Київський національний університет
імені Тараса Шевченка

Наближені методи розв’язання рівнянь

(для студентів факультету комп’ютерних наук та кібернетики)

RAI

Київ 2022

УДК 528.11

ББК 22.19я73

Автор

Риженко А.І.

Наближені методи розв’язання рівнянь (для студентів факультету комп’ютерних наук та кібернетики): Методичні розробки / Риженко А.І. – Київ, 2022. - 44с.

В методичних розробках розглянуті основні наближені методи розв’язання нелінійних рівнянь, детально розглянуте теоретичне обґрунтування методів, умови їх застосування, наведені приклади розв’язання задач, завдання для самостійної роботи, варіанти лабораторних робіт.

RAU

Розглянемо задачу знаходження коренів рівняння

$$f(x)=0, \tag{1}$$

де $f(x)$ – задана функція дійсної змінної.

Розв'язування даної задачі можна розкласти на декілька етапів:
1) дослідження розташування коренів (в загальному випадку на комплексній площині) та їх кратність;
2) відділення коренів, тобто виділення областей, що містять тільки один корінь;
3) обчислення кореня із заданою точністю.

Для розв'язання перших двох задач використовуються методи математичного аналізу, алгебри, а також графічний метод. Далі будемо розглядати методи розв'язання задач третього етапу.

Метод ділення проміжку навпіл.

Нехай $f \in C[a,b]$, $f(a)f(b)<0$ і відомо, що рівняння (1) має єдиний корінь $x_* \in [a,b]$. Покладемо $a_0=a$, $b_0=b$, $x_0=(a_0+b_0)/2$. Якщо $f(x_0)=0$, то $x_*=x_0$. Якщо $f(x_0)\neq 0$, то покладемо

$$a_{n+1}=\begin{cases} x_n, & \text{якщо } \operatorname{sign} f(a_n)=\operatorname{sign} f(x_n), \\ a_n, & \text{якщо } \operatorname{sign} f(a_n)\neq \operatorname{sign} f(x_n), \end{cases} \tag{2}$$

$$b_{n+1}=\begin{cases} x_n, & \text{якщо } \operatorname{sign} f(b_n)=\operatorname{sign} f(x_n), \\ b_n, & \text{якщо } \operatorname{sign} f(b_n)\neq \operatorname{sign} f(x_n), \end{cases} \tag{3}$$

$$x_{n+1}=\frac{a_{n+1}+b_{n+1}}{2}, \quad n=0,1,2,..., \tag{4}$$

і обчислимо $f(x_{n+1})$. Якщо $f(x_{n+1})=0$, то ітераційний процес зупинимо і будемо вважати, що $x_* \approx x_{n+1}$. Якщо $f(x_{n+1})\neq 0$, то повторюємо розрахунки за формулами (2)-(4).

З формул (2), (3) видно, що $\operatorname{sign} f(a_{n+1})=\operatorname{sign} f(a_n)$ і $\operatorname{sign} f(b_{n+1})=\operatorname{sign} f(b_n)$. Тому $f(a_{n+1})f(b_{n+1})<0$, а отже шуканий корінь x_* знаходиться на проміжку $[a_{n+1},b_{n+1}]$. При цьому має місце апріорна оцінка точності

$$|x_n - x_*| \le \frac{b-a}{2^{n+1}}. \tag{5}$$

Звідси випливає, що кількість ітерацій, які достатньо провести для знаходження наближеного кореня рівняння (1) із заданою точністю ε задовольняє співвідношенню

$$n \geq \left[\log_2 \frac{b-a}{\varepsilon} \right], \tag{6}$$

де $[c]$ – ціла частина числа c.

Степінь збіжності – лінійна, тобто еквівалентна швидкості збіжності геометричної прогресії із знаменником $q = \frac{1}{2}$.

Метод ділення проміжку навпіл належить до групи двосторонніх методів, тобто завжди виконується співвідношення $f(a_{n+1})f(b_{n+1}) < 0$, тому апостеріорною умовою зупинки ітераційного процесу буде

$$|b_{n+1} - a_{n+1}| < 2\varepsilon,$$

а значення $x_{n+1} = \frac{a_{n+1} + b_{n+1}}{2}$ буде наближати корінь рівняння (1) з точністю ε.

Серед переваг даного методу слід відзначити простоту реалізації, надійність та існування на кожному кроці двосторонніх оцінок, а такж те, що послідовність $\{x_n\}$ збігається до кореня x_* для довільних неперервних функцій $f(x)$. До недоліків можна віднести невисоку швидкість збіжності методу та неможливість безпосереднього узагальнення алгоритму для систем нелінійних рівнянь.

Метод простої ітерації

Метод ітерації застосовується для знаходження коренів рівняння

$$f(x) = 0. \tag{1}$$

Для застосування методу ітерації необхідно рівняння (1) перетворити у еквівалентне рівняння виду

$$x = \varphi(x). \tag{2}$$

Таке перетворення можна провести багатьма способами, наприклад

$$x = x + \psi(x) f(x),$$

де $\psi(x)$ - довільна знакостала неперервна функція на відрізку, де шукаємо корінь.

Сам метод ітерації зводиться до наступного. Будемо вважати, що маємо початкове наближення x_0 до кореня рівняння (1), а наступні наближення знаходяться за формулою

$$x_{n+1} = \varphi(x_n),\ n=0,1,2,\ldots \tag{3}$$

Якщо послідовність $\{x_n\}$ має границю x_* і функція $\varphi(x)$ неперервна, то x_* - розв'язок рівняння (1). Щоб упевнитися в цьому достатньо перейти до границі в (3) при $n \to \infty$. Числа x_n приймаються за наближені значення кореня. Відмітимо, що послідовність $\{x_n\}$ не завжди збіжна.

<u>Визначення:</u> ітераційний метод (3) збігається, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_*$

Наведемо достатні умови збіжності методу простої ітерації.

<u>Теорема 1.</u> Нехай для вибраного початкового наближення x_0 на проміжку

$$S = \{x : |x - x_0| \le \delta\} \tag{4}$$

функція $\varphi(x)$ задовольняє умові Ліпшиця

$$|\varphi(x') - \varphi(x'')| \le q|x' - x''|, \quad x', x'' \in S,\ 0 < q < 1 \tag{5}$$

та виконується нерівність

$$|\varphi(x_0) - x_0| \le (1-q)\delta. \tag{6}$$

Тоді рівняння (2) має на проміжку S єдиний корінь x_*, до якого збігається послідовність (3), причому швидкість збіжності визначається оцінкою

$$|x_n - x_*| \le \frac{q^n}{1-q}|\varphi(x_0) - x_0|. \tag{7}$$

<u>Доведення</u> : Покажемо, що має місце нерівність

$$|x_k - x_{k-1}| \le mq^{k-1},\ k=1,2,3,\ldots, \tag{8}$$

де $m = |\varphi(x_0) - x_0| = |x_1 - x_0|$.

Відзначимо, що при виконанні (8) всі x_k будуть належати колу (4), оскільки

$$|x_k - x_0| \le |x_k - x_{k-1}| + |x_{k-1} - x_{k-2}| + \ldots + |x_1 - x_0| \le$$

$$\le mq^{k-1} + mq^{k-2} + \ldots + m < \frac{m}{1-q} \le \delta. \tag{9}$$

Тобто будемо мати $|x_k - x_0| < \dfrac{m}{1-q} \le \delta$, а це і означає, що x_k належить колу (4). Нерівність (8) будемо доводити методом математичної індукції. Нехай (8) виконується для k=1. Це випливає з визначення величини m

$$|x_1 - x_0| = |\varphi(x_0) - x_0| = m$$

Припустимо (8) виконується для k=2,…,n і доведемо, що воно має місце при k=n+1. Відмітимо, що із співвідношення (9) та індуктивним припущенням $x_1,...,x_n$ належать колу (4). Тоді маємо

$$|x_{n+1}-x_n|=|\varphi(x_n)-\varphi(x_{n-1})|\le q|x_n-x_{n-1}|. \tag{10}$$

Далі, використовуючи індуктивне припущення, отримуємо

$$|x_{n+1}-x_n|\le qmq^{n-1}=mq^n, \tag{11}$$

тобто (8) має місце.

На основі (8) маємо:

$$|x_{n+p}-x_n|\le|x_{n+p}-x_{n+p-1}|+...+|x_{n+1}-x_n|\le$$
$$\le mq^{n+p-1}+mq^{n+p-2}+...+mq^n<\frac{m}{1-q}q^n, \tag{12}$$

або

$$|x_{n+p}-x_n|<\frac{m}{1-q}q^n \quad \text{для} \quad \forall p=1,2,3,...$$

Оскільки 0<q<1, то послідовність $\{x_n\}$ фундаментальна і вона має границю x_*. Послідовність $\{x_n\}$ належить колу (4), тому x_* також належить цьому колу. В силу неперервності $\varphi(x)$, яка випливає з (5), x_* є коренем рівняння (2).

Існування границі послідовності $\{x_n\}$ x_* можна довести іншим шляхом. Розглянемо ряд:

$$x_0+(x_1-x_0)+(x_2-x_1)+...+(x_n-x_{n-1})+..., \tag{13}$$

для якого x_n є (n+1)-ою частковою сумою, тобто

$$x_n=S_{n+1}.$$

В силу (11) члени ряду за абсолютною величиною менші відповідних членів геометри-ної прогресії зі знаменником q<1. Тому ряд (13) збігається і причому абсолютно, тобто

$$\exists \lim_{n\to\infty} S_{n+1}=\lim_{n\to\infty} x_n=x_*,$$

причому $x_*\in$колу (4), бо йому належать усі x_n.

Доведемо єдність x_* в колі (4). Припустимо, що $\tilde{x}$ ще один корінь рівняння (2) з кола (4) і доведемо, що $\tilde{x}=x_*$. Маємо

$$|\tilde{x}-x_*|=|\varphi(\tilde{x})-\varphi(x_*)|\le q|\tilde{x}-x_*| \tag{14}$$

Оскільки 0<q<1, то (14) можливе лише при $\tilde{x}=x_*$. Щоб отримати оцінку (7), достатньо перейти в (12) до границі при $p\to\infty$. Теорема 1 доведена. ■

<u>Зауваження 1</u>. Якщо $\varphi(x)$ - функція комплексної змінної, яка диференційована в колі (4), і при цьому в колі (4) виконується нерівність

$$|\varphi'(x)|\le q<1, \tag{15}$$

то функція $\varphi(x)$ задовольняю умові (5) теореми 1.

Дійсно, якщо $x', x'' \in$ колу (4), то

$$\varphi(x'') - \varphi(x') = \int_{x'}^{x''} \varphi'(x) dx, \tag{16}$$

де інтеграл береться по прямолінійному відрізку, що з'єднує точки x' і x''. З (16) отримаємо

$$|\varphi(x') - \varphi(x'')| \le \max|\varphi'(x)||x' - x''| \le q|x' - x''|.$$

<u>Зауваження 2</u>. Теорема є вірною, якщо коло (4) буде нескінечним.

<u>Зауваження 3</u>. Метод ітерацій збігається при $\forall x_0$ з кола (4). Завдяки цьому він є "самовиправляючимся", тобто окрема похибка при обчисленні наступного x_n, яка не виходить за границі кола (4), не вплине не кінцевий результат, бо помилкове значення можна розглядати, як нове початкове значення x_0. Можливо зросте лише об'єм роботи, але не точність (вона не погіршиться) . Така властивість, не накопичувати похибки обчислень, характерна для всіх ітераційних методів.

З (7) можна отримати оцінку кількості ітерацій, які потрібно провести для знаходження розв'язку задачі (2) з наперед заданою точністю ε:

$$n \ge \left[\frac{\ln \dfrac{b-a}{(1-q)\cdot\varepsilon}}{\ln(1/q)} \right] + 1 \ge \left[\frac{\ln \dfrac{|\varphi(x_0) - x_0|}{(1-q)\cdot\varepsilon}}{\ln(1/q)} \right] + 1. \tag{17}$$

<u>Оцінка наближення</u>

З оцінки (7)

$$|x_* - x_n| \le \frac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0|$$

видно, що збіжність буде тим швидша, чим менше число q.

