*** $I_n = \frac{n-1}{n}I_{n-2} + \frac{(-1)^{n-1}-1}{n}\cdot 2^{-\frac{n}{2}}$, $I_7 = 0$; ***2) а)*** $I_n = \frac{n-1}{n}I_{n-2}$, $I_8 = \frac{35\pi}{128}$; ***б)*** $I_n = \frac{n-1}{n}I_{n-2}$, $I_8 = \frac{35\pi}{128}$; ***в)*** $I_n = \frac{n-1}{n}I_{n-2} + \frac{1}{n\cdot 2^{\frac{n}{2}}}$, $I_8 = \frac{35\pi}{256}+\frac{5}{24}$; ***г)*** $I_n = \frac{n-1}{n}I_{n-2} + \frac{1-(-1)^{n-1}}{n\cdot 2^n}\cdot\sqrt{3}$, $I_8 = \frac{35\pi}{374}+\frac{309\sqrt{3}}{1024}$; ***3)*** $I_n = -n(n-1)I_{n-2} + \frac{n\cdot\pi^{n-1}}{2^{n-1}}$, $I_3 = \frac{3\pi^4}{4}-3$; ***3)*** $I_n = -n(n-1)I_{n-2} + \frac{n\cdot\pi^{n-1}}{2^{n-1}}$, $I_3 = \frac{3\pi^4}{4}-3$; ***4)*** $I_n =$

$-I_{n-1}+\frac{1}{2n-1}$, $I_4=\frac{\pi}{4}-\frac{76}{105}$; ***5)*** $I_n=\frac{2n}{2n+1}I_{n-1}+\frac{1}{2n-1}$, $I_4=\frac{128}{315}$; ***6)*** $I_n=-n(n-1)I_{n-1}+\frac{\pi^n}{2\cdot 6^n}-\frac{n\cdot\pi^{n-1}\cdot\sqrt{3}}{2\cdot 6^{n-1}}$, $I_4=\frac{\pi^4}{2592}-\frac{\sqrt{3}\cdot\pi^3}{108}-\frac{\pi^6}{6}+2\sqrt{3}\pi+12$; ***7)*** $I_n=-I_{n-1}+\frac{2}{2n-1}$, $I_3=\frac{26}{15}-\frac{\pi}{2}$; ***8)*** $I_{n+2}=\frac{n}{n+1}I_n+\frac{2^{\frac{n}{2}}}{n+1}$, $I_4=\frac{4}{3}$; ***9)*** $I_{n+2}=\frac{n}{n+1}I_n+\frac{2^n\sqrt{3}}{n+1}$, $I_4=\frac{11\sqrt{3}}{4}+\frac{3}{8}\ln\left(2-\sqrt{3}\right)$; ***10)*** $I_n=-\frac{n-1}{n}I_{n-2}+\frac{\mathrm{sh}^{n-1}1\cdot\mathrm{ch}1\cdot\left(1-(-1)^{n-1}\right)}{n}$, $I_7=0$; ***11)*** $I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}+\frac{\mathrm{ch}^{n-1}1\cdot\mathrm{sh}1}{n}$, $I_5=\frac{\mathrm{ch}^4 1\cdot\mathrm{sh}1}{5}+\frac{4\mathrm{ch}^2 1\cdot\mathrm{sh}1}{15}+\frac{8\mathrm{sh}1}{15}$;

40. ***1)*** $\frac{\pi(2n)!(2m)!}{2^{2m+2n+1}\cdot n!\cdot m!\cdot(m+n)!}$; ***2)*** $\frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}}$; ***3)*** 0 при n парному, π при n непарному; ***4)*** $(-1)^n\pi$; ***5)*** $\frac{\pi}{2^n}$; ***6)*** $\frac{\pi}{2^n}\sin\frac{\pi n}{2}$;

41. ***1)*** $\chi_D=1-\chi_A$; ***2)*** $\chi_D=\chi_A\cdot\chi_B$; ***3)*** $\chi_D=\chi_A+\chi_B-\chi_A\cdot\chi_B$; ***4)*** $\chi_D=\chi_A-\chi_A\cdot\chi_B$; ***5)*** $\chi_D=\chi_A+\chi_B-2\chi_A\cdot\chi_B$; ***6)*** $\chi_D=\prod_{k=1}^{n}\chi_{A_k}$; ***7)*** $\chi_D=\sum_{k=1}^{n}\chi_{A_k}-\sum_{1\le k<i\le n}\chi_{A_k}\chi_{A_i}+\sum_{1\le k<i<j\le n}\chi_{A_k}\chi_{A_i}\chi_{A_j}-\cdots+(-1)^{n+1}\chi_{A_1}\chi_{A_2}\ldots\chi_{A_n}$; ***8)*** $\chi_D=\sum_{k=1}^{n}\chi_{A_k}$.

