КИЇВСЬКИЙ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТА ОБЧИСЛЮВАЛЬНА МАТЕМАТИКА

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

С. І. Ляшко
Г. В. Сандраков
В. В. Семенов
та ін.

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТА ОБЧИСЛЮВАЛЬНА МАТЕМАТИКА

Монографія

КИЇВСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ 2020

УДК 519.87+519.6+532.5
М34

Автори:

С. І. Ляшко (передмова, розділ 5, розділ 6), Г. В. Сандраков (розділ 1),
В. В. Семенов (розділ 3, розділ 4, розділ 5, розділ 6),
Я. І. Ведель (розділ 2, розділ 6), В. А. Григоренко (розділ 2, розділ 5),
С. В. Денисов (розділ 2, розділ 5), Д. А. Клюшин (розділ 2, розділ 5)

Рецензенти:
д-р фіз.-мат. наук, старш. наук. співроб. О. О. Покутний
(Інститут математики НАН України),
д-р фіз.-мат. наук, старш. наук. співроб., провідн. наук. співроб. Н. В. Семенова
(Інститут кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України)

Рекомендовано до друку вченою радою
факультету комп'ютерних наук та кібернетики
Київського національного університету імені Тараса Шевченка
(протокол № 4 від 21 вересня 2020 року)

М34 Математичне моделювання та обчислювальна математика: монографія / С. І. Ляшко, Г. В. Сандраков, В. В. Семенов та ін. – К. : ВПЦ "Київський університет", 2020. – 222 с.

ISBN 978-966-933-069-7

Досліджено якісні властивості математичних моделей, окремі питання функціонального аналізу, мотивовані проблемами числового аналізу та математичного моделювання. Розроблено числові алгоритми. Розглянуто новий метод моделювання динаміки неоднорідних рідин в області високих тисків, швидкостей та енергій. Розвинуто теорію задач оптимального керування з векторним критерієм якості системами, що описуються рівняннями математичної фізики з узагальненими впливами.

Для студентів і аспірантів факультету комп'ютерних наук та кібернетики, а також фахівців у галузі математичного моделювання, оптимального керування, математичного програмування й обчислювальної математики.

УДК 519.87+519.6+532.5

ISBN 978-966-933-069-7

ЗМІСТ

Передмова

У книзі представлено результати наукових досліджень, які пов'язані з виконанням науково-дослідних робіт за фінансової підтримки МОН України (проект № 0219U008403 «Математичне моделювання та оптимізація динамічних систем для оборони, екології та медицини», 2019–2021 рр.) та НАН України (проект № 0119U101608 «Нові методи дослідження коректності та розв'язання задач дискретної оптимізації, варіаційних нерівностей та їх застосування», 2019–2020 рр.). Даний том можна вважати безпосереднім продовженням нашої книги «Математичні моделі та обчислювальні процеси», що вийшла в 2019 році[1].

У розділі 1 розглянуто новий метод математичного та чисельного моделювання динаміки неоднорідних рідин в області високих тисків, швидкостей та енергій. Цей метод базується на дискретизації законів збереження маси, моментів і енергії, які представлені в інтегральній та диференціальній формах. Така дискретизація є природною та чисельні розрахунки реалізуються як комп'ютерне моделювання динаміки несучої рідини з включеннями іншої рідини. При чисельній реалізації даного методу використовується комбінування методу часток в комірках та методу великих часток.

У розділі 2 розглянуто питання розв'язання дворівневої опуклої задачі мінімізації у гільбертовому просторі. Дворівнева задача опуклої оптимізації полягає у мінімізації першої опуклої функції на множині мінімумів другої опуклої функції. Ця постановка має багато застосувань, але неявні обмеження, що породжені внутрішньою задачею ускладнюють отримання умов оптимальності та побудову методів. Подібним чином формулюються й $\mathfrak{n}$-рівневі задачі, джерелом яких стали питання дослідження операцій (оптимізація за послідовно заданими критеріями або лексикографічна оптимізація). Ми зосередили увагу на розв'язанні задач за допомогою двох методів проксимального типу. Основні теоретичні результати — теореми про характер збіжності методів у різних ситуаціях.

Зазначимо, що проксимальні методи є лідерами серед обчислювально ефективних алгоритмів в Data Science. А одним з найбільш ефективних проксимальних методів є ADMM. У роботі [1] запропоновано цікавий варіант багатоблокового ADMM з прискоренням Нестерова на кожній ітерації. Алгоритм

[1] Ляшко С. І., Номіровський Д. А., Семенов В. В. та ін. Математичні моделі та обчислювальні процеси. К.: ВПЦ «Київський університет», 2019. 209 с.

застосовано для прогнозування виживаності онкологічних хворих (визначення найважливішого серед факторів, які впливають на тривалість життя після проведеної операції, а також прогнозування тривалості життя).

У розділі 3 категорними методами досліджується існування розв'язків деяких класів неопуклих задач, які залежать від параметра, що є елементом повного метричного простору. Доводиться існування масивних множин значень параметрів, для яких задачі мають розв'язок, тобто показується, що властивість розв'язності задач типова. Отримані теореми застосовано до дослідження існування розв'язків задач оптимального керування лінійними системами. Останній параграф розділу присвячено дослідженню задач векторної оптимізації, зокрема, доведенню варіанта варіаційного принципу Девілля–Годфруа–Зізлера.

Важливим класом неопуклих екстремальних задач є задачі максимізації опуклих функціоналів на опуклих множинах. Вже цим задачам властива багатоекстремальність, яка ускладнює розробку та обґрунтування алгоритмів пошуку глобального екстремуму. Для нескінченновимірних задач при традиційних припущеннях теорії керування питання існування оптимальних розв'язків у багатьох випадках теж є проблемою. З іншого боку, наявність опуклої структури часто дозволяє отримати змістовні результати. Більшу частину розділу 4 присвячено дослідженню існування розв'язків задачі максимізації опуклого функціоналу f на замкненій опуклій і обмеженій підмножині X банахового простору $(\mathsf{E}, \|\cdot\|_{\mathsf{E}})$. А саме, вивчається питання: якщо задача опуклої максимізації нерозв'язна, то чи можна цільовий функціонал як завгодно мало адитивно збурити лінійним неперервним функціоналом так, що збурений функціонал досягає максимуму? Отримано як позитивні відповіді, так звані лінійні варіаційні принципи, так і контрприклади. На цьому шляху узагальнено ітераційний процес, запропонований Лінденштрауссом при дослідженні щільності множини операторів, що досягають своєї норми на одиничній замкненій кулі. Відзначимо, що у випадку некомпактності у слабкій топології множини X велику роль починають грати різні геометричні властивості X. Розглянуто також ряд неопуклих узагальнень. Один з параграфів присвячено дослідженню існування розв'язків екстремальних задач на передопуклих множинах — доповненнях скінченних об'єднань опуклих множин до опуклої множини. У останньому параграфі описано задані у рефлексивному банаховому просторі опуклі функціонали, що досягають супремуму на довільній обмеженій замкненій та опуклій підмножині простору.

У розділі 5 увагу приділено обґрунтовуванню чисельних методів оптимізації лінійних розподілених систем з узагальненим керуванням. Припускається, що оператор, який описує модель, задовольняє апріорні оцінки в негативних нормах. Для задач керування з опуклими та неопуклими допустимими мно-

жинами доведено збіжність декількох алгоритмів першого та другого порядків із похибками в ітераційних підзадачах. Проведено дослідження можливої асимптотичної поведінки мінімізуючих послідовностей допустимих керувань. Отримано новий варіаційний принцип, що дозволив довести існування мінімізуючих послідовностей, які задовольняють секвенційний аналог необхідних умов оптимальності другого порядку. Для абстрактної задачі оптимального керування встановлено умови глобальної оптимальності.

Мета розділу 6 — розвинути теорію існування та необхідних умов оптимальності для задач оптимального керування з векторним критерієм якості системами, що описуються рівняннями математичної фізики з узагальненими впливами. Увагу приділено побудові і дослідженню збіжності методів розв'язання задач векторної оптимізації лінійних розподілених систем. Досліджено поняття $(\mathsf{K}, e, \varepsilon)$-апроксимаційної ефективності. Ґрунтуючись на векторному варіанті класичного варіаційного принципу Екланда, доведено умови $(\mathsf{K}, e, \varepsilon)$-апроксимаційної ефективності допустимих керувань у вигляді варіаційних включень.