Отримаємо ще одну формулу для оцінки наближення. Маємо

$$f(x) = x - \varphi(x).$$

Тоді $|f'(x)| = |1 - \varphi'(x)| \ge 1 - |\varphi'(x)| \ge 1 - q$. Звідси, враховуючи, що $f(x_*) = 0$, отримаємо:

$$|x_n - \varphi(x_n)| = |f(x_n) - f(x_*)| = |x_n - x_*||f'(\xi_n)| \ge (1-q)|x_n - x_*|, \tag{18}$$

де $\xi_n = x_* + \theta(x_n - x_*),\ 0 < \theta < 1$. Тоді з (18) випливає

$$|x_n - x_*| \le \frac{|x_n - x_{n+1}|}{1-q}. \tag{19}$$

Використовуючи формулу (10) з (19) отримаємо:

$$|x_n - x_*| \le \frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}|, \tag{20}$$

звідки, зокрема, якщо $q \le \frac{1}{2}$, то буде мати місце оцінка

$$|x_* - x_n| \le |x_n - x_{n-1}|. \tag{21}$$

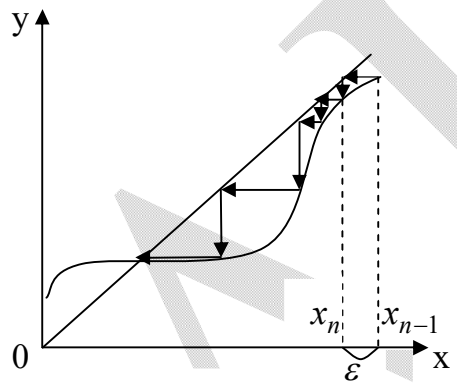


Рис. 1.

Оцінка (20) називається апостеріорною, тобто її можна використовувати після проведення n - ї ітерації.

Зауваження 4. Існує думка, що, якщо при застосуванні метода простої ітерації $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$, то $|x_* - x_n| < \varepsilon$. В загальному випадку це невірно (див. рис.1).

З формули (20) видно, що процес ітерації потрібно продовжувати, поки не буде виконуватися співвідношення

$$|x_n - x_{n-1}| \le \frac{1-q}{q}\varepsilon, \tag{22}$$

де ε - задана абсолютна похибка.

Відмітимо, що $x_n = \varphi(x_{n-1})$ і $x_* = \varphi(x_*)$, тоді

$$|x_* - x_n| = |\varphi(x_*) - \varphi(x_{n-1})| = |x_* - x_{n-1}||\varphi'(\xi_{n-1})| \le q|x_* - x_{n-1}|, \tag{23}$$

де $\xi_{n-1} = x_{n-1} + \theta(x_* - x_{n-1}),\ 0 < \theta < 1$,

тобто

$$|x_* - x_n| < |x_* - x_{n-1}|. \tag{24}$$

Таким чином при збіжному ітераційному процесі похибка прямує до нуля монотонно, тобто кожне наступне значення є більш точним.

Зауваження 5. У всіх висновках ігноруються похибки заокруглення, тобто вважається, що послідовні наближення знаходяться точно.

Теорема 2. Нехай виконуються умови теореми 1, $\varphi'(x)$ зберігає постійним знак в околі точки x_* і

$$|\varphi'(x)| \le q < 1. \tag{25}$$

Тоді, якщо $\varphi'(x)$ додатня, то $\{x_n\}$ збігається до кореня x_* монотонно. Якщо ж $\varphi'(x)$ від'ємна, то $\{x_n\}$ коливається біля кореня x_* (хоча (24) має місце).

Доведення :

1) Нехай $0 \le \varphi'(x) \le q < 1$ і , наприклад, $x_0 < x_*$. Тоді

$$x_1 - x_* = \varphi(x_0) - \varphi(x_*) = (x_0 - x_*)\varphi'(\xi) < 0, \qquad \xi \in (x_0, x_*) \tag{26}$$

причому вірно (24), тобто

$$|x_1 - x_*| \le q|x_0 - x_*| < |x_0 - x_*| \tag{27}$$

Отже, з (26), (27) маємо $x_0 < x_1 < x_*$. Застосовуючи метод математичної індукції, отримуємо

$$x_0 < x_1 < \ldots < x_* \tag{28}$$

Аналогічно розглядається випадок $x_0 > x_*$.

2) Нехай $-1 < -q \le \varphi'(x) \le 0$ і $x_0 < x_*$. Маємо

$$x_1 - x_* = \varphi(x_0) - \varphi(x_*) = (x_0 - x_*)\varphi'(\xi_1) > 0, \ \xi_1 \in (x_0, x_*), \tag{29}$$

тобто

$$x_1 > x_* \text{ і } |x_1 - x_*| < |x_0 - x_*|. \tag{30}$$

Повторюючи ці міркування, отримаємо

$$x_0 < x_2 < \ldots < x_* < \ldots < x_3 < x_1. \ \square \tag{31}$$

Введемо поняття порядку ітерації (3) для розв'язку рівняння (2). Будемо говорити, що ітерація (3) має порядок *m*, якщо

$$\varphi'(x_*) = \ldots = \varphi^{(m-1)}(x_*) = 0, \ \ \varphi^{(m)}(x_*) \ne 0. \tag{32}$$

Розклад $\varphi(x_n) = \varphi(x_* - \varepsilon_n)$ по степені ε_n буде мати вигляд:

$$\varphi(x_n) = \varphi(x_n - \varepsilon_n) = \varphi(x_*) + \frac{(-1)^m}{m!}\varepsilon_n^m \varphi^{(m)}(x_*) + o(\varepsilon_n^m). \tag{33}$$

Підставимо (33) в (3) замість $\varphi(x_n)$, тоді отримаємо наступне співвідношення між похибками:

$$\varepsilon_{n+1} = \frac{(-1)^{m-1}}{m!}\varphi^{(m)}(x_*)\varepsilon_n^m + o(\varepsilon_n^m). \tag{34}$$

Якщо можна знехтувати другим членом у правій частині (34), то отримаємо:

$$\varepsilon_{n+1} \approx \frac{(-1)^{m-1}}{m!}\varphi^{(m)}(x_*)\varepsilon_n^m, \tag{35}$$

що дає дуже швидку збіжність x_n до x_* в околі x_*.

До переваг методу простої ітерації можна віднести: 1) простоту реалізації; 2) при $q < \frac{1}{2}$ метод збігається швидше ніж метод ділення проміжку навпіл; 3) алгоритм методу узагальнюється на системи рівнянь. Серед недоліків методу можна відзначити наступні: 1) при $q > \frac{1}{2}$ – збігається повільніше ніж метод ділення проміжку навпіл, 2) інколи виникають труднощі при зведенні рівняння $f(x) = 0$ до вигляду $x = \varphi(x)$.

Задача 1. Дати геометричну інтерпретацію методу простої ітерації для випадків:

а) $0 < \varphi'(x) < 1$; б) $-1 < \varphi'(x) < 0$; в) $\varphi'(x) < -1$; г) $\varphi'(x) > 1$.

Задача покращення методу ітерації

Покращити швидкість збіжності методу ітерації можна двома способами:

а) при обчисленні x_{n+1} використовувати декілька попередніх значень x_k, але тоді цей метод стає багатокроковим.

б) за рахунок обчислення одного або декількох допоміжних значень φ на 1-му кроці.

а) метод січних, або правило лінійної інтерполяції.

На лінії l: $y = \varphi(x)$ візьмемо дві точки $M_n[x_n, \varphi(x_n)]$ і $M_{n-1}[x_{n-1}, \varphi(x_{n-1})]$, проведемо через них пряму і знайдемо точку перетину її з бісектрисою $y = x$. Абсцису цієї точки приймемо за x_{n+1}. Розв'язок системи рівнянь січної та бісектриси

$$\frac{x - x_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = \frac{y - \varphi(x_{n-1})}{\varphi(x_n) - \varphi(x_{n-1})}, \quad y = x \tag{36}$$

приведемо до

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1}\varphi(x_n) - x_n\varphi(x_{n-1})}{\varphi(x_n) - x_n + \varphi(x_{n-1}) + x_{n-1}}. \tag{37}$$

Для початку обчислень необхідно знати два початкові наближення x_0 і x_1.

З'ясуємо характер зміни похибки $\varepsilon_k = x_* - x_k$, коли x_k знаходиться поблизу x_*. Підставимо в (37) $x_n = x_* - \varepsilon_n$, $x_{n+1} = x_* - \varepsilon_{n+1}$, а $\varphi(x_n)$ і $\varphi(x_{n-1})$ замінимо розкладом по степеням ε_n:

$$\varphi(x_k) = \varphi(x_* - \varepsilon_k) = \varphi(x_*) - \varepsilon_k \varphi'(x_*) + \frac{1}{2}\varphi''(x_*)\varepsilon_k^2 - \ldots, \quad k = n-1, n.$$

Збережемо лише головні члени в чисельнику та знаменнику дробу:

$$\varepsilon_{n+1} \approx -\frac{1}{2}\frac{\varphi''(x_*)\varepsilon_n \varepsilon_{n-1}}{\varphi'(x_*) - 1}. \tag{38}$$

Оцінка (38) дозволяє очікувати більш високу швидкість збіжності (при $\varphi'(x)$ не дуже близької до 1), ніж у методі простої ітерації.

б) <u>метод Стеффенсена</u>

Цей метод використовує перетворення Ейткена й полягає у наступному:

Нехай ми маємо точку $M_n'[x_n', \varphi(x_n')]$ на лінії $y = \varphi(x)$. Побудуємо на цій лінії допоміжну точку $M_n''(x_n'', y_n'')$ за простим однокроковим правилом ітерації, поклавши

$$x_n'' = \varphi(x_n'), \quad y_n'' = \varphi(x_n'') = \varphi(\varphi(x_n')).$$

Через точки M_n' і M_n'' проведемо січну і знайдемо точку її перетину з бісектрисою $y = x$:

$$\frac{x - x_n'}{\varphi(x_n') - x_n'} = \frac{y - \varphi(x_n')}{\varphi(\varphi(x_n')) - \varphi(x_n')}, \quad y = x \tag{39}$$

Абсцису точки перетину приймемо за наступне наближення x_{n+1}':

$$x_{n+1}' = \frac{x_n'\varphi(\varphi(x_n')) - \varphi^2(x_n')}{\varphi(\varphi(x_n')) - 2\varphi(x_n') + x_n'}. \tag{40}$$

Співвідношення між похибками двох наближень сусідніх номерів буде:

$$\varepsilon_{n+1}' = \frac{\varphi'(x_*)\varphi''(x_*)}{\varphi'(x_*) - 1}\frac{(\varepsilon_n')^2}{2} + o\left((\varepsilon_n')^2\right). \tag{41}$$

в) Якщо ж використовувати значення трьох останніх наближень, то можна сформулювати наступний критерій збіжності

$$\frac{(x_n - x_{n-1})^2}{\left|2x_{n-1} - x_n - x_{n-2}\right|} \prec \varepsilon.$$

Вираз в лівій частині останньої нерівності є поправкою Ейткена. Якщо ж останні три ітерації уточнити за процесом Ейткена

$$\overline{x_n} = x_n + (x_n - x_{n-1})/(2x_{n-1} - x_{n-2} - x_n),$$

то це підвищує точність розрахунків та дозволяє обмежитися меншою кількістю ітерацій.

Метод релаксації

Для збіжності ітераційного процесу методу простої ітерації суттєве значення має вибір функції $\varphi(x)$.

Якщо в методі простої ітерації для рівняння $x = x + \psi(x) f(x) \equiv \varphi(x)$ вибрати $\psi(x) = \tau = const$, то ітераційний процес буде мати вигляд

$$x_{n+1} = x_n + \tau f(x_n), \tag{1}$$

$n = 0,1,2,...,$ x_0 – задано. Метод можна записати у вигляді

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{\tau} = f(x_n), \quad n = 0,1,2,....$$

Оскільки $\varphi'(x) = 1 + \tau f'(x)$, то метод збігається при умові

$$|\varphi'(x)| = |1 + \tau f'(x)| \le q < 1. \tag{2}$$

Нехай в деякому околі кореня виконуються умови

$$f'(x) < 0, \quad 0 < m_1 < |f'(x)| < M_1, \; x \in S = [a,b],$$

тоді умови збіжності (2) запишемо у вигляді: $-q \le 1 + \tau f'(x) \le q < 1$. Звідси

$$\tau |f'(x_n)| \le 1 + q < 2, \text{ і } 0 < \tau < \frac{2}{|f'(x)|}.$$

Отже метод релаксації збігається при $\tau \in (0, \frac{2}{M_1})$.