42. ***1)*** не обов'язково; ***2) – 4)*** буде інтегрованою.

43. ***1) а) – б)*** інтеграл не існує; ***в)*** $\frac{1}{3}$; ***г) – д)*** 0; ***е)*** 1; ***2) а)*** $\frac{1}{2}$; ***б)*** $\frac{1}{4}$; ***в)*** 0; ***г)*** $\frac{1}{2}$; ***д) , е)*** 0; ***3) а)*** інтеграл не існує; ***б)*** 0; ***в)*** інтеграл не існує; ***г)*** 0;

44. ***1)*** 0; ***2)*** інтеграл не існує; ***3) а)*** інтеграл не існує; ***б)*** 0; ***4)*** -1;

45. ***1)*** $\{0;1;3;4\}$, 2; ***2)*** $\{-1;2\}$, 3; ***3)*** $\left\{\frac{1}{i}\mid i\in N\right\}\cup\{0\}$, 0; ***4)*** $\left\{\frac{1}{i}\mid i\in N\right\}\cup\{0\}$, 4; ***5) – 6)*** E, 0; ***7)*** $[0,1]$, не існує; ***8)*** $[-1;1]$, не існує;

46. ***1)*** $\{0;1;3;4\}$ *??????????*

51. ***а)*** $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{dx}}=\mathrm{e}^{-(t+\cos^2 x)^2}\cdot(-2\cos x\sin x)-\mathrm{e}^{-(t-\cos(x^2))^2}\cdot(-\sin(x^2))\cdot 2x$, $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{dt}}=\mathrm{e}^{-(t+\cos^2 x)^2}-\mathrm{e}^{-(t-\cos(x^2))^2}$; ***б)*** $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{dx}}=\frac{\sin(t+\sin x)}{t+\sin x}\cdot\cos x-\frac{\sin(x+\sin t)}{x+\sin t}$, $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{dt}}=\frac{\sin(t+\sin x)}{t+\sin x}\cdot\cos x-\frac{\sin(x+\sin t)}{x+\sin t}$; ***в)*** $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{dx}}=\frac{\ln(tx^2)}{tx^2}\cdot 2xt-\frac{\ln(t^2x)}{t^2x}\cdot t^2$, $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{dt}}=\frac{\ln(tx^2)}{tx^2}\cdot x^2-\frac{\ln(t^2x)}{t^2x}\cdot 2tx$; ***г)*** $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{dx}}=\mathrm{arctg}((t+x)^6)\cdot 2(x+t)-\mathrm{arctg}(x^2+t^2)\cdot 2x$, $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{dt}}=\mathrm{arctg}((t+x)^6)\cdot 2(x+t)-\mathrm{arctg}(x^2+t^2)\cdot 2t$; ***д)*** $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{dx}}=-\frac{\cos(x^3+\sqrt{x})}{(x^3+\sqrt{x})^2}\cdot\left(3x^2+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$, $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{dt}}=\frac{\cos(t+t^2)}{(t+t^2)^2}\cdot(1+2t)$; ***е)*** $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{dx}}=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{dt}}=\cos((2t+2x)^2)\frac{\ln(tx^2)}{tx^2}\cdot 2+\cos((t+x)^2)$; ***є)*** $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{dx}}=\frac{\mathrm{e}^{t+x}}{t+x}-\frac{\mathrm{e}^{t^3x^2}}{t^3x^2}\cdot 2t^3x$, $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{dt}}=\frac{\mathrm{e}^{t+x}}{t+x}-\frac{\mathrm{e}^{t^3x^2}}{t^3x^2}\cdot 3t^2x^2$; ***ж)*** $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{dx}}=x^{x+1}(\ln x+1+x^{-1})-x^x(\ln x+1)t^4$, $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{dt}}=-4x^x t^3$;

52. ***1)*** 2; ***2)*** $\frac{\pi^2}{4}$; ***3)*** $\frac{1}{2}$; ***4)*** 1; ***5)*** $\frac{1}{6}$; ***6)*** 0; ***7)*** 1; ***8)*** 1; ***9)*** 1; ***10)*** 0; ***11)*** $\frac{1}{3}$; ***12)–14)*** 0; ***15)*** $-\frac{1}{3}$; ***16)*** 0; ***17)*** $+\infty$; ***18)*** 0; ***19)*** 0;