Чимало матеріалів книги вже знайшли відображення в спеціальних курсах, які викладаються авторами на факультеті комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка для студентів бакалаврської та магістерської програм «Прикладна математика».

Сподіваємось, що книга зацікавить читачів — в першу чергу, наукову молодь.

Зауваження та побажання можна надсилати електронною поштою:

lyashko.serg@gmail.com, gsandrako@gmail.com,
semenov.volodya@gmail.com.

Розділ 1

Mathematical and numerical modeling of heterogeneous fluids dynamics

Mathematical modeling is an essential modern tool for solving scientific and engineering problems. Mathematical and numerical modeling plays a significant role in understanding the phenomena and processes that are investigated in modern physics and chemistry. The modeling can help interpret and even prediction new phenomena. Researching the physical and chemical processes which are in heterogeneous media at large speeds, high pressures and energies in the field of phase transitions, it is required to have accurate values of pressures, energies and velocities arising at various points of these substances at suitable times. Such values are significant in order to understand the state of media and the phase transitions that have taken place. The determination of such values is possible on the basis of mathematical and numerical modeling of nonlinear hydrodynamic processes in heterogeneous fluids.

The significance of this problem is due to the intensive development of the branches of physics and chemistry associated with the study of dynamic processes occurring during pulsed loading and the passage of shock waves in metals, polymers and heterogeneous composites [1]. The study of such processes is necessary for the development of new technologies that use the methods of pulsed and shock loading of materials and composites, which make it possible to synthesize new substances and polymers. The analysis of these processes requires the development of suitable mathematical models and the construction of numerical methods and effective computational algorithms.

One approach to developing such mathematical models are presented in [1] and is based on the concept of multiphase continuous media. In this case, the assumptions of a multi-speed continuum and interpenetrating motions of the components are accepted when deriving multiphase equations for suitable models. In a sense, this concept means the simultaneous presence of several materials at each point in space under consideration (further details can be found in [1]).

In addition, the general multiphase equations for such multi-speed continuous media are not closed and contain indefinite terms. In such equations, the term of describing the redistribution of energy between phases during the development of the dynamics of multiphase media is not definite, for example. In order to definite this term in specific cases, it is necessary to carry out additional physical and physicochemical experiments, the implementation of which is difficult in practice.

This paper will present a new method for mathematical modeling of structurally heterogeneous materials as heterogeneous fluids dynamics. The problem of describing energy redistribution between phases does not arise when this method is implemented. Energy redistribution in this method is performed through the assumption that the local pressure in each phase is the same. This assumption is natural, because «at high pressures the properties of a solid approach the properties of liquids, and for mixtures of liquids, the coincidence of their pressures is characteristic» according to [1], p. 242.

Thus, a new modeling method for the heterogeneous fluids dynamics will be considered. These fluids are assumed to be compressible and non-viscous. Liquid inhomogeneities are considered as small particles or droplets of one liquid distributed in another (main) liquid. Thus simulations of the main fluid with small transited particles dynamics are considered, where total number of the particles may be large enough. The particle dynamics will be modeled as in the particle-in-cell method [2], and in the main fluid as in the large particle method [3]. Other combinations of these methods were presented in [3] for modeling the problems of contact and free boundaries. However, for the energy redistribution in [3], it was assumed that the increments of the internal energies coincide. Particle methods are often used to simulate the dynamics of homogeneous fluids [2–5].

The particle methods have been generalized to the smoothed (or smeared) particle method [6] to simulate a variety of fluid dynamics problems. An overview and developments of this method is given in [7]. This method has also begun to be applied to multiphase flows modeling in [8]. A review of applications of the smoothed particle method is given in [9] and developed further, for example, in [10]. However, in these works [8–10] it is not explained how to determine the terms of redistribution between phases, and these terms are postulated from physical considerations. This approach cannot be generalized to problems in which phase transitions are permissible.

It is interesting that this method, developed for problems of hydrodynamics, turned out to be useful for simulating problems of diffusion, conduction, and nanomaterials [11] as the meshfree particle method. The particle methods have also proven useful for simulating plasma dynamics processes. Some results of modeling plasma problems are given in [12–15]. The method presented here is a generalization of methods discussed in [12] and [16].

Initially, the methods of [12] and [16] were developed with the prospect of simulating processes in which phase transitions are permissible. Some results of modeling such problems are presented in [17] and [18], where the method of [16] is essentially used. Here this method will be generalized to obtain more accurate and stable calculations. Such a generalization was announced in [19–21] and can also be used for modeling processes in which phase transitions is taken into account.

1.1 The large particle method

The presented method is a combination of the Harlow particle-in-cell method and Belotserkovskiy large particles method (see [2] and [3]). Let us recall some background of the methods before to give more details on the combination. Euler and Lagrange approaches are used simultaneously in the particle-in-cell method for homogeneous fluid. The methods are based on an approximation of conservation laws for masses, momentums, and energies in the following integral forms

$$\begin{gathered}\int\limits_{V(t)} \frac{\partial \rho}{\partial t}\, d\tau = -\int\limits_{S(t)} (\rho W)\cdot \eta\, ds,\\ \frac{d}{dt}\int\limits_{V(t)} \rho W d\tau = -\int\limits_{S(t)} p\,\eta\, ds,\\ \frac{d}{dt}\int\limits_{V(t)} \rho E\, d\tau = -\int\limits_{S(t)} (pW)\cdot \eta\, ds,\end{gathered} \tag{1.1}$$

where $V(t)$ and $S(t)$ are volume and surface of some Lagrange's domain in the fluid, η is an exterior normal to the domain, $p = p(\rho, E)$ and ρ, W, E are unknown density, velocity, and full energy. For example, the case of three dimension space may be discussed and therefore by definition ones have $W = (u, v, w)$ for the velocity vector function.

It is known [2, 3] that the conservation laws are equivalent to conservation laws for masses, momentums, and energies in the following differential forms

$$\begin{gathered}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho W) = 0,\\ \frac{\partial \rho W}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho W \otimes W) + \nabla p = 0,\\ \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho W E) + \operatorname{div}(pW) = 0,\end{gathered} \tag{1.2}$$

where $W \otimes W$ is the tensor square of vector function $W = W(t, x, y, z)$ and

(x, y, z) is a point of some domain $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, which is filled by the heterogeneous fluid under consideration at time $t \in [0, T]$ for some T that is fixed.

Spatial discretization in the large particle method is defined as follows. The domain Ω that occupied by the liquid is divided into small cells, for example, with uniform steps $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ in the spatial variables. Each such cell, as usual, is assigned the number i, j, k and the values of density, velocities, pressure and energy refer to the center of the cell and are denoted, respectively, as

$$\rho^n_{ijk}, \quad u^n_{ijk}, \quad v^n_{ijk}, \quad w^n_{ijk}, \quad p^n_{ijk}, \quad E^n_{ijk}. \tag{1.3}$$

The subscript n in these notations indicates the number of the time step, which corresponds to the natural time discretization, since the calculations are carried out step by step with a sufficiently small time interval Δt, starting from a given initial configuration of the fluid. Thus, the values of n in the course of calculations change from 0 to $N = T/\Delta t$ under the assumption that N is an integer.

The corresponding time step from the time layer n to the time layer $n + 1$ to simulate the homogeneous fluid dynamics is divided into three stages: Euler, Lagrangian and final stages in accordance with [3]. The division is also called the splitting into physical processes of the step or the splitting of the time step into fractional steps of the transition from the layer n to the layer $n + 1$. Thus, the total mass of large particles is saved at every time step of such simulation.