<u>Зауваження.</u> З умов $-q \le 1 + \tau f'(x) \le q < 1$ отримуємо співвідношення $\frac{1-q}{|f'(x)|} \le \tau \le \frac{1+q}{|f'(x)|}$, які будуть виконуватися, якщо $\frac{1-q}{m_1} < \tau < \frac{1+q}{M_1}$. □

Для того, щоб вибрати оптимальний параметр τ, розглянемо рівняння для похибки $z_n = x_n - x_*$.

Підставивши $x_n = x_* + z_n$ в (1), отримаємо

$$z_{n+1} = z_n + \tau f(x_* + z_n). \tag{3}$$

В припущені $f(x) \in C^1[a,b]$ з теореми про середнє маємо

$$f(x_* + z_n) = f(x_*) + z_n f'(x_* + \theta z_n) = z_n f'(x_* + \theta z_n) = z_n f'(\xi_n)\ ,$$
$\xi_n = x_* + \theta z_n$, $\theta \in (0,1)$

Тоді із співвідношення (3) маємо

$$z_{n+1} = z_n + \tau f'(\xi_n) \cdot z_n\,,$$
$$|z_{n+1}| \le |1 + \tau f'(\xi_n)| \cdot |z_n| \le \max_S |1 + \tau f'(\xi_n)|\ |z_n|,$$
$$|z_{n+1}| \le \max_\tau \left\{ |1 - \tau M_1|, |1 - \tau m_1| \right\} |z_n|. \qquad (4)$$

Таким чином, задача вибору оптимального параметра зводиться до знаходження τ, для якого функція

$$q(\tau) = \max_\tau \left\{ |1 - \tau\, \mathrm{M}_1|, |1 - \tau\, m_1| \right\}$$

приймає мінімальне значення: $q(\tau) \to \min$.

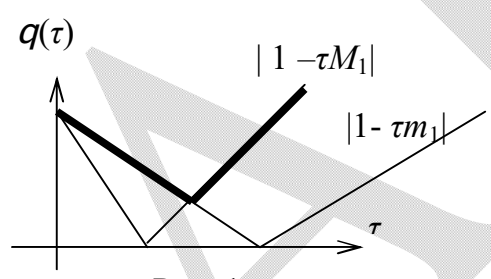


Рис. 1

З графіка видно, що точка мінімуму визначається умовою $|1 - \tau\, M_1| = |1 - \tau\, m_1|$. Тому

$$1 - \tau_0 m_1 = \tau_0 M_1 - 1 \quad \Rightarrow$$
$$\tau_0 = \frac{2}{M_1 + m_1}. \qquad (5)$$

При цьому значенні τ маємо

$$q(\tau_0) = q_0 = \frac{M_1 - m_1}{M_1 + m_1}.$$

Тоді із співвідношення (4) для похибки отримаємо оцінку

$$|x_n - x_*| \le q_0{}^n |x_0 - x_*|\,. \qquad (6)$$

Використовуючи оцінку збіжності (6), визначимо кількість ітерацій, які необхідно провести методом релаксації для знаходження кореня рівняння (1) з точністю ε, тоді

$$n \geq \left[\frac{\ln \frac{b-a}{\varepsilon}}{\ln q_0^{-1}} \right] + 1 \geq \left[\frac{\ln \frac{z_0}{\varepsilon}}{\ln q_0^{-1}} \right] + 1 .$$

<u>Зауваження.</u> Якщо для ітераційного процесу (1) методу релаксації будуть виконуватися всі умови теореми про збіжність методу простої ітерації, то буде мати місце наступна оцінка

$$|x_n - x_*| \leq \frac{q_0^{\ n}}{1-q_0} |x_1 - x_0| \leq \frac{q_0^{\ n}}{1-q_0}(b-a). \square \qquad (7)$$

Використовуючи оцінку збіжності (7), кількість ітерацій, які необхідно провести методом релаксації для знаходження кореня рівняння (1) з точністю ε буде мати вигляд

$$n \geq \left[\frac{\ln \frac{b-a}{\varepsilon(1-q_0)}}{\ln q_0^{-1}} \right] + 1 .$$

<u>Зауваження</u>. Алгоритм методу релаксації при $f'(x) > 0$ буде мати вигляд $x_{n+1} = x_n - \tau f(x_n)$, або ж просто потрібно просто розв‘язувати рівняння $-f(x) = 0$. □

Метод Ньютона
(метод дотичних)

Метод Ньютона застосовується для знаходження коренів (в загальному випадку і комплексних) рівняння

$$f(x) = 0 \qquad (1)$$

Нехай задане початкове наближення x_0 до кореня цього рівняння. Замінимо (1) в околі x_0 лінійним рівнянням

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 0 \qquad (2)$$

ліва частина якого представляє собою перші два члена розкладу функції $f(x)$ в ряд Тейлора. Корінь рівняння (2) позначимо x_1, тоді значення

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \tag{3}$$

візьмемо за нове наближення до кореня рівняння (1). Аналогічно визначаються наступні наближення

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0,1,2, \ldots \quad (\text{при } f'(x_n) \neq 0). \tag{4}$$

Формулу (4) можна отримати наступними способами:
а) Складемо рівняння, з якого може бути знайдена похибка. Припустимо, що існує наближене значення кореня x_n, похибка якого ε_n. Оскільки $x_* = x_n + \varepsilon_n$, то

$$f(x_n + \varepsilon_n) = 0, \tag{5}$$

а тоді за формулою Тейлора

$$f(x_n + \varepsilon_n) = 0 = f(x_n) + \varepsilon_n f'(x_n) + \frac{\varepsilon_n^2}{2!} f''(x_n) + \ldots \tag{6}$$

Вважаючи ε_n досить малою величиною і відкидаючи члени порядку малості $o(\varepsilon)$, отримаємо

$$f(x_n) + \varepsilon_n f'(x_n) = 0 \tag{7}$$

З (7) маємо

$$\varepsilon_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{8}$$

(8) представляє собою головну частину похибки. Додаючи її до x_n, отримаємо

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{9}$$

Для x_{n+1} похибка буде мати порядок ε_n^2, як видно з (6).

б) Рівняння (1) при $\tau \neq 0$ еквівалентно рівнянню

$$x = x + \tau f(x) \equiv \varphi(x) \tag{10}$$

Метод ітерації збігається тим швидше, чим менше $|\varphi'|$. Будемо вимагати, щоб $\varphi'(x_n) = 0$, тобто $1 + \tau f'(x_n) = 0$ і, відповідно $\tau = -\frac{1}{f'(x_n)}$. Тоді у відповідності з формулою метода простої ітерації з (10) отримаємо

$$x_{n+1} = \varphi(x_n) = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{11}$$

і ми прийшли до методу Ньютона (4).

[6]. Відмітимо, що для розв'язку кожного конкретного рівняння можна вказати декілька ітераційних процесів другого порядку. Припустимо. Що шукається корінь рівняння

$$x^2 - b = 0 \tag{12}$$

Застосовуючи до (12) формулу (9), отримаємо

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - b}{2x_n} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{b}{x_n}\right) \tag{13}$$

З іншої сторони (12) можна записати у вигляді

$$\frac{1}{x^2} - \frac{1}{b} = 0, \tag{14}$$

що приводить до ітераційного процесу

$$x_{n+1} = x_n - \left(\frac{1}{x_n^2} - \frac{1}{b}\right) \Big/ \left(-2/x_n^3\right) = x_n\left[1 + \left(b - x_n^2\right)/2b\right] \tag{15}$$

Обидва процеси (13) і (15) другого порядку, але процес (13) збігається швидше, бо в ньому коефіцієнт при ε_n^2 значно менший. Але процес (15) потребує лише одне ділення на 2, що є великою перевагою при комп'ютерних розрахунках.

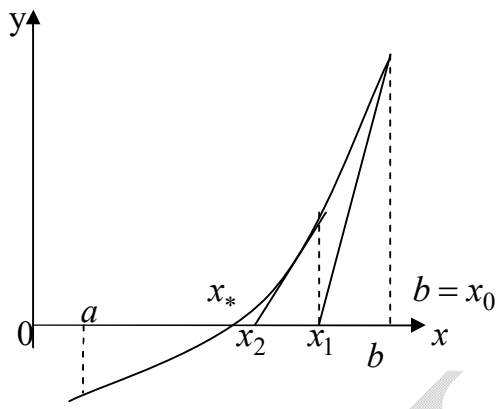
Загальний метод складається з того, що початкове рівняння помножається на деяку функцію $g(x)$ і до отриманого рівняння застосовується метод Ньютона. Більш того, якщо написати декілька ітераційних процесів (наприклад Ньютона) другого порядку, для всіх виписати рівняння для похибок, то можна побудувати ітераційний процес, який буде лінійною комбінацією початкових, але порядок збіжності у цього процесу буде вищий.

<u>Теорема</u> 1. Якщо $f(a)f(b) < 0$, $f(x) \in C^2[a,b]$ та $f''(x)$ не змінює знак на $[a,b]$, то виходячи з початкового наближення $x_0 \in [a,b]$, яке задовольняє умові

$$f(x_0)f''(x_0) > 0, \tag{16}$$

можна обчислити методом Ньютона (9) єдиний корінь x_* рівняння (1) з будь-яким степенем точності.

<u>Доведення</u>: Нехай, наприклад, $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, $f''(x) > 0$, $x \in [a,b]$ (інші випадки розглядаються аналогічно).



Згідно нерівності (16) за початкове наближення можна обрати точку b $(x_0 = b)$. Позначимо через w_0 відрізок $w_0 = [x_*, x_0] = [x_*, b]$. За умов теореми функція $f'(x)$ монотонна на w_0, причому

$$\min_{w_0} |f'(x)| = |f'(x_*)| > 0, \tag{17}$$

тобто $f'(x)$ - знакостала на w_0 і не обертається на ньому в 0. Якщо б (17) було не вірно, то $f(x)$ не змогла б змінювати знак на $[a,b]$ із збереженням знаку $f''(x)$.

Методом математичної індукції доведемо, що всі наближення $x_n > x_*$ (n=0,1,2,...) і, отже $f(x_n) > 0$. Маємо $x_0 > x_*$. Нехай тепер $x_n > x_*$. Покладемо

$$x_* = x_n + (x_* - x_n)$$

Застосовуючи формулу Тейлора, отримаємо:

$$0 = f(x_*) = f(x_n) + f'(x_n)(x_* - x_n) + \frac{1}{2} f''(\xi_n)(x_* - x_n)^2, \tag{18}$$

де $x_* < \xi_n < x_n$.

Оскільки $f''(x) > 0$, то маємо:

$$f(x_n) + f'(x_n)(x_* - x_n) < 0$$

і отже

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} > x_* , \tag{19}$$

що і потрібно було довести.

З формули (19), враховуючи знаки $f(x_n)$ і $f'(x_n)$ маємо $x_{n+1} < x_n$ (n=0,1,…), тобто $\{x_n\}$ утворюють обмежену монотонно спадну послідовність. Отже, $\exists\ \bar{x} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.Тоді, переходячи до границі в (19), отримаємо:

$$\bar{x} = \bar{x} - \frac{f(\bar{x})}{f'(\bar{x})},$$

тобто $\Rightarrow$ $f(\bar{x}) = 0$. Звідси $\bar{x} = x_*$, оскільки корінь єдиний. Теорема доведена. □

На основі теореми можна зробити висновок, що при дослідженні методу Ньютона потрібно дотримуватися такого правила: в якості початкового наближення x_0 вибирається та границя проміжку $[a,b]$, в якій значення функції $f(x)$ має той же знак, що і знак $f''(x)$.

З формули (19) видно, що чим більше числове значення $f'(x)$ в околі даного кореня, тим менше виправлення, яке потрібно додавати до n-ого наближення. Тому метод Ньютона рекомендується застосовувати, коли в околі даного кореня функція має великий градієнт. Якщо $f'(x)$ мала, то виправлення великі і обчислення кореня буде дуже довгим, а інколи і неможливим. Тобто, якщо $f(x)$ поблизу кореня майже горизонтальна, застосовувати метод Ньютона не рекомендується.

Метод Ньютона можна розглядати, як метод простої ітерації з

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Тому $\varphi'(x) = 1 - \dfrac{f'(x)f'(x) - f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} = \dfrac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$. Якщо x_*- корінь рівняння $f(x) = 0$, то $\varphi'(x_*) = 0$. Тому знайдеться окіл кореня S_δ, де

$$|\varphi'(x)| = \left|\frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}\right| < 1.$$

Це означає, що збіжність методу Ньютона залежить від вибору x_0.

Дослідимо швидкість збіжності методу Ньютона. Враховуючи, що $f(x_*) = 0$, знаходимо

$$|f(x_{n-1})| = |f(x_*) - f(x_{n-1})| = |f'(\xi)||x_* - x_{n-1}| \geq m_1|x_* - x_{n-1}|, \tag{20}$$

де

$$m_1 = \min_{w_n}|f'(x)| = |f'(x_*)| > 0, \quad \xi \in w_n. \tag{21}$$

Позначимо

$$M_1 = \max_{w=[x_*,x_0]}|f'(x)| = |f'(x_0)|$$

$$M_2 = \max_{[a,b]}|f''(x)| > 0 \tag{22}$$

Тоді з (20) з врахуванням (9) отримаємо

$$|x_n - x_{n-1}| = \left|\frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}\right| \geq \frac{m_1|x_* - x_{n-1}|}{M_1} \tag{23}$$

В силу монотонної $(x_* < x_{n+1} < x_n)$ збіжності послідовності $\{x_n\}$ до x_* маємо

$$|x_{n-1} - x_*| = |x_{n-1} - x_n| + |x_n - x_*|,$$

тобто

$$|x_* - x_n| = |x_* - x_{n-1}| - |x_n - x_{n-1}|$$

Звідси, враховуючи (23), приходимо до нерівності

$$|x_* - x_n| \le \alpha |x_* - x_{n-1}|, \tag{24}$$

де $0 \le \alpha = 1 - \dfrac{m_1}{M_1} < 1$.

(24) підставимо в праву частину (23), тоді

$$|x_n - x_{n-1}| = \left| \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \right| \ge \frac{m_1 |x_* - x_{n-1}|}{M_1} \ge \frac{1}{\alpha} \frac{m_1 |x_* - x_n|}{M_1},$$

звідки $|x_n - x_{n-1}| \dfrac{\alpha M_1}{m_1} \ge |x_* - x_n|$, тобто $|x_* - x_n| \le \dfrac{\alpha M_1}{m_1} |x_n - x_{n-1}|$ - апостеріорна оцінка для лінійної збіжності методу Ньютона .

Нерівність (24) показує, що похибка $x_* - x_n$ спадає принаймні за геометричною прогресією зі знаменником $\alpha < 1$. Це характерно для початкових ітерацій. Потім. Коли похибка стає малою. Швидкість збіжності в методі Ньютона якісно збільшується. Переконаємось у цьому.

<u>Теорема 2.</u> Нехай $f(x) \in C^2[a,b]$, x_* простий дійсний корінь рівняння $f(x) = 0$ і $f'(x) \ne 0$ при $x \in S_\delta = \{x : |x - x_*| \le \delta\}$. Якщо

$$q = \frac{M_2 |x_0 - x_*|}{2m_1} < 1, \tag{24.1}$$

де $m_1 = \min\limits_{S_\delta} |f'(x)|$, $M_2 = \max\limits_{S_\delta} |f''(x)|$, то для $x_0 \in S_\delta$ метод Ньютона

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

збігається і має місце оцінка

$$|x_n - x_*| \le q^{2^n - 1} |x_0 - x_*|. \tag{24.2}$$

<u>Доведення.</u> Маємо $x_* = x_{n-1} + (x_* - x_{n-1})$. Згідно формули Тейлора:

$$0 = f(x_*) = f(x_{n-1}) + (x_* - x_{n-1}) f'(x_{n-1}) + \frac{(x_* - x_{n-1})^2}{2} f''(\xi_{n-1}), \tag{25}$$

$\xi_{n-1} \in S_\delta$, тобто

$$x_* = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} - (x_* - x_{n-1})^2 \frac{f''(\xi_{n-1})}{2 f'(x_{n-1})}. \tag{26}$$

Використовуючи (9), з (26) отримаємо

$$x_* = x_n - (x_* - x_{n-1})^2 \frac{f''(\xi_{n-1})}{2f'(x_{n-1})} \tag{27}$$

або

$$|x_* - x_n| \le \frac{M_2}{2m_1}|x_* - x_{n-1}|^2 = \beta|x_* - x_{n-1}|^2, \tag{28}$$

$$\text{де } \beta = \frac{M_2}{2m_1}.$$

Запишемо (28) у вигляді

$$\beta|x_* - x_n| \le (\beta|x_* - x_{n-1}|)^2 \quad . \tag{29}$$

Тобто, як тільки при деякому n виконується нерівність $q = \beta|x_* - x_0| < 1$ (а в силу (24) це обов'язково станеться), в подальшому похибка помножена на β почне спадати за квадратичним законом

$$|x_* - x_n| \le \frac{1}{\beta}(\beta|x_* - x_0|)^{2^n} . \tag{30}$$

Оцінку (30) можемо записати у вигляді (24.2). Теорема доведена. □

З (24.2) маємо оцінку кількості ітерацій, які потрібно виконати для знаходження кореня з точністю ε :

$$n \ge \left[\log_2 \left(1 + \frac{\ln \frac{b-a}{\varepsilon}}{\ln(\frac{1}{q})} \right) \right] + 1.$$

<u>Визначення.</u> Говорять, що ітераційний метод має степінь збіжності p, якщо

$$|x_{n+1} - x_*| = O\left(|x_n - x_*|^p\right).$$

Для методу Ньютона $|x_{n+1} - x_*| = \frac{|x_n - x_*|^2 |f''(\xi_n)|}{2|f'(x_n)|} \Rightarrow |x_{n+1} - x_*| = O\left(|x_n - x_*|^2\right)$. Отже степінь збіжності методу Ньютона $p = 2$. Для методу простої ітерації і ділення навпіл $p = 1$.

<u>Зауваження 1.</u> Метод Ньютона можна застосовувати і для обчислення комплексного кореня $z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}$. В теоремі про збіжність $q = \frac{|x_0 - x_*| M_2}{2m_1}$, де $m_1 = \min_{S_\delta} |f'(z)|$, $M_2 = \max_{S_\delta} |f''(z)|$. Тут $|z|$ - модуль комплексного числа.

<u>Зауваження 2.</u> Якщо x_* r - кратний корінь тобто

$$f^{(k)}(x_*) = 0,\ k = 0,1,\ldots,r-1;\ f^{(r)}(x_*) \ne 0,$$

тоді в методі Ньютона необхідна наступна модифікація

$$x_{n+1} = x_n - r\frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

а умовою збіжності методу буде $q = \dfrac{M_{r+1}|x_0 - x_*|}{m_r\, r(r+1)} < 1$, де

$m_r = \min\limits_{S_\delta}\left|f^{(r)}(x)\right|$, $M_{r+1} = \max\limits_{S_\delta}\left|f^{(r+1)}(x)\right|$. □

Розглянемо питання збіжності методу Ньютона у випадку кратних коренів

Раніше ми скрізь вважали корінь x_* простим (однократним), тобто $f'(x_*) \neq 0$. Зараз припустимо, що розв'язок x_* має кратність r і, отже, розклад f за формулою Тейлора в околі розв'язку x_* має вигляд

$$f(x) = a_r(x - x_*)^r + a_{r+1}(x - x_*)^{r+1} + \ldots + a_{r+p}(x - x_*)^{r+p} + R_{r+p} \qquad (35)$$

$$a_k = \frac{1}{k!}f^{(k)}(x_*), \quad (k = 0,1,\ldots)$$

Позначимо $\varepsilon_n = x_* - x_n$ (це все поблизу розв'язку x_*). Правило Ньютона дає наступний зв'язок між похибками ε_n і ε_{n+1}

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n + \frac{f(x_* - \varepsilon_n)}{f'(x_* - \varepsilon_n)}. \qquad (36)$$

Зберігаючи в розкладах лише два головних члена, за допомогою (35) знаходимо

$$f(x_* - \varepsilon_n) = (-1)^r\left[a_r\varepsilon_n^r - a_{r+1}\varepsilon_n^{r+1} + \ldots\right],$$

$$f'(x_* - \varepsilon_n) = (-1)^{r-1}\left[ra_r - (r+1)a_{r+1}\varepsilon_n^r + \ldots\right],$$

$$\left[f'(x_* - \varepsilon_n)\right]^{-1} = \frac{(-1)^{r-1}}{ra_r}\varepsilon_n^{r+1}\left[1 + \frac{(r+1)a_{r+1}}{ra_r}\varepsilon_n + \ldots\right],$$

$$\frac{f(x_* - \varepsilon_n)}{f'(x_* - \varepsilon_n)} = -\frac{\varepsilon_n}{r}\left[1 + \frac{a_{r+1}}{ra_r}\varepsilon_n + \ldots\right],$$

$$\varepsilon_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{r}\right)\varepsilon_n - \frac{a_{r+1}}{r^2 a_r}\varepsilon_n^2 + \ldots \qquad (37)$$

або, якщо зберегти один головний член

$$\varepsilon_{n+1} \approx \left(1 - \frac{1}{r}\right)\varepsilon_n \qquad (38)$$

тобто ε_n змінюється приблизно за законом геометричної прогресії зі знаменником $q = 1 - \dfrac{1}{r}$, меншим за 1, що набагато повільніше, ніж у випадку простого кореня (30).

Однак, виявляється, можна змінити обчислювальне правило Ньютона. Щоб у випадку кратного кореня покращити його збіжність і зробити її приблизно такою ж швидкою, як і для простого кореня.

Введемо число k, вибір якого зробимо пізніше, і розглянемо обчислювальне правило:

$$x_{n+1} = x_n - k\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{39}$$

Відповідне рівняння для ε_n буде

$$\varepsilon_{n+1} = \left(1 - \frac{k}{r}\right)\varepsilon_n - k\frac{a_{r+1}}{r^2 a_r}\varepsilon_n^2 + \ldots \tag{40}$$

Якщо покласти $k = r$, то з (40) отримаємо

$$\varepsilon_{n+1} \approx -\frac{a_{r+1}}{r\,a_r}\varepsilon_n^2 = -\frac{f^{(r+1)}(x_*)}{r(r+1)f^{(r)}(x_*)}\varepsilon_n^2 \tag{41}$$

Тобто обчислювальне правило

$$x_{n+1} = x_n - r\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{42}$$

у випадку, якщо розшукуваний корінь x_* рівняння $f(x) = 0$ має кратність r, буде мати майже таку ж швидкість збіжності, як і в основному методі Ньютона при $f'(x_*) \neq 0$.

До переваг методу Ньютона можна віднести а) високу швидкість збіжності;
б) алгоритм методу Ньютона узагальнюється на системи рівнянь та в) може бути застосований для знаходження комплексних коренів.
Серед недоліків методу Ньютона можна відзначити а) необхідність на кожній ітерації обчислювати не тільки $f(x_n)$, а і похідну $f'(x_n)$; б) збіжність залежить від початкового наближення x_0, оскільки від нього залежить умова збіжності $q = \dfrac{M_2|x_0 - x_*|}{2m_1} < 1$; в) потрібно, щоб $f(x) \in C^2[a,b]$.

Модифікований метод Ньютона
(Метод фіксованої дотичної)

Якщо похідну $f'(x)$ обчислювати досить складно, то замість формули (9) використовують формулу:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)}, \quad n=0,1,2,\ldots \tag{43}$$

Тобто всі “дотичні” будуються паралельними до першої.