The Euler stage is the calculation of the following intermediate values of velocities and energy

$$\bar{u}^n_{ijk}, \quad \bar{v}^n_{ijk}, \quad \bar{w}^n_{ijk}, \quad \bar{E}^n_{ijk} \tag{1.4}$$

for a cell with number i, j, k by the following formulas

$$\begin{aligned}
\bar{u}^n_{ijk} &= u^n_{ijk} - \frac{p^n_{i+1,j,k} - p^n_{i-1,j,k}}{2\,\Delta x}\,\frac{\Delta t}{\rho^n_{ijk}}, \\
\bar{v}^n_{ijk} &= v^n_{ijk} - \frac{p^n_{i,j+1,k} - p^n_{i,j-1,k}}{2\,\Delta y}\,\frac{\Delta t}{\rho^n_{ijk}}, \\
\bar{w}^n_{ijk} &= w^n_{ijk} - \frac{p^n_{i,j,k+1} - p^n_{i,j,k-1}}{2\,\Delta z}\,\frac{\Delta t}{\rho^n_{ijk}}, \\
\bar{E}^n_{ijk} = E^n_{ijk} &- \frac{p^n_{i+1/2,j,k}u^n_{i+1/2,j,k} - p^n_{i-1/2,j,k}u^n_{i-1/2,j,k}}{\Delta x}\,\frac{\Delta t}{\rho^n_{ijk}} - \\
&- \frac{p^n_{i,j+1/2,k}v^n_{i,j+1/2,k} - p^n_{i,j-1/2,k}v^n_{i,j-1/2,k}}{\Delta y}\,\frac{\Delta t}{\rho^n_{ijk}} - \\
&- \frac{p^n_{i,j,k+1/2}w^n_{i,j,k+1/2} - p^n_{i,j,k-1/2}w^n_{i,j,k-1/2}}{\Delta z}\,\frac{\Delta t}{\rho^n_{ijk}},
\end{aligned} \tag{1.5}$$

where the following formulas are used to calculate the average values of the intermediate pressure and velocities at the relevant cell boundaries

$$
\begin{aligned}
p^n_{i+1/2,j,k} &= \frac{p^n_{i+1,j,k} + p^n_{i,j,k}}{2}, \qquad p^n_{i-1/2,j,k} = \frac{p^n_{i,j,k} + p^n_{i-1,j,k}}{2},\\
u^n_{i+1/2,j,k} &= \frac{u^n_{i+1,j,k} + u^n_{i,j,k}}{2}, \qquad u^n_{i-1/2,j,k} = \frac{u^n_{i,j,k} + u^n_{i-1,j,k}}{2},\\
v^n_{i+1/2,j,k} &= \frac{v^n_{i+1,j,k} + v^n_{i,j,k}}{2}, \qquad v^n_{i-1/2,j,k} = \frac{v^n_{i,j,k} + v^n_{i-1,j,k}}{2},\\
w^n_{i+1/2,j,k} &= \frac{w^n_{i+1,j,k} + w^n_{i,j,k}}{2}, \qquad w^n_{i-1/2,j,k} = \frac{w^n_{i,j,k} + w^n_{i-1,j,k}}{2}
\end{aligned}
\tag{1.6}
$$

and similar formulas are used to calculate the values $p^n_{i,j+1/2,k}$, $p^n_{i,j,k+1/2}$, $\dots$, $w^n_{i,j-1/2,k}$, $w^n_{i,j,k-1/2}$, which determine the average values pressure and velocities from (1.3) on the corresponding boundaries of the cell with the number i, j, k.

At the Lagrangian stage, when passing from the time layer n to layer $n+1$, the intermediate values of velocity (1.4) are used to calculate the mass fluxes $M^n_{i+1/2,j,k}$, $M^n_{i-1/2,j,k}$, $M^n_{i,j+1/2,k}$, $M^n_{i,j-1/2,k}$, $M^n_{i,j,k+1/2}$ and $M^n_{i,j,k-1/2}$ through the boundaries of the cell with the number i, j, k by the formulas

$$
\begin{aligned}
M^n_{i+1/2,j,k} &= \bar\rho^n_{i+1/2,j,k}\bar u^n_{i+1/2,j,k}\Delta y\Delta z\Delta t,\\
M^n_{i-1/2,j,k} &= \bar\rho^n_{i-1/2,j,k}\bar u^n_{i-1/2,j,k}\Delta y\Delta z\Delta t,\\
M^n_{i,j+1/2,k} &= \bar\rho^n_{i,j+1/2,k}\bar v^n_{i,j+1/2,k}\Delta x\Delta z\Delta t,\\
M^n_{i,j-1/2,k} &= \bar\rho^n_{i,j-1/2,k}\bar v^n_{i,j-1/2,k}\Delta x\Delta z\Delta t,\\
M^n_{i,j,k+1/2} &= \bar\rho^n_{i,j,k+1/2}\bar w^n_{i,j,k+1/2}\Delta x\Delta y\Delta t,\\
M^n_{i,j,k-1/2} &= \bar\rho^n_{i,j,k-1/2}\bar w^n_{i,j,k-1/2}\Delta x\Delta y\Delta t,
\end{aligned}
\tag{1.7}
$$

where the average values $\bar u^n_{i+1/2,j,k}$, $\bar u^n_{i-1/2,j,k}$, $\bar v^n_{i,j+1/2,k}$, $\bar v^n_{i,j-1/2,k}$, $\dots$, $\bar w^n_{i,j,k-1/2}$ are calculated by formulas similar to (1.6) through the intermediate velocities from (1.4), and the intermediate density fluxes are calculated by the following formulas

$$
\begin{aligned}
\bar\rho^n_{i+1/2,j,k} &= \begin{cases} \rho^n_{i,j,k}, & \text{if} \quad \bar u^n_{i+1/2,j,k} \ge 0,\\ \rho^n_{i+1,j,k}, & \text{if} \quad \bar u^n_{i+1/2,j,k} < 0, \end{cases}\\
\bar\rho^n_{i-1/2,j,k} &= \begin{cases} \rho^n_{i-1,j,k}, & \text{if} \quad \bar u^n_{i-1/2,j,k} \ge 0,\\ \rho^n_{i,j,k}, & \text{if} \quad \bar u^n_{i-1/2,j,k} < 0, \end{cases}\\
\bar\rho^n_{i,j+1/2,k} &= \begin{cases} \rho^n_{i,j,k}, & \text{if} \quad \bar v^n_{i,j+1/2,k} \ge 0,\\ \rho^n_{i,j+1,k}, & \text{if} \quad \bar v^n_{i,j+1/2,k} < 0. \end{cases}
\end{aligned}
\tag{1.8}
$$

Thus, in order to calculate intermediate flows density (1.8), which are used to

calculate the mass fluxes (1.7) through the cell boundaries with the number i, j, k, the directions of the velocity flux $\bar{u}^n_{i+1/2,j,k}$, $\bar{u}^n_{i-1/2,j,k}$, $\bar{v}^n_{i,j+1/2,k}$ are taken into account. The similar directions of the velocity flux $\bar{v}^n_{i,j-1/2,k}$, $\bar{w}^n_{i,j,k+1/2}$, $\bar{w}^n_{i,j,k-1/2}$ are used to calculate the remaining intermediate density fluxes by the formulas

$$\bar{\rho}^n_{i,j-1/2,k} = \begin{cases} \rho^n_{i,j-1,k}, & \text{if} \quad \bar{v}^n_{i,j-1/2,k} \geq 0, \\ \rho^n_{i,j,k}, & \text{if} \quad \bar{v}^n_{i,j-1/2,k} < 0, \end{cases}$$

$$\bar{\rho}^n_{i,j,k+1/2} = \begin{cases} \rho^n_{i,j,k}, & \text{if} \quad \overline{w}^n_{i,j,k+1/2} \geq 0, \\ \rho^n_{i,j,k+1}, & \text{if} \quad \overline{w}^n_{i,j,k+1/2} < 0, \end{cases} \tag{1.9}$$

$$\bar{\rho}^n_{i,j,k-1/2} = \begin{cases} \rho^n_{i,j,k-1}, & \text{if} \quad \overline{w}^n_{i,j,k-1/2} \geq 0, \\ \rho^n_{i,j,k}, & \text{if} \quad \overline{w}^n_{i,j,k-1/2} < 0. \end{cases}$$

These values (1.8) and (1.9) approximate the mass transfer by the divergence term from the mass conservation law that is expressed by the first equation in (1.2). Calculated formulas (1.5) and (1.6) are actually a difference approximation for the remaining equations from (1.2), which express the laws of conservation of momentum and energy, under the assumption that the divergence terms are equal to zero. Accordingly, the approximation of such divergence terms, which determine the transfer of momenta and energy, is performed at the final stage when passing from the time layer n to layer $n+1$.

At the final stage, the mass flows (1.7) and speed and energy flows are used to calculate the final values of the parameters

$$\rho^{n+1}_{ijk}, \quad u^{n+1}_{ijk}, \quad v^{n+1}_{ijk}, \quad w^{n+1}_{ijk}, \quad p^{n+1}_{ijk}, \quad E^{n+1}_{ijk}, \tag{1.10}$$

which determine the fluid dynamics on the $n+1$ time layer for the cell with the number i, j, k by the formulas

$$\rho^{n+1}_{ijk} = \rho^n_{ijk} -$$

$$- O^{-1}_{ijk} \Big(M^n_{i+1/2,j,k} - M^n_{i-1/2,j,k} + M^n_{i,j+1/2,k} -$$

$$- M^n_{i,j-1/2,k} + M^n_{i,j,k+1/2} - M^n_{i,j,k-1/2} \Big),$$

$$u^{n+1}_{ijk} = \frac{\rho^n_{ijk}}{\rho^{n+1}_{ijk}} u^n_{ijk} - \tag{1.11}$$

$$- O^{-1}_{ijk} \Big(\bar{u}^n_{i+1/2,j,k} M^n_{i+1/2,j,k} - \bar{u}^n_{i-1/2,j,k} M^n_{i-1/2,j,k} + \bar{u}^n_{i,j+1/2,k} M^n_{i,j+1/2,k} -$$

$$- \bar{u}^n_{i,j-1/2,k} M^n_{i,j-1/2,k} + \bar{u}^n_{i,j,k+1/2} M^n_{i,j,k+1/2} - \bar{u}^n_{i,j,k-1/2} M^n_{i,j,k-1/2} \Big),$$

where $O_{ijk} = \Delta x \Delta y \Delta z$ denotes the cell volume and the average intermediate velocity (velocity fluxes) $\bar{u}^n_{i+1/2,j,k}$, $\bar{u}^n_{i-1/2,j,k}, \ldots, \bar{u}^n_{i,j,k-1/2}$, are calculated by formulas similar to (1.8) and (1.9), in which ρ^n_{ijk} should be replaced by u^n_{ijk}. Similar formulas are used to calculate the other values in (1.10) by the formulas

$$v^{n+1}_{ijk} = \frac{\rho^n_{ijk}}{\rho^{n+1}_{ijk}}\, v^n_{ijk} -$$

$$- O^{-1}_{ijk} \Big(\bar{v}^n_{i+1/2,j,k} M^n_{i+1/2,j,k} - \bar{v}^n_{i-1/2,j,k} M^n_{i-1/2,j,k} + \bar{v}^n_{i,j+1/2,k} M^n_{i,j+1/2,k} -$$

$$- \bar{v}^n_{i,j-1/2,k} M^n_{i,j-1/2,k} + \bar{v}^n_{i,j,k+1/2} M^n_{i,j,k+1/2} - \bar{v}^n_{i,j,k-1/2} M^n_{i,j,k-1/2} \Big),$$

$$w^{n+1}_{ijk} = \frac{\rho^n_{ijk}}{\rho^{n+1}_{ijk}}\, w^n_{ijk} - \tag{1.12}$$

$$- O^{-1}_{ijk} \Big(\bar{w}^n_{i+1/2,j,k} M^n_{i+1/2,j,k} - \bar{w}^n_{i-1/2,j,k} M^n_{i-1/2,j,k} + \bar{w}^n_{i,j+1/2,k} M^n_{i,j+1/2,k} -$$

$$- \bar{w}^n_{i,j-1/2,k} M^n_{i,j-1/2,k} + \bar{w}^n_{i,j,k+1/2} M^n_{i,j,k+1/2} - \bar{w}^n_{i,j,k-1/2} M^n_{i,j,k-1/2} \Big),$$

$$E^{n+1}_{ijk} = \frac{\rho^n_{ijk}}{\rho^{n+1}_{ijk}}\, E^n_{ijk} -$$

$$- O^{-1}_{ijk} \Big(\bar{E}^n_{i+1/2,j,k} M^n_{i+1/2,j,k} - \bar{E}^n_{i-1/2,j,k} M^n_{i-1/2,j,k} + \bar{E}^n_{i,j+1/2,k} M^n_{i,j+1/2,k} -$$

$$- \bar{E}^n_{i,j-1/2,k} M^n_{i,j-1/2,k} + \bar{E}^n_{i,j,k+1/2} M^n_{i,j,k+1/2} - \bar{E}^n_{i,j,k-1/2} M^n_{i,j,k-1/2} \Big),$$

where the average intermediate velocities and energy (velocities and energy fluxes) $\bar{v}^n_{i+1/2,j,k}$, $\bar{v}^n_{i-1/2,j,k}, \ldots, \bar{E}^n_{i,j,k-1/2}$, are calculated also by formulas similar to (1.8) and (1.9), in which ρ^n_{ijk} should be replaced by v^n_{ijk}, w^n_{ijk} or E^n_{ijk} respectively.

The specific types of the liquids or gases under consideration are determined in this method through the definition of the form of the equation of state, which can be represented as $p = p(\rho, E)$ or

$$p = p(\rho, J), \tag{1.13}$$

where $J = E - W^2/2$ denotes the internal energy. This formula allows to calculate p^{n+1}_{ijk} by values $\rho^{n+1}_{ijk}, u^{n+1}_{ijk}, v^{n+1}_{ijk}, w^{n+1}_{ijk}, E^{n+1}_{ijk}$ and complete the description of the transition from the time layer n to layer $n+1$.

To take into account the boundary conditions in the calculation process, the region Ω occupied by the fluid is surrounded by a system of fictitious cells [3], in which the values of parameters (1.3) are determined so that on the boundary $\partial\Omega$ suitable boundary conditions were satisfied within the accepted accuracy.

Therefore, the discrete conservation laws are faithful within the accepted

accuracy. For example, total mass of the fluid under consideration is saved at every time step of such approximation. Moreover, the mass sources may be induced by boundary conditions and external forces that leads to corresponding modifications of conservation laws in (1.1) and on the approximate level also. The momentums and energy transports are modeling in similar manners by the averaging the intermediate velocities and energy on cell boundaries. Thus, large particles method is effective enough for numerical computing, since the approximations are rationale from physical and mathematical point of view and conservation laws are correct on the discrete levels during the courses of corresponding numerical simulations.

1.2 The particle-in-cell method

The time approximation in the particle-in-cell method is also natural. Calculations are carried out step by step with a sufficiently small time interval Δt, starting from a given initial configuration of the liquid under consideration.

Spatial discretization in this method is more complex and takes into account the dynamics of motion of fluid particles. The domain $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, occupied by the liquid, is divided into small cells, for example, with uniform steps $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ in spatial variables as in the large particle method. Each such cell, as usual, is assigned the number i, j, k and the values of density, velocities and energy refer to the center of the cell and are denoted, respectively, as

$$\rho^n_{ijk}, \quad u^n_{ijk}, \quad v^n_{ijk}, \quad w^n_{ijk}, \quad E^n_{ijk}, \tag{1.14}$$

where the subscript n indicates the time step number as before.

The liquid filling each of these cells is considered as a collection of several particles or drops (which can also be considered as «molecules» or, more precisely, «computational molecules», since the size of such particles is much larger than the size of real liquid molecules). Each of these particles is assigned coordinates, mass, volume and full energy

$$x^n_s, \quad y^n_s, \quad z^n_s, \quad m^n_s, \quad o^n_s, \quad e^n_s, \tag{1.15}$$

which are specified at an initial moment. The subscript s in these notations corresponds to the particle number and varies from one to S, where S denotes the number of all particles that fill the considered domain Ω. In addition, the velocities and total energy $u^0_{ijk}, v^0_{ijk}, w^0_{ijk}$ and E^0_{ijk} from (1.14) are also determined for each cell at the initial moment of time. The density ρ^n_{ijk} for the cell with the number i, j, k is calculated by the formula

$$\rho^n_{ijk} = O^{-1}_{ijk} \sum_{s \in \{ijk\}} m^n_s, \tag{1.16}$$

in particular, for $n = 0$, where the summation is carried out only over those particles that are in the cell i, j, k at time $n\Delta t$. Thus, it is possible to calculate the pressure p_{ijk}^n according to the formula (1.13).

For the calculation by the particles-in-cells method for a homogeneous fluid, it is usually assumed that the mass m_s^n and the volume o_s^n of the considered particles do not depend on n and s. Thus, this method uses a discrete model of a continuous medium, and the space occupied by the fluid is divided by a grid of fixed cells. Inside such cells, a continuous medium is represented by particles, each of which carries a fixed mass of liquid according to [2] and [3].