Будемо вважати x_n і x_{n+1} близькими до розв'язку x_* і розглянемо похибки $\varepsilon_n = x_* - x_n$, $\varepsilon_{n+1} = x_* - x_{n+1}$. Підставляючи $x_n = x_* - \varepsilon_n$, $x_{n+1} = x_* - \varepsilon_{n+1}$ в (43), отримаємо рівняння для похибок

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n + \frac{f(x_* - \varepsilon_n)}{f'(x_0)} \tag{44}$$

Використаємо представлення

$$f(x_* - \varepsilon_n) = -\varepsilon_n f'(x_*) + \frac{1}{2}\varepsilon_n^2 f''(x_*) . \tag{45}$$

Підставимо (45) в (44) і збережемо лише лінійні члени, тоді отримаємо:

$$\varepsilon_{n+1} \approx \varepsilon_n \left(1 - \frac{f'(x_*)}{f'(x_0)}\right) \tag{46}$$

Закон збіжності близький до геометричної прогресії із знаменником $q = 1 - \dfrac{f'(x_*)}{f'(x_0)} < 1$.

Метод січних

Модифікація методу Ньютона, яка носить назву методу січних, має своєю метою спростити обчислювальну роботу за рахунок деяких втрат у швидкості збіжності послідовності $\{x_n\}$. В методі Ньютона основна обчислювальна робота витрачається на знаходження $f(x_n)$ і $f'(x_n)$. Можна було б замінити $f'(x_n)$ належно підібраною лінійною комбінацією з декількох значень функції f. Розглянемо найбільш просту з таких замін, коли $f'(x_n)$ наближено обчислюється за двома останніми знайденими парами чисел $(x_n, f(x_n))$, $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$

$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} .$$

Відповідне обчислення наступного наближення буде

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n - x_{n-1}) f(x_n)}{f(x_n) - f(x_{n-1})} = \frac{x_{n-1} f(x_n) - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})} . \tag{1}$$

Метод січних має особливості у порівнянні з методом Ньютона. Ітераційний процес (1) належить класу двокрокових ітераційних процесів, в яких для знаходження наступного наближення потрібно знати два попередні. Тому для початку розрахунків потрібно задати x_0 та x_1. Значення x_1можна знайти за допомогою однокрокового методу (наприклад, Ньютона, або методу простої ітерації).

Алгоритм (1) може застосовуватися, якщо

а) всі x_n належать області визначення f;

б) виконується нерівність: $f(x_n) - f(x_{n-1}) \neq 0$ (n=1,2,…).

Розглянемо випадок, коли $f(x_n) - f(x_{n-1}) = 0$. Тут можуть бути дві можливості:

1. Нехай $x_{n-1} \neq x_n$. Тоді з рівності

$$x_n = x_{n-1} - \frac{(x_{n-1} - x_{n-1}) f(x_{n-1})}{f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})} \tag{2}$$

можна побачити, що $f(x_{n-1}) \neq 0$. Тому $f(x_n)$ також відмінне від нуля і наступне наближення за формулою (1) не може бути побудоване. Процес обривається і не приводить до успіху.

2. Припустимо $x_n = x_{n-1}$. Тоді з (2) випливає, що $f(x_{n-1}) = 0$ і x_{n-1}є розв'язком даного рівняння. $x_n = x_{n-1}$ - також розв'язок рівняння.

Для похибки $\varepsilon_n = x_* - x_n$ з (1) отримаємо (в околі розв'язку x_*):

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n + \frac{(\varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n) f(x_* - \varepsilon_n)}{f(x_* - \varepsilon_n) - f(x_* - \varepsilon_{n-1})} . \tag{3}$$

Якщо в (3) підставити замість $f(x_* - \varepsilon_n)$ і $f(x_* - \varepsilon_{n-1})$ їх розклад за степенями похибок

$$f(x_* - \varepsilon_n) = -f'(x_*)\varepsilon_n + \frac{1}{2} f''(x_*)\varepsilon_n^2 + \dots ,$$

$$f(x_* - \varepsilon_{n-1}) = -f'(x_*)\varepsilon_{n-1} + \frac{1}{2} f''(x_*)\varepsilon_{n-1}^2 + \dots$$

і виконати розклад правої частини за степенями ε_n і ε_{n-1}, зберігаючи лише члени до другого порядку відносно цих величин, то отримаємо

$$\varepsilon_{n+1} \approx -\frac{f''(x_*)}{2f'(x_*)} \varepsilon_n \varepsilon_{n-1} , \tag{4}$$

тобто прямування до нуля трохи гірше, ніж в методі Ньютона.

Перепишемо співвідношення (4) у вигляді :

$$\varepsilon_{n+1} = a\varepsilon_n \varepsilon_{n-1}, \tag{5}$$

$$\text{де } a = -\frac{f''(x_*)}{2f'(x_*)}.$$

Розв'язок рекурентного співвідношення (5) будемо шукати у вигляді $\varepsilon_{n+1} = a^{\alpha}\varepsilon_n^{\beta}$. Підставляючи цей вираз в формулу в (5), отримаємо:

$$a^{\alpha}\varepsilon_n^{\beta} = a\varepsilon_n\varepsilon_n^{1/\beta}a^{-\alpha/\beta}. \tag{6}$$

Прирівняємо степені при a і ε_n зліва і справа в (6), тоді отримаємо

$$\begin{cases} \alpha = 1 - \alpha/\beta \\ \beta = 1 + 1/\beta \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} \alpha(\beta+1) = \beta \\ \beta^2 = \beta + 1 \end{cases}.$$

Підставляючи вираз для $\beta + 1$ з другого рівняння системи в перше, отримаємо

$$\begin{cases} \alpha\beta = 1 \\ \beta^2 - \beta - 1 = 0 \end{cases} \tag{7}$$

Тільки додатній корінь β квадратного рівняння з (7) відповідає спаданню похибки, тобто збіжному процесу. Отже, в методі січних

$$\varepsilon_{n+1} = a^{1/\beta}\varepsilon_n^{\beta},$$

$$\beta = \frac{\left(\sqrt{5}+1\right)}{2} \approx 1.62, \qquad 1/\beta \approx 0.62.$$

<u>Задача.</u> Дати геометричну інтерпретацію методу січних .

Метод хорд

Метод хорд застосовується для знаходження коренів рівняння

$$f(x) = 0, \tag{1}$$

де функція $f(x)$ - припускається дійсною та неперервною. Нехай нам відомий проміжок $[a,b]$, для якого виконано умову

$$f(a)f(b) < 0. \tag{2}$$

Припустимо, що на відрізку $[a,b]$ знаходиться тільки один корінь рівняння (1). Єдиність буде мати місце, якщо $f(x)$ строго монотонна на $[a,b]$ (зокрема, якщо вона диференційована і $f'(x)$ не змінює знак на $[a,b]$).

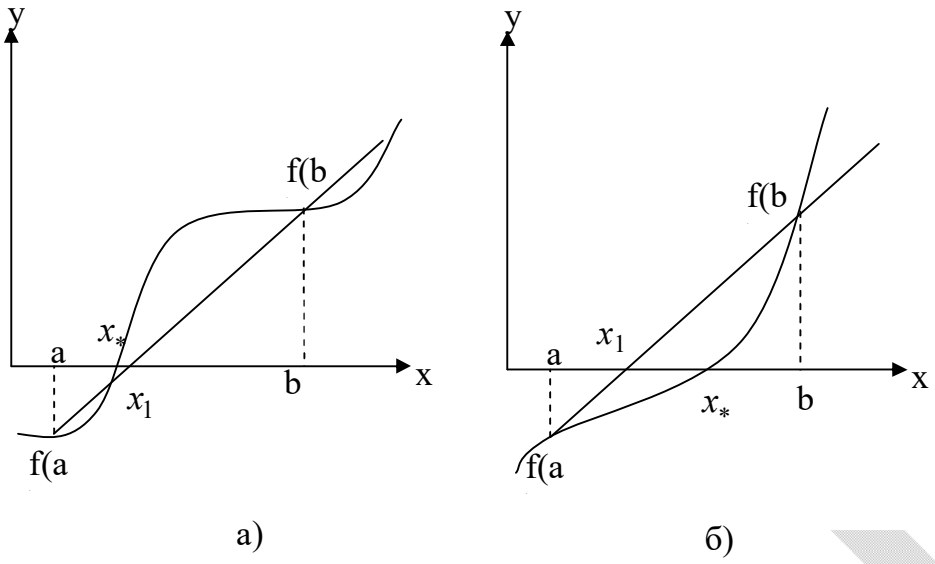


Рис 1.

Замінимо графік функції $y = f(x)$ на $[a,b]$ прямою, яка проходить через точки $(a, f(a))$, $(b, f(b))$. Рівняння прямої має вигляд

$$y = f(a) + \frac{f(a) - f(b)}{b - a}(x - a). \tag{3}$$

Поклавши в (3) $y = 0$, знайдемо точку перетину цієї прямої з віссю x:

$$x_1 = a - \frac{f(a)}{f(b) - f(a)}(b - a). \tag{4}$$

Точку x_1 приймаємо за перше наближення до кореня. Якщо $f(x_1) \neq 0$, то або $sign(f(x_1)) \neq sign(f(a))$, або $sign(f(x_1)) \neq sign(f(b))$. Нехай наприклад, $sign(f(x_1)) \neq sign(f(b))$, тоді розглядаючи відрізок $[a_1, b_1] \equiv [x_1, b_1]$ знайдемо спадне наближення до кореня x_2 і т.д. Кожне наближення x_n буде тим ближче до кореня x_*, чим менша кривизна графіка функції $f(x)$, тобто чим менша $f''(x)$ і більша $f'(x)$ на $[a,b]$.

Якщо ж на відрізку $[a,b]$ крім того неперервна і зберігає знак $f''(x)$, тобто функція $f(x)$ не тільки монотонна, але і графік її не має точок перегину, то взаємне розташування точок x_n та x_* можна встановити і без перевірки знака $f(x_n)$. Точка x_n завжди ближча точки x_* до того кінця відрізку $[a,b]$, в якому знак функції протилежний знаку її другої похідної [рис. 2,3].

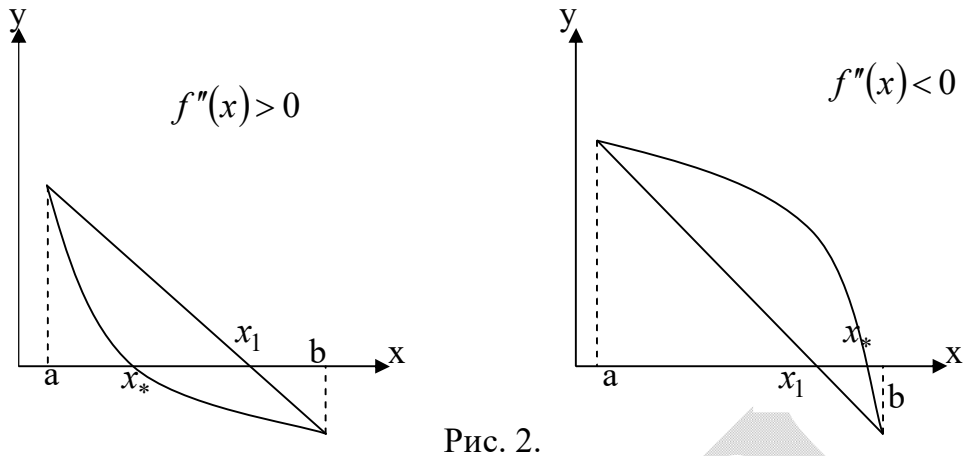


Рис. 2.

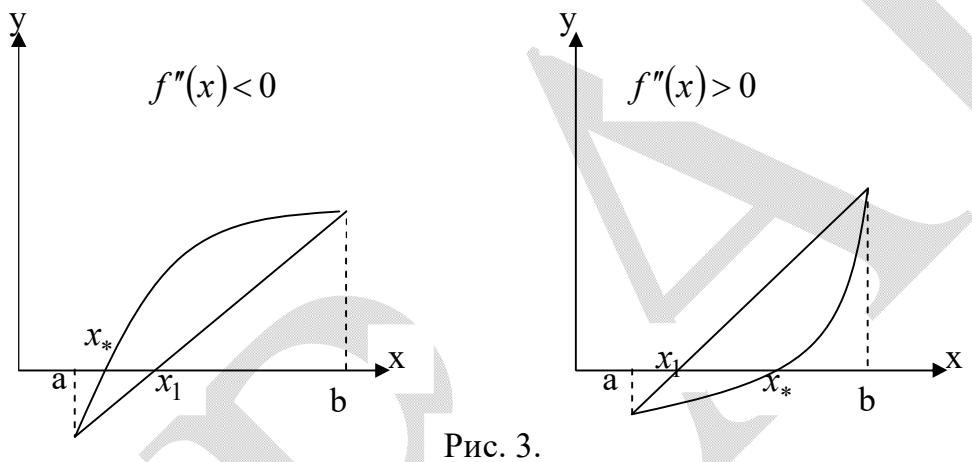


Рис. 3.