This approach takes advantage of the Lagrange and Euler concepts when considering fluid dynamics, since the calculations use a Lagrangian coordinate system, modeled by particles, superimposed on a fixed Euler grid. This is the reason for the high efficiency of the particle-in-cell method, and with such an approximation, the total mass of particles is preserved in the process of calculations at each time step, which follows from definition (1.16), that actually expresses the law of conservation of fluid mass during the development of dynamics.

The corresponding time step for modeling the motion of the considered homogeneous liquid by the particles-in-cells method, as in the large particles method, is divided into three stages (Euler, Lagrangian and final stages according to [2] and [3]) so that discrete conservation laws are fulfilled within the framework of the accepted accuracy of calculations determined by the quantities $\Delta x, \Delta y, \Delta z$, Δt and the number of all particles S.

At the first stage of each time step, using the values from (1.14) and (1.16), the intermediate flow parameters defined in (1.4) are calculated by formulas (1.5) and (1.6). Thus, at this stage, it is assumed that there is no particle mass flux through the boundaries of the Euler cells, which determines the Euler stage of the considered approximation, that are corresponded to the transfer of moments and energy in each cell, determined by the pressure forces in accordance with the equations of moments and energy from (1.1).

At the second stage, the motion of the considered particles under the action of the calculated moments is taken into account, which corresponds to the Lagrangian stage of this approximation for the mass conservation equation. At this stage, the movement of particles for the time Δt is modeled (as shown in the figure) and the mass fluxes across the boundaries of the Euler cells are calculated.

The new particle coordinates with the number s are calculated by the formulas

$$x_s^{n+1} = x_s^n + u_s^n \Delta t, \qquad y_s^{n+1} = y_s^n + v_s^n \Delta t, \qquad z_s^{n+1} = z_s^n + w_s^n \Delta t, \qquad (1.17)$$

where the velocities u_s^n, v_s^n, w_s^n of the particle under consideration are calculated from the intermediate values of the velocities from (1.4) using linear interpolation over cells lying near the cell with number i, j, k.

Using the comparison of the new coordinates of particles (1.17) with the coordinates from (1.15), it is determined whether a particular particle has remained in the previous cell or has passed into the neighboring one and into which one. Based on such a comparison, the mass transfer from a specific cell to neighboring cells is modeled, and the mass fluxes through the corresponding grid boundaries are calculated by the formulas

$$
\begin{aligned}
M^n_{i+1/2,j,k} &= (\Sigma_{in}\, m^n_s)_{i+1/2,j,k} - (\Sigma_{out}\, m^n_s)_{i+1/2,j,k}\,,\\
M^n_{i-1/2,j,k} &= (\Sigma_{in}\, m^n_s)_{i-1/2,j,k} - (\Sigma_{out}\, m^n_s)_{i-1/2,j,k}\,,\\
M^n_{i,j+1/2,k} &= (\Sigma_{in}\, m^n_s)_{i,j+1/2,k} - (\Sigma_{out}\, m^n_s)_{i,j+1/2,k}\,,\\
M^n_{i,j-1/2,k} &= (\Sigma_{in}\, m^n_s)_{i,j-1/2,k} - (\Sigma_{out}\, m^n_s)_{i,j-1/2,k}\,,\\
M^n_{i,j,k+1/2} &= (\Sigma_{in}\, m^n_s)_{i,j,k+1/2} - (\Sigma_{out}\, m^n_s)_{i,j,k+1/2}\,,\\
M^n_{i,j,k-1/2} &= (\Sigma_{in}\, m^n_s)_{i,j,k-1/2} - (\Sigma_{out}\, m^n_s)_{i,j,k-1/2}\,,
\end{aligned}
\tag{1.18}
$$

where Σ_{in} denotes the summation over all particles that have fallen in time Δt into the cell with the number i,j,k through the boundaries $i+1/2,j,k$, dots, $i,j,k-1/2$ and Σ_{out} denotes summation over all particles that have left in time Δt considered cell across the appropriate boundaries.

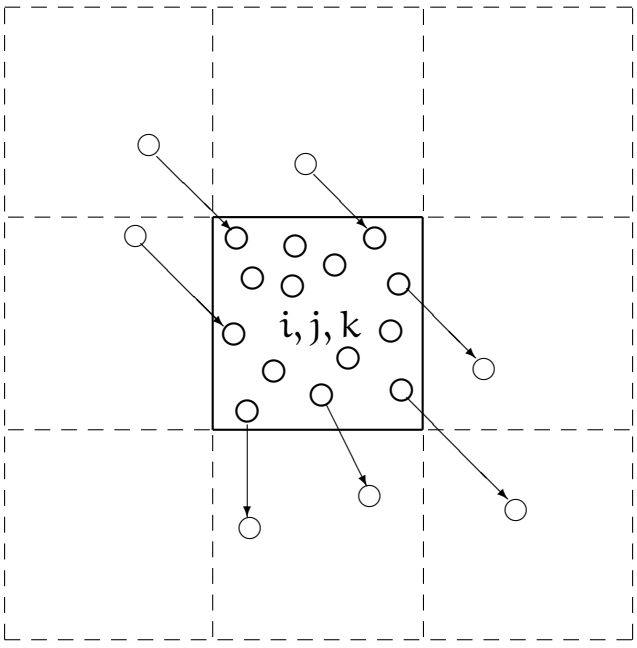

Fig. *Dynamics of particles in cells*

At the third stage, the final transfer of moments and energy is calculated, which is the final stage of the considered time step. At this stage, the equations of moments and energy from (1.2) are approximated without taking into account pressure forces, which is simulation for the transfer of moments and energy under the action of dynamic forces of inertia from a specific cell to neighboring cells. In this case, it is assumed that passing from one cell to another, the particle transfers its values of mass, momentum and energy. Thus, based on conservation laws (1.1) by formulas (1.11) and (1.12) using values from (1.14), (1.16), and (1.18), the final values of flow parameters (1.10) into a new time layer are calculated.

The considered approximation is rational from a physical and mathematical point of view, since the conservation laws are fulfilled at a discrete level during all stages of calculations. Therefore, the particle-in-cell method is quite effective and is often used to simulate fluid dynamics under the action of external forces and influences caused by boundary conditions.

A significant problem with this method is the need to consider a sufficiently large number of particles used in the calculations. Indeed, the total number of cells under consideration should be large enough to guarantee an acceptable approximation accuracy for Euler cells, and the number of particles in each of these cells should also be large for a sufficient approximation accuracy for Lagrange particles. In addition, each of these particles is determined by mass, volume, energy and coordinates in space. Therefore, it is necessary to consider a sufficiently large amount of data and this data is recalculated at each time step. To solve this problem of computer processing of a large amount of data, the large particles method was developed. The large particles method is later introduced as the averaging of the particle-in-cell method over Euler cells in a sense. In this method, density, velosities and energy are specified for each such cell at a given moment. But the volume of the particle now coincides with the volume of the cell. Therefore, the mass and energy of a particle are determined by the same quantities. Thus, the data is not that massive in the method.

1.3 Modeling of heterogeneous fluids dynamics

Let us now consider a combination of the presented methods, which was developed for modeling the dynamics of a base fluid with inclusions of another fluid. The time approximation in such a combined method is determined as in the considered methods, and spatial sampling is defined as follows. The domain $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, occupied by a heterogeneous fluid, is divided into small cells, for example, with uniform steps $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ over spatial variables. Each such cell is assigned the number i, j, k as in the cases considered.

The base fluid filling each of these cells is considered as a «large» particle, and

inclusions are considered as a collection of «small» particles located in each such cell. The density, velocities, pressure, and energy values assigned to large particles refer to the center of the cell and are denoted

$$\widehat{\rho}_{ijk}^{n}, \quad \widehat{u}_{ijk}^{n}, \quad \widehat{v}_{ijk}^{n}, \quad \widehat{w}_{ijk}^{n}, \quad \widehat{p}_{ijk}^{n}, \quad \widehat{E}_{ijk}^{n}. \tag{1.19}$$

These values are concretized at the initial time for $n = 0$. The system of inclusions is renumbered, for example, from one to S and is modeled by small particles. Small particles are assigned coordinates in space, mass, volume and energy from (1.15) and the pressure $\widetilde{p}_{s}^{n}$, which are concretized also at the initial time.