Отже, надалі будемо вважати, що в деякому околі точки $x = x_*$ функція $f(x)$ разом з $f'(x)$ і $f''(x)$ неперервна, а $f'(x)$ і $f''(x)$ в цьому околі не змінюють знак .

(а) $|f'(x)| > 0$ означає, що при переході через $x = x_*$ функція $f(x)$ змінює знак, тому $x = x_*$ - простий корінь; б) $|f''(x)| > 0$ означає, що функція $f(x)$ не має точок перегину).

Аналогічно формулі (4), *n*–те наближення можна обчислити за відомим (*n*-1) - м наближенням:

$$x_n = \frac{bf(x_{n-1}) - x_{n-1}f(b)}{f(x_{n-1}) - f(b)} \quad , n=1,2,3,\ldots \tag{5}$$

$$x_0 = a,$$

$$\text{якщо } f(b)f''(x) > 0; \tag{6}$$

або за формулою

$$x_n = \frac{af(x_{n-1}) - x_{n-1}f(a)}{f(x_{n-1}) - f(a)} \quad , n=1,2,3,\ldots \tag{7}$$

$$x_0 = b,$$

$$\text{якщо } f(a)f''(x) > 0. \tag{8}$$

Узагальнюючи ці результати, робимо висновок :

1) нерухомий той кінець відрізку, для якого $f(x)f''(x) > 0$;

2) послідовні наближення лежать з тої сторони кореня x_*, де функція $f(x)$ задовольняє умові $f(x)f''(x) < 0$. Завжди x_{n+1} ближче до кореня x_*, ніж x_n.

Надалі для визначеності будемо розглядати формулу (7), тобто

$$x_n = x_{n-1} + \frac{x_{n-1} - a}{f(x_{n-1}) - f(a)} f(x_{n-1}) = \frac{af(x_{n-1}) - x_{n-1}f(a)}{f(x_{n-1}) - f(a)} \equiv \varphi(x_{n-1}). \tag{9}$$

Далі доведемо збіжність послідовності (9).

<u>I спосіб</u>. Нехай $x^* = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ (границя існує, бо $\{x_n\}$ обмежена та монотонна). Перейшовши до границі в (9), отримаємо:

$$x^* = x^* - \frac{f(x^*)}{f(x^*) - f(a)}(x^* - a) \tag{10}$$

Звідси випливає, що $f(x^*) = 0$. Оскільки за припущенням існує єдиний корінь $f(x)$ на $[a,b]$, то $x^* = x_*$, що і потрібно було довести.

<u>II спосіб</u>. Маємо

$$\varphi'(x_*) = \frac{[af'(x_*) - f(a)][f(x_*) - f(a)] - f'(x_*)[af(x_*) - x_*f(a)]}{[f(x_*) - f(a)]^2} =$$

$$= \frac{f(a) + (x_* - a)f'(x_*)}{f(a)}. \tag{11}$$

За формулою Тейлора

$$f(a) = f(x_*) + (a - x_*)f'(x_*) + \frac{(a - x_*)^2}{2!} f''(\xi), \quad \xi \in [x_*, a],$$

або

$$f(a) + (x_* - a)f'(x_*) = \frac{(a - x_*)^2}{2!} f''(\xi). \tag{12}$$

Підставивши (12) в (11), отримаємо

$$\varphi'(x_*) = \frac{(a - x_*)}{2} \frac{f''(\xi)}{f(a)} \ . \tag{13}$$

При a достатньо близькому до x_* $\varphi'(x_*)$ - мале число, і тому існує такий окіл точки x_*, в якому буде мати місце нерівність

$$|\varphi'(x)| \le q < 1 \tag{14}$$

і якщо a взято з цього околу, то послідовність (9) буде збігатися до своєї єдиної границі $x = x_*$ (це випливає з принципу стислих (стиснутих) відображень), причому швидкість збіжності характеризується нерівністю

$$|x_n - x_*| \le q^n |a - x_*| \tag{15}$$

(Тут можна записати ще одну оцінку

$$|x_n - x_*| = |\varphi(x_{n-1}) - \varphi(x_*)| = |\varphi'(\xi)||x_{n-1} - x_*| \le q|x_{n-1} - x_*|, \tag{16}$$

$q < 1$, $\xi \in [x_{n-1}, x_*]$),

що свідчить про геометричну збіжність ітерацій.

Відмітимо, що збіжність методу хорд має степінь 1.6, тобто

$$|x_n - x_*| < q|x_{n-1} - x_*|^{1.6} \tag{17}$$

тобто більш швидка.

Розглянемо ще один спосіб дослідження залежності n-го і (n+1)-го наближення, який розглядається в [4, стр.186]. Нехай дійсне значення кореня x_*, тоді

$$a = x_0 = x_* + \varepsilon_0$$
$$x_{n-1} = x_* + \varepsilon_{n-1} \tag{18}$$

Враховуючи, що $f(x_*) = 0$, за формулою Тейлора отримаємо:

$$f(a) = f(x_0) = \varepsilon_0 f'(x_*) + \frac{1}{2}\varepsilon_0^2 f''(x_*) + \ldots$$
$$f(x_{n-1}) = \varepsilon_{n-1} f'(x_*) + \frac{1}{2}\varepsilon_n^2 f''(x_*) + \ldots \tag{19}$$

Підставляючи ці значення $f(a)$ і $f(x_{n-1})$ в (9) та спрощуючи його, отримаємо

$$x_n \approx x_* + \frac{1}{2}\varepsilon_0 \varepsilon_{n-1} f''(x_*)/f'(x_*), \tag{20}$$

звідки

$$\varepsilon_n \approx \frac{1}{2}\varepsilon_0 \varepsilon_{n-1} f''(x_*)/f'(x_*) \tag{21}$$

Таким чином, якщо ε_0 задовольняє умові

$$\left|\frac{1}{2}\varepsilon_0 f''(x_*)/f'(x_*)\right| < 1,$$

то процес буде збіжним.

Отримаємо формулу для оцінки точності наближень.

Оскільки $f(x_*)=0$, то

$$f(x_n)=f(x_n)-f(x_*)=f'(\xi)(x_n-x_*)\ . \tag{22}$$

Покладемо $m=\min\limits_{[a,b]}|f'(x)|$, тоді з (22):

$$|x_n-x_*|\le\frac{|f(x_n)|}{m}. \tag{23}$$

Наведемо ще одну формулу, яка дозволяє оцінити абсолютну похибку наближеного значення x_n, якщо відомі два послідовні наближення x_{n-1} і x_n.

Нехай на $[a,b]$

$$0<m\le f'(x)\le M<+\infty. \tag{24}$$

Враховуючи, що $f(x_*)=0$ з (9), отримаємо

$$f(x_*)-f(x_{n-1})=\frac{f(x_{n-1})-f(a)}{x_{n-1}-a}(x_n-x_{n-1}) \tag{25}$$

Застосовуючи теорему Лагранжа, отримаємо

$$f(\tilde{x})=(x_*-x_{n-1})f'(\xi_{n-1})=(x_n-x_{n-1})f'(\bar{x}_{n-1})\ ,\ \ \tilde{x}\in[a,b] \tag{26}$$

де $\xi_{n-1}\in(x_{n-1},\xi)$ і $\bar{x}_{n-1}\in(a,x_{n-1})$. Тоді з (26) маємо

$$(x_*-x_n+x_n-x_{n-1})f'(\xi_{n-1})=(x_n-x_{n-1})f'(\bar{x}_n) \tag{27}$$

або

$$(x_*-x_n)f'(\xi_{n-1})=(x_n-x_{n-1})(f'(\bar{x}_{n-1})-f'(\xi_{n-1})) \tag{28}$$

тобто

$$|x_*-x_n|=\frac{|f'(\bar{x}_{n-1})-f'(\xi_{n-1})|}{f'(\xi_{n-1})}|x_n-x_{n-1}| \tag{29}$$

Оскільки $|f'(x)|>0$ і $\bar{x}_{n-1},\xi_{n-1}\in[a,b]$, то

$$|f'(\bar{x}_{n-1})-f'(\xi_{n-1})|\le M-m.$$

Тому з (29) отримуємо

$$|x_*-x_n|\le\frac{M-m}{m}|x_n-x_{n-1}| \tag{30}$$

Якщо відрізок $[a,b]$ настільки малий, що $M\le 2m$, то

$$|x_*-x_n|\le|x_n-x_{n-1}|. \tag{31}$$

Найнадійнішим з аналітичних методів вважають метод фіксованої дотичної.

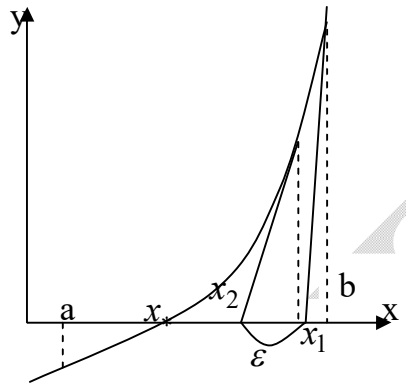
При практичному застосуванні ітераційних методів розв'язання нелінійних рівнянь можна застосовувати наступні критерії зупинки, наприклад:

1) Максимальна кількість ітерацій (апріорі її не завжди легко визначити).
2) Слабка варіація наближення x_n до кореня:

$$|x_{n+1}-x_n|<\varepsilon\text{, або }|x_{n+1}-x_n|<\varepsilon|x_n|$$

Коли шуканий корінь дорівнює 0, цей критерій не підходить.

Більш того, цей критерій не завжди можна використовувати (він ґрунтується на формулі (23)), як видно з наступного малюнка



3) Досить мале значення функції $|f(x_n)| < \varepsilon_1$. Це найбільш вживаний критерій. Доцільним є використання критеріїв 2), 3) одночасно.

Розглянуті наближені аналітичні методи значно ефективніші, ніж метод ділення проміжку навпіл, в тих випадках, коли їх можна застосовувати, але вони в меншій степені здатні гарантувати успіх. Основою таких методів є принцип заміни функції $y = f(x)$ за допомогою функції-моделі $y_M = M(x)$, що вибрана так, щоб рівняння $M(x) = 0$ можна було легко розв'язати. На практиці зазвичай обирають модель з лінійним представленням $M(x) = ax + b$.

Тоді метод полягає у визначенні послідовності координат точок (x_n, y_n), через які проводять прямі і які все більше наближаються до кривої $y = f(x)$. Якщо k_n - нахил *n*-ої прямої, то від точки (x_n, y_n) переходять до точки (x_{n+1}, y_{n+1}) за допомогою наступних співвідношень

$$x_{n+1} = x_n - y_n / k_n, \; y_n = f(x_n).$$

Різними способами вибираючи k_n будемо отримувати різні методи. Наприклад:

1) фіксована січна : $k_n = k_1 = (y_1 - y_0)/(x_1 - x_0)$
2) рухома січна : $k_n = (y_n - y_{n-1})/(x_n - x_{n-1})$
3) фіксована дотична : $k_n = f'(x_0)$
4) рухома дотична (метод Ньютона) : $k_n = f'(x_n)$.

Приклади розв'язання задач

1. Розв'язати рівняння

$$x + \sin x - 1 = 0 \qquad (1)$$

методом ділення проміжку навпіл з точністю $\varepsilon=10^{-4}$.