In addition, each such cell is assigned the values of density, velocities, and energy related to the center of the cell and denoted as in (1.14). It is assumed that

$$u_{ijk}^{n} = \widehat{u}_{ijk}^{n}, \quad v_{ijk}^{n} = \widehat{v}_{ijk}^{n}, \quad w_{ijk}^{n} = \widehat{w}_{ijk}^{n}, \quad p_{ijk}^{n} = \widehat{p}_{ijk}^{n} = \widetilde{p}_{s}^{n} \tag{1.20}$$

for small particles with numbers s, which are in the cell with number i, j, k at the considered moment of time $n\Delta t$. As the density and internal energy of the cell i, j, k, everyone can choose the values averaged over the components of this cell

$$\rho_{ijk}^{n} = \frac{\widehat{\rho}_{ijk}^{n}\widehat{O}_{ijk}^{n} + \widetilde{\rho}_{ijk}^{n}\widetilde{O}_{ijk}^{n}}{O_{ijk}}, \quad J_{ijk}^{n} = \frac{\widehat{\rho}_{ijk}^{n}\widehat{J}_{ijk}^{n}\widehat{O}_{ijk}^{n} + \widetilde{\rho}_{ijk}^{n}\widetilde{J}_{ijk}^{n}\widetilde{O}_{ijk}^{n}}{\rho_{ijk}^{n}O_{ijk}}, \tag{1.21}$$

where $\widehat{O}_{ijk}^{n}$ and $\widetilde{O}_{ijk}^{n}$ are denote volumes of carrier fluid and inclusions and

$$O_{ijk} = \widehat{O}_{ijk}^{n} + \widetilde{O}_{ijk}^{n}$$

is the total volume of the cell numbered by i, j, k. Moreover, $\widehat{J}_{ijk}^{n}$ and $\widetilde{J}_{ijk}^{n}$ are denote the internal energies of the base fluid and inclusions at the time moment and the density $\widetilde{\rho}_{ijk}^{n}$ of small particles in this cell is calculated by formula (1.16).

The corresponding time step for modeling the motion of a heterogeneous fluid is divided into three stages, which are supplemented by a preliminary recalculation of parameters. At this preliminary stage, the internal energy of large and small particles in each cell is distributed between these particles so that the pressure in this cell is equal. Such a redistribution of energy in the cell is natural, since a large particle induces some pressure through its equation of state, small particles induce some pressure through their equations of state, and the coincidence of these pressures is characteristic of heterogeneous liquids. It is assumed here that the equations of state (1.13) of the considered liquids have the form

$$p = P(\rho) + \rho\Gamma(\rho)J,$$

where $P(\rho)$ and $\Gamma(\rho)$ are denoted the elastic component of the state equation and the Gruneisen coefficient for the corresponding fluid or material [1].

Therefore, the equality of pressures in large and small particles in the cell under consideration is written in the form

$$\widehat{P}(\widehat{\rho}_{ijk}^{n}) + \widehat{\rho}_{ijk}^{n}\widehat{\Gamma}(\widehat{\rho}_{ijk}^{n})\widehat{J}_{ijk}^{n} = \widetilde{P}(\widetilde{\rho}_{ijk}^{n}) + \widetilde{\rho}_{ijk}^{n}\widetilde{\Gamma}(\widetilde{\rho}_{ijk}^{n})\widetilde{J}_{ijk}^{n}. \tag{1.22}$$

The second equality in (1.21) and (1.22) can be viewed as system of equations for $\widehat{J}_{ijk}^{n}$ and $\widetilde{J}_{ijk}^{n}$. The determinant of this system is given by the formula

$$\widehat{\rho}_{ijk}^{n}\widehat{O}_{ijk}^{n}(\rho_{ijk}^{n}O_{ijk})^{-1}\widetilde{\rho}_{ijk}^{n}\widetilde{\Gamma}(\widetilde{\rho}_{ijk}^{n}) + \widetilde{\rho}_{ijk}^{n}\widetilde{O}_{ijk}^{n}(\rho_{ijk}^{n}O_{ijk})^{-1}\widehat{\rho}_{ijk}^{n}\widehat{\Gamma}(\widehat{\rho}_{ijk}^{n}).$$

Thus, under natural conditions on the Gruneisen coefficients, a solution to this system can be found. It is possible to obtain directly for $\widehat{J}_{ijk}^{n}$ the equality

$$\widehat{J}_{ijk}^{n} = \left(\rho_{ijk}^{n}O_{ijk}J_{ijk}^{n} - \widetilde{O}_{ijk}^{n}\left(\widehat{P}(\widehat{\rho}_{ijk}^{n}) - \widetilde{P}(\widetilde{\rho}_{ijk}^{n})\right)\widetilde{\Gamma}(\widetilde{\rho}_{ijk}^{n})^{-1}\right)\left(\widehat{V}_{ijk}^{n}\right)^{-1},$$

where

$$\widehat{V}_{ijk}^{n} = \widehat{\rho}_{ijk}^{n}\left(\widehat{O}_{ijk}^{n} + \widetilde{O}_{ijk}^{n}\widehat{\Gamma}(\widehat{\rho}_{ijk}^{n})\,\widetilde{\Gamma}(\widetilde{\rho}_{ijk}^{n})^{-1}\right)$$

and similar equalities are satisfied for $\widetilde{J}_{ijk}^{n}$ with the relevant notation changes.

Thus, all values from (1.15), (1.19), and (1.20) are determined, where

$$p_{ijk}^{n} = \widehat{P}(\widehat{\rho}_{ijk}^{n}) + \widehat{\rho}_{ijk}^{n}\widehat{\Gamma}(\widehat{\rho}_{ijk}^{n})\widehat{J}_{ijk}^{n}\,.$$

Further calculations of this combinational method are carried out as follows. At the Euler stage, the values from (12) are used to determine intermediate values (1.4) by formulas (1.5) and (1.6). At the Lagrangian stage, the motion of the considered particles under the action of the calculated moments is taken into account. At this stage, the movement of particles in time Δt is modeled by calculating new coordinates of the particle with the number s according to formulas (1.17). Further, the fluxes of mass through the boundaries of the cells are calculated as the sum of fluxes of large particles calculated by formulas (1.7), (1.8), and (1.9), and fluxes of small particles that are calculated by formulas (1.18).

At the final stage, the equations of moments and energy in (1.2) are approximated without taking into account pressure forces, it is simulation for the transfer of moments and energy under the dynamic forces action for inertia from a specific cell to neighboring cells. Therefore, using formulas (1.11) and (1.12) through the values from (1.14), (1.16), (1.7), and (1.18), the final values of the flow parameters (1.10) at a new time instant are calculated, this is correspondence to the fulfillment of conservation laws (1.1) at the discrete level in the process of all stages of calculations in modeling the dynamics of the considered heterogeneous fluid. This completes the description of all the steps. The method is promising for numerical modeling of diffusion and absorption processes in heterogeneous fluids and gases.

1.4 Modeling of fluid dynamics in porous media

The presented combinational method was developed for numerical simulation of fast physical processes. Such processes take place within several tens of microseconds. Therefore, the effects of viscosity were not significant enough to simulate such processes. However, the presented method is also relevant for modeling processes in which the effects of viscosity are significant. Such processes are usually not fast-paced. In addition, when modeling and fast-flowing processes it is customary to introduce «artificial» viscosity to improve the stability of computational algorithms [3], which can also be considered as a simulation of fluid dynamics taking into account the effects of viscosity. Viscosity effects are also relevant when simulating fluid dynamics in porous media. Let us emphasize here that when freezing particles in the presented method, everyone receives a model of the motion of a liquid in a porous medium with a suitable choice of particle sizes.

The laws of conservation of mass, moments and energy for viscous liquids can be represented [3, 22] in the following differential form

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho W) &= 0, \\ \frac{\partial \rho W}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho W \otimes W) + \nabla p &= \\ = \operatorname{div}(\mu \nabla W) + \nabla((\mu + \lambda)\operatorname{div} W), & \\ \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho W E) + \operatorname{div}(pW) &= \operatorname{div}(\tau \cdot W) + \operatorname{div}(k \nabla \Theta), \end{aligned} \tag{1.23}$$

where the notations from (1.2) are used and Θ is the notation for the temperature, which is usually proportional to the internal energy. In addition, k is the coefficient of thermal conductivity, μ and λ are the coefficients of dynamic and bulk viscosity, which are determined by the type of fluid and satisfy the inequalities

$$\kappa > 0, \quad \mu > 0, \quad 2\mu + 3\lambda \geq 0.$$

It is usually assumed [22] that the equality $\lambda = -(2/3)\mu$ and the Stokes law of state are satisfied, according to which

$$\tau = 2\mu D - ((2/3)\mu \operatorname{div} W)I,$$

where I is the unit tensor and the strain rate tensor D are defined as the half-sum of the tensor ∇W and the transposed tensor $(\nabla W)^*$. The laws of conservation of mass, moments and energy for viscous fluids are given in integral form in [22].

The system of equations (1.23) differs from the system of equations (1.2) only by the presence of additional terms due to viscous and thermal effects. Thus,

all the basic relationships of the presented method can be preserved, taking into account additional terms at the Euler stage, that will only lead to the addition of suitable difference relations to the difference approximations (1.5). For example, the relations from (1.5) can be replaced taking into account the viscosity and thermal effects by the following difference explicit-implicit approximation

$$\bar{u}^n_{ijk} - \frac{\bar{u}^n_{i+1,j,k} - 2\,\bar{u}^n_{i,j,k} + \bar{u}^n_{i-1,j,k}}{\rho^n_{ijk} 3\,(\Delta x)^2}\,4\mu\Delta t - \frac{\bar{u}^n_{i,j+1,k} - 2\,\bar{u}^n_{i,j,k} + \bar{u}^n_{i,j-1,k}}{\rho^n_{ijk}\,(\Delta y)^2}\,\mu\Delta t -$$

$$- \frac{\bar{u}^n_{i,j,k+1} - 2\,\bar{u}^n_{i,j,k} + \bar{u}^n_{i,j,k-1}}{\rho^n_{ijk}\,(\Delta z)^2}\,\mu\Delta t = u^n_{ijk} - \frac{p^n_{i+1,j,k} - p^n_{i-1,j,k}}{\rho^n_{ijk} 2\,\Delta x}\,\Delta t +$$

$$+ \frac{\nu^n_{i+1,j+1,k} - \nu^n_{i+1,j-1,k} - \nu^n_{i-1,j+1,k} + \nu^n_{i-1,j-1,k}}{\rho^n_{ijk} 3\,\Delta x \Delta y}\,\mu\Delta t +$$

$$+ \frac{w^n_{i+1,j,k+1} - w^n_{i+1,j,k-1} - w^n_{i-1,j,k+1} + w^n_{i-1,j,k-1}}{\rho^n_{ijk} 3\,\Delta x \Delta z}\,\mu\Delta t\,,$$

$$\bar{v}^n_{ijk} - \frac{\bar{v}^n_{i+1,j,k} - 2\,\bar{v}^n_{i,j,k} + \bar{v}^n_{i-1,j,k}}{\rho^n_{ijk}\,(\Delta x)^2}\,\mu\Delta t - \frac{\bar{v}^n_{i,j+1,k} - 2\,\bar{v}^n_{i,j,k} + \bar{v}^n_{i,j-1,k}}{\rho^n_{ijk} 3\,(\Delta y)^2}\,4\mu\Delta t -$$

$$- \frac{\bar{v}^n_{i,j,k+1} - 2\,\bar{v}^n_{i,j,k} + \bar{v}^n_{i,j,k-1}}{\rho^n_{ijk}\,(\Delta z)^2}\,\mu\Delta t = \nu^n_{ijk} - \frac{p^n_{i,j+1,k} - p^n_{i,j-1,k}}{\rho^n_{ijk} 2\,\Delta y}\,\Delta t +$$

$$+ \frac{u^n_{i+1,j+1,k} - u^n_{i-1,j+1,k} - u^n_{i+1,j-1,k} + u^n_{i-1,j-1,k}}{\rho^n_{ijk} 3\,\Delta y \Delta x}\,\mu\Delta t +$$

$$+ \frac{w^n_{i,j+1,k+1} - w^n_{i,j+1,k-1} - w^n_{i,j-1,k+1} + w^n_{i,j-1,k-1}}{\rho^n_{ijk} 3\,\Delta y \Delta z}\,\mu\Delta t\,,$$

$$\bar{w}^n_{ijk} - \frac{\bar{w}^n_{i+1,j,k} - 2\,\bar{w}^n_{i,j,k} + \bar{w}^n_{i-1,j,k}}{\rho^n_{ijk}\,(\Delta x)^2}\,\mu\Delta t - \frac{\bar{w}^n_{i,j+1,k} - 2\,\bar{w}^n_{i,j,k} + \bar{w}^n_{i,j-1,k}}{\rho^n_{ijk}\,(\Delta y)^2}\,\mu\Delta t -$$

$$- \frac{\bar{w}^n_{i,j,k+1} - 2\,\bar{w}^n_{i,j,k} + \bar{w}^n_{i,j,k-1}}{\rho^n_{ijk} 3\,(\Delta z)^2}\,4\mu\Delta t = w^n_{ijk} - \frac{p^n_{i,j,k+1} - p^n_{i,j,k-1}}{\rho^n_{ijk} 2\,\Delta z}\,\Delta t +$$

$$+ \frac{\nu u^n_{i+1,j,k+1} - u^n_{i-1,j,k+1} - u^n_{i+1,j,k-1} + u^n_{i-1,j,k-1}}{\rho^n_{ijk} 3\,\Delta z \Delta x}\,\mu\Delta t +$$

$$+ \frac{\nu^n_{i,j+1,k+1} - \nu^n_{i,j-1,k+1} - \nu^n_{i,j+1,k-1} + \nu^n_{i,j-1,k-1}}{\rho^n_{ijk} 3\,\Delta z \Delta y}\,\mu\Delta t\,,$$

where it is assumed that the coefficient μ is constant. If the coefficient is not constant, a more complex approximation should be used.

Similar changes should be made to the remaining ratio for $\bar{E}^n_{ijk}$ from (1.5) to take into account the viscous and thermal effects. The use of an explicit-implicit

scheme in the case under consideration is natural, since the stability conditions for explicit schemes are rather stringent, for example, according to [3] and [5]. Of course, it is more convenient to represent the last equation in (1.23) in the form

$$\frac{\partial \rho c\,\Theta}{\partial t} - \operatorname{div}(k\nabla\Theta) = \operatorname{div}(\tau\cdot W) - \operatorname{div}(\rho W E) - \operatorname{div}(pW) - (\rho K)'_t,$$

since the internal energy can be represented in the form $J = c\,\Theta$, where c is the specific heat capacity at constant volume and $K = E - J$ is the kinetic energy in the following form $K = u^2/2 + v^2/2 + w^2/2$. Using such a representation, it is easy to write an explicit-implicit approximation for the last equation from (1.23), which should be taken into account in (1.5).

Therefore, practically without changing the stages of the presented method, with the exception of the Eulerian one, it is possible to take into account the viscous and thermal effects when modeling the processes under consideration. At the Euler stage, the above relations lead to an explicit-implicit scheme and the need to invert the difference operator for this approximation. Well-known splitting methods can be used to invert such an operator. In addition, to simulate the dynamics of fluids in porous media, it is necessary to freeze particles in cells that have suitable sizes, for example, setting $u_s^n = v_s^n = w_s^n = 0$ in (1.17).

Thus, a new method of modeling for heterogeneous fluid dynamics processes is presented. The method is based on relevant approximation of conservation laws for masses, momentums, and energies in integral and differential forms. The approximation is natural and numerical simulations are realized as direct computer experiments. The method seems to be much more adequate to the physical and mathematical essence of the dynamics because conservation laws are fulfilled on the discrete level with a suitable degree of approximation.

The combination of Harlow particle-in-cell method and Belotserkovskiy large particles method is used for computing by the method simulation. The method was announced in [19–21] and can also be used for modeling processes in which phase transitions is taken into account.

Розділ 2

Збіжність проксимального алгоритму для задачі дворівневої опуклої мінімізації

Дворівнева задача опуклої оптимізації полягає у мінімізації першої опуклої функції на множині мінімумів другої опуклої функції. Ця постановка має багато застосувань, але неявні обмеження, що породжені внутрішньою задачею ускладнюють отримання умов оптимальності та побудову методів. Подібним чином формулюються й n-рівневі задачі, джерелом яких стали питання оптимізації за послідовно заданими критеріями (лексикографічна оптимізація).

Крім того, в теорії некоректних задач є популярним такий підхід до розв'язання задач з неєдиним розв'язком. Розглядають певну родину збурених задач, однозначно та коректно розв'язних. Частинний розв'язок вихідної задачі одержують як границю розв'язків збурених задач при зменшенні збурень. Знайдені так частинні розв'язки задовольняють певним додатковим умовам, наприклад, мінімальність норми нормального розв'язку оптимізаційної задачі.