Розв'язання. Спочатку знайдемо проміжок, де рівняння має єдиний корінь. Оскільки похідна функції $f(x) = x + \sin x - 1$ не змінює знак, то корінь у рівнянні (1) буде один. Легко бачити, що $f(0) = -1 < 0$, а $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} > 0$. Отже корінь належить проміжку $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Виберемо $a_0 = 0, \quad b_0 = \frac{\pi}{2}$. Згідно з формулою (6), отримаємо, що для знаходження кореня з точністю 10^{-4} необхідно провести 13 ітерацій. Відповідні значення x_n наведені в наступній таблиці

n	x_n	$f(x_n)$
0	0.785398E+00	0.492505E+00
1	0.392699E+00	-0.224617E+00
2	0.589049E+00	0.144619E+00
3	0.490874E+00	-0.377294E-01
4	0.539961E+00	0.540639E-01
5	0.515418E+00	0.831580E-02
6	0.503146E+00	-0.146705E-01
7	0.509282E+00	-0.316819E-02
8	0.512350E+00	0.257611E-02
9	0.510816E+00	-0.295467E-03
10	0.511583E+00	0.114046E-02
11	0.511199E+00	0.422535E-03
12	0.511007E+00	0.635430E-04
13	0.510911E+00	-0.116016E-03

2. Знайти дійсні корені рівняння

$$x^3 - x - 1 = 0 \qquad (2)$$

методом простої ітерації з точністю $\varepsilon=10^{-4}$.

Розв'язання. Обчислимо похідну функції $f(x) = x^3 - x - 1$ та прирівняємо її до нуля, тоді отримаємо $3x^2 - 1 = 0$. Звідси $x_{1,2} = \pm\sqrt{1/3}$ будуть точками перегину функції. В цих точках функція приймає від'ємні значення, отже між ними коренів не існує. Тоді дійсні корені будуть розташовані зліва від точки $x_1 = -\sqrt{1/3}$ та справа від $x_2 = \sqrt{1/3}$. Оскільки в цих областях функція монотонна, то дійсний корінь буде тільки один.

Обчисливши $f(1)=-1<0$ та $f(2)=5>0$ маємо, що існує єдиний дійсний додатній корінь цього рівняння і він належить проміжку [1,2].

Графічне дослідження рівняння (30) також показує, що існує єдиний дійсний додатній корінь цього рівняння і він належить відрізку [1,2]. Оскільки на цьому проміжку $x \neq 0$, то рівняння (30) можна подати у вигляді

$$x=\sqrt{\frac{1}{x}+1}. \qquad (3)$$

Позначимо $\varphi(x)=\sqrt{\frac{1}{x}+1}$. Перевіримо виконання умов теореми про збіжність методу простої ітерації. Виберемо x_0=1,5, тоді δ=0,5. Функція $\varphi'(x)=-\frac{1}{2\sqrt{x^3+x^4}}$ є від'ємною та зростаючою, а отже її абсолютні значення спадають. Звідси будемо мати $\max\limits_{1\le x\le 2}|\varphi'(x)|=|\varphi'(1)|=\frac{1}{2\sqrt{2}}$, тобто $q=\frac{1}{2\sqrt{2}}<1$. Тоді

$$|\varphi(x_0)-x_0|=\left|\sqrt{\frac{2}{3}+1}-1{,}5\right|\approx 0{,}205, \quad (1-q)\delta=\left(1-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)\cdot 0{,}5\approx 0{,}3232,$$

а отже умова (6,МПІ) виконується. З формули (16',МПІ) маємо, що кількість ітерацій, які потрібно провести для знаходження кореня з точністю ε=10^{-4} повинна задовольняти умові $n\ge 8$. Відповідні значення x_n та $x_n-\varphi(x_n)$ наведені в наступній таблиці

n	x_n	$x_n-\varphi(x_n)$
0	0.150000E+01	0.209006E+00
1	0.129099E+01	-0.411454E-01
2	0.133214E+01	0.901020E-02
3	0.132313E+01	-0.193024E-02
4	0.132506E+01	0.415444E-03
5	0.132464E+01	-0.892878E-04
6	0.132473E+01	0.191927E-04
7	0.132471E+01	-0.417233E-05
8	0.132472E+01	0.953674E-06

Виходячи з нерівності (20,МПІ) і отриманих результатів видно, що для досягнення заданої точності достатньо було провести 5 ітерацій. Взагалі

слід відзначити, що апостеріорна оцінка (20,МПІ) є більш точною і її використання може заощадити деяку кількість обчислень.

3. Методом релаксації знайти найменший за модулем від'ємний корінь рівняння

$$x^3+3x^2-1=0 \tag{4}$$

з точністю $\varepsilon=10^{-4}$.

Розв'язання. Спочатку виділимо корені рівняння (4) користуючись наступною таблицею

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
sign $f(x)$	–	–	+	+	–	+	+	+

З даної таблиці видно, що рівняння має три корені розташовані на проміжках [–3;–2], [–1;0], [0;1]. Будемо знаходити корінь на проміжку [–1;0]. Позначимо $f(x)=x^3+3x^2-1$. Обчисливши значення $f(-0{,}5)=-0{,}375$ можна уточнити проміжок існування кореня [–1;–0,5]. Похідна $f'(x)=3x^2+6x<0,\quad x\in[-1;-0{,}5]$ є монотонно зростаючою функцією на [–1;–0,5] (оскільки $f''(x)=6x+6\geq 0$). Тому

$$m_1=\min_{x\in[-1;-0{,}5]}\left|f'(x)\right|=\left|f'(-0{,}5)\right|=2{,}25,\ M_1=\max_{x\in[-1;-0{,}5]}\left|f'(x)\right|=\left|f'(-1)\right|=3.$$

Тоді, відповідно до формул (1,МР), алгоритм методу релаксації буде мати вигляд

$$x_{n+1}=x_n+\tau_{опт}(x_n^3+3x_n^2-1). \tag{5}$$

де $\tau_{опт}=8/21$.

Виберемо за початкове наближення точку x_0=–0,5, тоді будемо мати оцінку $|z_0|\leq 0{,}5$, а величина $q=1/7$ (див. (21)). Кількість ітерацій, які потрібно провести для знаходження розв'язку з точністю ε=10^{-4} буде дорівнювати 5 (див. (5')). В наступній таблиці наведені відповідні дані ітераційної послідовності:

n	x_n	$f(x_n)$
0	-0.500000E+00	0.142857E+00
1	-0.642857E+00	0.985700E-02
2	-0.652714E+00	-0.105500E-04
3	-0.652704E+00	0.596046E-07
4	-0.652704E+00	0.000000E+00
5	-0.652704E+00	0.000000E+00

Із наведених даних видно, що необхідна точність досягається раніше 5-ої ітерації. Це досить характерно для апріорних оцінок.

4. Методом Ньютона знайти додатні корені рівняння

$$x^3+3x^2-1=0 \tag{34}$$

з точністю $\varepsilon=10^{-4}$.

Розв'язання. З табл. 3 видно, що рівняння (34) має єдиний додатній корінь, що належить проміжку [0;1]. Позначимо $f(x)=x^3+3x^2-1$, Обчислимо $f(0,5)=-0,125$. Тепер будемо шукати корінь на проміжку [0,5;1]. Обчислимо $f'(x)=3x^2+6x>0$, $f''(x)=6x+6>0$, $x\in[0,5;1]$ і, оскільки $f'(x)$ та $f''(x)$ монотонно зростають на [0,5;1], то

$$m_1=\min_{x\in[0,5;1]}|f'(x)|=|f'(0,5)|=3,75,$$

$$M_2=\max_{x\in[0,5;1]}|f''(x)|=|f''(1)|=12.$$

Виходячи з умови $f(x_0)f''(x_0)>0$, виберемо $x_0=1$, тоді $|x_0-x_*|\le 0,5$. З формули (25) маємо

$$q=\frac{12\cdot 0,5}{2\cdot 3,75}=0,8<1.$$

Тобто всі умови теореми про збіжність методу Ньютона виконані. Тоді, відповідно до формули (23), алгоритм методу Ньютона буде мати вигляд

$$x_{n+1}=x_n-\frac{x_n^3+3x_n^2-1}{3x_n^2+6x_n},\quad n=0,1,2,\ldots\ .$$

З формули (25,МН) маємо, що для досягнення заданої точності достатньо провести 7 ітерацій. Відповідні обчислення наведені в таблиці

n	x_n	$f(x_n)$
0	1.0000000	3.0000000
1	0.666666666667	0.629629629631
2	0.548611111111	0.068040217228
3	0.532390161865	0.001218139879
4	0.532088989397	0.000000416957
5	0.532088886238	0.000000000000
6	0.532088886238	0.000000000000
7	0.532088886238	0.000000000000

Задачі для самостійного розв'язання

1. Одним з ітераційних методів знайти дійсні корені рівнянь з точністю ε (наприклад $\varepsilon=10^{-4}$).

1) $x^3-5x^2+4x+0{,}092=0$; 2) $x^3-4x^2-7x+13=0$;

3) $x^4+x^3-6x^2+20x-16=0$; 4) $x^3+\sin x-12x+1=0$;

5) $x^3-10x^2+44x+29=0$; 6) $x^2+\sin x-12x=0{,}25$;

7) $3x+\cos x+1=0$; 8) $x^3-3x^2-17x+22=0$;

9) $x^4-2x^3-3{,}74x^3+8{,}18x-3{,}48=0$; 10) $x^2+4\sin x-1=0$;

11) $x^3+4\sin x=0$; 12) $x^4-10x^3+48{,}16x^2+108{,}08x+70{,}76=0$;

13) $x^4-3x^3+20x^2+44x-54=0$; 14) $x^3-3x^2-14x-8=0$;

15) $x^3-x-1=0$; 16) $3x-\cos x-1=0$; 17) $3x^2-\cos^2\pi x=0$;

18) $x^2+4\sin x=0$; 19) $(x-1)^3+0{,}5e^x=0$; 20) $x^3+4x-6=0$;

21) $x^3-2x^2+x+1=0$; 22) $x^2\lg x-1=0$; 23) $x^3+6x^2+9x+2=0$;

24) $\mathrm{sh}x-12\,\mathrm{th}x-0{,}311=0$; 25) $e^x-2(x-1)^2=0$; 26) $e^{-x}+x^2-2=0$;

27) $x^4+4x-2=0$; 28) $x^4+2x-1=0$; 29) $x^3-x^2+x-3=0$;

30) $x^5+x-3=0$; 31) $x^7+x+4=0$; 32) $2^x+x^2-1{,}15=0$;

33) $3^{-x}-x^2+1=0$; 34) $x^4-2x^3+x^2-2x+1=0$;

35) $x^5-5x+2=0$; 36) $x^7+6x-5=0$; 37) $x^4+2x-2=0$;

38) $(x-1)^2-\sin 2x=0$; 39) $x^4+2x^2-6x+2=0$; 40) $x^5-3x^2+1=0$;

41) $5x^3+2x^2-15x-6=0$; 42) $x^6-3x^2+x-1=0$;

43) $(x-1)^2-0{,}5e^x=0$; 44) $3x^4+4x^3-12x^2-5=0$;

45) $x^2\cos 2x=1$; 46) $x^2-3+0{,}5^x=0$; 47) $x^2-10\sin x=0$.

2. Система регулювання має характеристичне рівняння

$$12x^3+7x^2+x+k=0.$$

Тут k – коефіцієнт підсилення в зворотному зв‘язку системи. З точністю $\varepsilon=10^{-4}$ знайти найбільше значення k, при якому система залишається стійкою. (Стійкість системи означає, що $\mathrm{Re}\,x\le 0$).

3. Звести рівняння $x^3-2x^2-4x+7=0$ до вигляду, зручному для застосування методу простої ітерації для знаходження коренів на відрізках $[1;2]$ та $[2;3]$.

4. Звести рівняння $x^3-2x^2-4x+7=0$ до вигляду, зручному для застосування методу простої ітерації для знаходження коренів на відрізках $[1;2]$ та $[2;3]$.

5. Нехай в алгоритмі методу простої ітерації (9) в деякому околі кореня x_* похідна $\varphi'(x)$ зберігає сталий знак та виконана нерівність $|\varphi'(x)|\le q<1$. Довести, що у випадку додатної похідної послідовні наближення (9)

збігаються до кореня x_* монотонно, а у випадку від'ємної похідної послідовні наближення коливаються навколо кореня x_*.

6. Визначити порядок збіжності алгоритму Чебишова розв'язання рівняння (1)

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{f''(x_n) f^2(x_n)}{2[f'(x_n)]^3}.$$

7. Визначити порядок збіжності методу січних розв'язання рівняння (1).

8. Визначити кількість ітерацій, необхідних для обчислення мінімального додатного кореня рівняння $tgx - 1 + x = 0$ методом поділу відрізка навпіл з точністю $\varepsilon = 10^{-3}$.

9. Оцінити кількість ітерацій, які необхідно провести для обчислення кореня рівняння $\ln x - e^{-x} = 0$ методом поділу відрізка навпіл.

10. Записати алгоритм розв'язку рівняння $x^3 - x - 1 = 0$ методом Ньютона. Оцінити кількість ітерацій, які необхідно провести для знаходження кореня з точністю $\varepsilon = 10^{-2}$.

11. Оцінити кількість ітерацій, які необхідно провести для обчислення кореня рівняння $\ln x - e^{-x} = 0$ з точністю $\varepsilon = 10^{-3}$ методом Ньютона. Записати алгоритм реалізації та надати геометричну інтерпретацію.

12. Визначити початкове наближення для методу Ньютона обчислення розв'язку рівняння $2x^2 - 5x + 2 = \ln x$ на відрізках $[0.5\,;1]$ та $[0.5\,;1]$ (при умові квадратичної збіжності методу Ньютона).

13. Вибрати початкове наближення для методу Ньютона обчислення коренів рівняння $x^3 - 2x^2 - 4x + 7 = 0$ на відрізках $[1\,;2]$ та $[2\,;3]$ (при умові квадратичної збіжності методу Ньютона).

14. Записати формулу для ітераційного обчислення $x = \sqrt[10]{0.1}$ за допомогою методу Ньютона. Обрати x_0.

15. Записати алгоритм розв'язку рівняння $x^3 - 3x^2 - 1 = 0$ методом простої ітерації. Визначити кількість ітерацій необхідних для знаходження кореня з точністю $\varepsilon = 10^{-2}$.

16. Звести рівняння $x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = 0$ до вигляду, зручному для застосування методу простої ітерації для знаходження коренів на відрізках $[-3.51;-3]$ та $[0\,;0.5]$.

RAI

Лабораторна робота

Завдання. Локалізувати корені рівняння $f(x)=0$. Знайти їх з точністю $\varepsilon = 10^{-5}$ за допомогою методів, вказаних в кожному з варіантів. Порівняти швидкість збіжності методів (за кількістю ітерацій).

Варіант 1

N	*f(x)*	Знайти дійсні корені	Метод
1	$e^{-x} - 2 + x^2$	від'ємний	простої ітерації, релаксації, хорд
2	$xe^x - x - 1$	Додатній	Ньютона, січних, релаксації
3	$e^x + 1 - \sqrt{9 - x^2}$	Додатній	простої ітерації, модифікований Ньютона, хорд
4	$(x+1) \cdot e^{x+1} - x - 2$	найбільший за модулем	релаксації, Ньютона, модифікований Ньютона
5	$\sqrt{x} - \cos x$	усі корені	простої ітерації, Ньютона, модифікований Ньютона
6	$\sin x + 2x^2 + 4x$	від'ємний	Ньютона, січних, модифікований Ньютона
7	$e^{-x} - \lg(1 - x^2) - 2$	Додатній	простої ітерації, хорд, Стеффенсена
8	$\sin(x+2) - x^2 + 2x - 1$	найменший додатній	простої ітерації, січних, Стеффенсена
9	$(x-1)sh(x+1) - x$	найбільший за модулем	релаксації, Ньютона, січних
10	$x - e^{-x^2}$	усі корені	простої ітерації, січних, хорд

Варіант 2

N	*f(x)*	Знайти дійсні корені	Метод
1	$x^7 + x + 4$	дійсні	простої ітерації, релаксації, хорд
2	$x^4 + 2x^2 - 6x + 2$	найменший додатній	Ньютона, січних, релаксації
3	$x^5 + x - 3$	додатній	простої ітерації,

			модифікований Ньютона, хорд
4	$5x^3+2x^2-15x-6$	найбільший за модулем від'ємний	релаксації, Ньютона, модифікований Ньютона
5	x^5-3x^2+1	дійсні від'ємні	простої ітерації, Ньютона, модифікований Ньютона
6	$x^4 + 47{,}89x^3 + 797{,}3x^2 + 5349x + 12300$	найменший за модулем від'ємний	Ньютона, січних, модифікований Ньютона
7	$x^4-4x^3+5.5x^2-3x+$ $+0.5$	найбільший за модулем додатній	простої ітерації, хорд, Стеффенсена
8	$x^4-2x^3+x^2-2x+1$	дійсний найбільший за модулем додатній	простої ітерації, січних, Стеффенсена
9	$3x^4 + 4x^3 - 12x^2 - 5$	дійсний найбільший за модулем від'ємний	релаксації, Ньютона, січних
10	$x^4-4x^3+5.5x^2-3x+$ $+0.5$	дійсний додатній	простої ітерації, січних, хорд
11	$x^2-3+0.5^x$	додатній	простої ітерації, Ньютона, модифікований Ньютона
12	$x^3-3x^2-17x+22$	найбільший за модулем додатній	Релаксації, Ньютона, січних

Варіант 3

N	*f(x)*	Знайти дійсні корені	Метод
1	$x^4+x^3-6x^2+20x-16$	від'ємні	простої ітерації,

			релаксації, хорд
2	$x^3 - 10x^2 + 44x + 29$	Дійсні	Ньютона, січних, релаксації
3	$x^4 - 3x^3 + 20x^2 + 44x - 54$	додатній	простої ітерації, модифікований Ньютона, хорд
4	$3x^3 - 28x^2 + 80x - 64$	найбільший за модулем від'ємний	релаксації, Ньютона, модифікований Ньютона
5	$e^{-x} - 5x^2 + 10x$	додатні	простої ітерації, Ньютона, модифікований Ньютона
6	$x^7 + x + 4$	всі дійсні корені	релаксації, Ньютона, січних
7	$x^4 + 2x^2 - 6x + 2$	найбільший додатній	простої ітерації, Ньютона, хорд
8	$x^5 + x - 3$	корені	простої ітерації, січних, релаксації
9	$5x^3 + 2x^2 - 15x - 6$	найбільший за модулем від'ємний	релаксації, Ньютона, січних
10	$x^5 - 3x^2 + 1$	від'ємні	простої ітерації, січних, хорд
11	$x^3 - 3x^2 - 17x + 22$	найбільший за модулем від'ємний	простої ітерації, Ньютона, модифікований Ньютона
12	$x^4 + 47{,}89x^3 + 797{,}3x^2 + 5349x + 12300$	найменший за модулем від'ємний	релаксації, Ньютона, січних
13	$x^4 - 4x^3 + 5.5x^2 - 3x + 0.5$	найменший додатній	простої ітерації, січних, релаксації
14	$x^3 - 4x^2 + 10x - 10$	всі корені	релаксації, Ньютона, хорд

Варіант 4

N	*f(x)*	Знайти	Метод

		дійсні корені	
1	$5x^3+2x^2-15x-6$	додатні	простої ітерації, релаксації, хорд
2	$(x+1)e^{(x+1)}-x-2$	найбільший за модулем	Ньютона, січних, релаксації
3	x^5-3x^2+1	найбільший додатній	простої ітерації, модифікований Ньютона, хорд
4	$e^{-(x+1)}+x^2+2x-1$	від'ємні	релаксації, Ньютона, модифікований Ньютона
5	$x^4 + 47{,}89x^3 + 797{,}3x^2 + 5349x + 12300$	найбільший за модулем від'ємний	простої ітерації, Ньютона, модифікований Ньютона
6	$\sin x + 2x^2 + 4x$	від'ємний	релаксації, Ньютона, січних
7	$x^4-6.5x^2+3$	найменший додатній	простої ітерації, Ньютона, хорд
8	$x^4-2x^3+x^2-2x+1$	найбільший додатній	простої ітерації, січних, релаксації
9	$\sqrt{x}-\cos(x)$	корені	Ньютона, січних, релаксації
10	$e^{-x}+x^2-2$	додатній	простої ітерації, модифікований Ньютона, хорд
11	$3x^4 + 4x^3 - 12x^2 - 5$	найбільший за модулем від'ємний	релаксації, Ньютона, модифікований Ньютона
12	$x^4-\frac{10}{3}x^2+1$	найменший додатній	простої ітерації, Ньютона, модифікований Ньютона
13	$(x-1)sh(x+1)-x$	від'ємний	релаксації, Ньютона, модифікований Ньютона
14	$\sin(x+2)-x^2+2x-1$	найбільший додатній	простої ітерації, Ньютона, хорд
15	$x^2-3+0.5^x$	додатні	релаксації, Ньютона, модифікований Ньютона

Варіант 5

N	*f(x)*	Знайти дійсні корені	Метод
1	$x^4 + 2x^2 - 6x + 2$	найменший додатній	простої ітерації, релаксації, хорд
2	$5x^3 + 2x^2 - 15x - 6$	найменший за модулем від'ємний	Ньютона, січних, релаксації
3	$e^{-x} + x^2 - 2$	від'ємний	простої ітерації, модифікований Ньютона, хорд
4	$(x-1)sh(x+1) - x$	додатній	релаксації, Ньютона, модифікований Ньютона
5	$x^5 - 3x^2 + 1$	найменший додатній	простої ітерації, Ньютона, модифікований Ньютона
6	$x^3 - 4x^2 + 10x - 10$	корені	релаксації, Ньютона, січних
7	$x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x + 1$	найменший додатній	простої ітерації, Ньютона, хорд
8	$x^4 - \frac{10}{3}x^2 + 1$	найбільший додатній	простої ітерації, січних, релаксації
9	$x^4 - 4x^3 + 5.5x^2 - 3x + 0.5$	найбільший додатній	Ньютона, січних, релаксації
10	$(x+1)e^{(x+1)} - x - 2$	найменший за модулем	простої ітерації, модифікований Ньютона, хорд
11	$3x^3 - 28x^2 + 80x - 64$	найменший додатній	релаксації, Ньютона, модифікований Ньютона
12	$\sin(x+2) - x^2 + 2x - 1$	найменший додатній	простої ітерації, Ньютона, модифікований Ньютона

Список використаної літератури

1. Сборник задач по методам вычислений. /Азаров А.И., Басик В.А., Мелешко И.Н. и др./, Мн.: Университетское, 2000. -311с.
2. Бахвалов Н.С., Лапин А.В., Чижонков Е.В. Численные методы в задачах и упражнениях. Учеб. Пособие. Москва:Высш.шк., 2000.-190с.
3. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П. Кобельков Г.М. Численные методы. М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. — 636 с.
4. Бурківська В.Л., Войцехівський С.О., Гаврилюк І.П. та ін. Методи обчислень. Практикум на ЕОМ. Київ:Вища шк. 1995.-303с.
5. Волков Е.А.Численные методы. Москва:Наука, 1987.-249с.
6. Гаврилюк І.П.,Копистира М.П.,Макаров В.Л.,Москальков М.М. Збірник задач з методів обчислень.Київ:ВЦ"Київський університет",2000.-204 с.
7. Москальков М.М., Риженко А.І., Войцеховський С.О. та ін. Практикум з методів обчислень. Київ. МАУП. 2006.-80с.
8. Гаврилюк І.П.,Макаров В.Л. Методи обчислень. ч. 1, Київ:Вища школа, 1995.-367 с.
9. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. М.: Наука, 1970.-670с.
10. Калиткин Н.Н., Альшина Е.А., Корякин П.В. Численные методы. Книга 1. (Численный анализ) – Издательский центр «Академия», 2013.- 304с.
11. Каханаер Д. Моулер К., Нэш С. Численные методы и программное обеспечение. М.:МИР, 1998.-575с.
12. Коллатц Л., Альбрехт Ю. Задачи по прикладной математике. Москва: Мир, 1978.-168 с.
13. Копченова Н.В.,Марон И.А. Вычислительная математика в примерах и задачах. СПб: Лань, 2009.-368с.
14. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И. Вычислительные методы, т. 1, М.: Наука, 1976.-303с.
15. Ляшко И.И., Макаров В.Л., Скоробагатько А.А. Методы вычислений. Киев:Высшая школа. 1977.-406с.
16. Самарский А.А. Введение в численные методы. СПб.: Лань, 2005. -288с.
17. Самарский А.А., Вабищевич П.Н., Самарская Е.А. Задачи и упражнения по численным методам. М.:Эдиториал УРСС, 2000.-208с.
18. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. М.: Наука,1989.-432с.