Методи, що подібні до схем методу штрафу чи регуляризації, для цих задач розробляли ще в 1970-х (В. В. Подіновський, І. І. Єрьомін). У 1990-х знову з'явився інтерес до цих задач. Почали пропонуватись нові методи.

Нехай H — гільбертовий простір, f_1, f_2 — задані на H власні опуклі напівнеперервні знизу функціонали. Розглянуто питання розв'язання дворівневої задачі мінімізації вигляду

$$f_2(x) \to \min, \quad x \in \operatorname{argmin} f_1,$$

за допомогою проксимального алгоритму

$$x_{n+1} = \operatorname{prox}_{\lambda_n (f_2 + \alpha_n f_1)} x_n.$$

У випадку сильної опуклості f_2 наведено теорему про сильну збіжність. При деяких метричних умовах на функціонал f_1 доведено теореми про слабку збіжність та слабку збіжність у розумінні Чезаро.

Розглянуто застосування до дворівневої опуклої задачі мінімізації альтернуючого проксимального алгоритму. При деяких метричних умовах на функціонал задачі першого рівня доведено теореми про сильну та слабку збіжність.

Зазначимо, що проксимальні методи останнім часом є лідерами серед обчислювально ефективних алгоритмів в Data Science. А одним з найбільш ефективних проксимальних методів є ADMM.

У роботі [1] запропоновано цікавий варіант багатоблокового ADMM з прискоренням Нестерова на кожній ітерації. Алгоритм застосовано для прогнозування виживаності онкологічних хворих (визначення найважливішого серед факторів, які впливають на тривалість життя після проведеної операції, а також прогнозування тривалості життя).

2.1 Дворівнева задача опуклої мінімізації

В оптимізації та теорії некоректних задач є популярним такий підхід до розв'язання задач з неєдиним розв'язком [24, 25]. Розглядають певну родину збурених задач, однозначно та коректно розв'язних. Частинний розв'язок вихідної задачі одержують як границю розв'язків збурених задач при зменшенні збурень. Знайдені так частинні розв'язки задовольняють певним додатковим умовам, наприклад, мінімальність норми нормального розв'язку оптимізаційної задачі.

Іншим джерелом задач вигляду

$$f_2(x) \to \min, \quad x \in \operatorname{argmin} f_1$$

є метод штрафів зняття обмежень [26, 27] та задачі оптимізації за послідовно заданними критеріями (лексикографічна, послідовна або багатоетапна оптимізація [28, 29]).

Останнім часом з'явились роботи по більш загальним задачам: послідовним варіаційним нерівностям [30–36] та послідовним задачам про нерухомі точки [37].

Розглянемо дворівневу задачу опуклої мінімізації в гільбертовому просторі. Ефективні методи розв'язання таких задач у скінченновимірній постановці запропоновані в [38, 39].

Нашою метою є дослідження збіжності схем вигляду

$$x_{n+1} = \operatorname{argmin}_{y \in H} \left\{ \lambda_n f_2(y) + \lambda_n \alpha_n f_1(y) + \frac{1}{2} \|y - x_n\|^2 \right\}.$$

При $\alpha_n = 0$ маємо проксимальний метод для задачі

$$f_2 \to \min,$$

збіжності різних варіантів якого присвячено багато робіт [40–45]. У роботі [45] доведено сильну збіжність методу

$$x_{n+1} = \operatorname{argmin}_{y \in H} \left\{ \alpha_n \|y\|^2 + f_1(y) + \frac{1}{2\lambda_n} \|y - x_n\|^2 \right\}$$

до нормального розв'язку задачі $f_1 \to \min$.

Основний результат такий: для опуклих напівнеперервних знизу функціоналів f_2 та опуклих напівнеперервних знизу функціоналів f_1, що задовольняють деякій метричній умові, доведено теореми збіжності наведеної схеми. У роботі використана техніка, розвинута в [46–51]. Усі необхідні відомості з нелінійного та опуклого аналізу наведено в книгах [52–56].

Перейдемо до точної постановки задачі.

Нехай H — дійсний простір Гільберта зі скалярним добутком $(\cdot,\cdot)$ та нормою $\|\cdot\|$. Нехай $f_1, f_2 : H \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ — власні опуклі напівнеперервні знизу функціонали. Припустимо, що

$$\operatorname{argmin} f_1 \neq \emptyset \quad \text{та} \quad \min f_1 = 0.$$

Множина $\operatorname{argmin} f_1$ — замкнена та опукла.

Розглянемо задачу

$$f_2(x) \to \min, \quad x \in \operatorname{argmin} f_1. \tag{2.1}$$

Припустимо, що $0 \in \operatorname{int}(\operatorname{dom} f_2 - \operatorname{argmin} f_1)$. Позначимо через C множину $\operatorname{argmin} f_1$, а через S множину розв'язків задачі (2.1). Задача (2.1) еквівалентна включенню

$$\text{знайти } x \in H: \ 0 \in \partial f_2(x) + N_C x,$$

де $N_C x$ — нормальный конус множини $C \subseteq H$ в точці $x \in H$, тобто

$$N_C x = \begin{cases} \{z \in H : \ (z, y - x) \leq 0 \ \ \forall y \in C\}, & \text{якщо } x \in C, \\ \emptyset, & \text{інакше.} \end{cases}$$

Нехай $g : H \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ — власний опуклий напівнеперервний знизу функціонал. Проксимальним оператором [57], асоційованим з g, називають оператор

$$H \ni x \mapsto \operatorname{prox}_g x = \operatorname{argmin}_{y \in H} \left(g(y) + \frac{1}{2} \|y - x\|^2 \right).$$

Для доведення збіжності алгоритму будемо використовувати наступні леми про числові послідовності та послідовності елементів гільбертових просторів.

Лема 2.1. *Нехай обмежена знизу послідовність* (a_n) *та послідовності невід'ємних чисел* (b_n) *і* (c_n) *такі, що* $a_{n+1} - a_n + b_n \le c_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n < +\infty$. *Тоді існує* $\lim_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R}$ *і* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < +\infty$.

Лема 2.2. *Нехай* H *— гільбертовий простір;* $F \subseteq H$ *— непорожня множина;* (x_n) *— послідовність точок* H. *Припустимо, що:*

1) усі слабкі часткові границі послідовності (x_n) *належать* F*;*

2) для всіх $y \in F$ *існує* $\lim_{n\to\infty} \|x_n - y\| \in \mathbb{R}$.

Тоді (x_n) *слабко збігається до деякої точки* $x \in F$.

Зауваження 2.1. Лема 2.2 [58] дозволяє доводити слабку збіжність послідовностей без апріорного знання границі.

2.2 Проксимальний алгоритм для дворівневої задачі

Нехай (λ_n), (α_n) — послідовності додатніх чисел.

Алгоритм 2.1. Обираємо $x_1 \in H$ та генеруємо послідовність елементів (x_n) за допомогою ітераційної схеми

$$x_{n+1} = \mathrm{prox}_{\lambda_n(f_2+\alpha_n f_1)} x_n.$$

Зауваження 2.2. При $\alpha_n = 1$ маємо класичний проксимальний метод для задачі $f_1 + f_2 \to \min$ [40–42].

Подальший план такий. Спочатку наводиться теорема сильної збіжність алгоритму для сильно опуклого функціоналу f_2. А далі вводиться певна метрична умова на функціонал f_1 (умова (A1)) та при її виконанні одержуються дві теореми про слабку збіжність.

В кінці розглянемо питання про слабку збіжність за Чезаро породжених алгоритмом послідовностей.

2.2.1 Сильна збіжність

У випадку сильної опуклості f_2 алгоритм 2.1 сильно збігається до єдиного розв'язку задачі (2.1). Наступна теорема отримана за допомогою незначної модифікації міркувань роботи [35].

Теорема 2.1. *Нехай функціонал f_2 сильно опуклий. Припустимо, що*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = +\infty, \ \lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0,$$
$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = +\infty, \ \liminf_{n\to\infty} \alpha_n\lambda_n > 0.$$

Тоді породжена алгоритмом 2.1 послідовність (x_n) сильно збігається до єдиного розв'язку задачі (2.1).

2.2.2 Основні нерівності

Перейдемо до вивчення поведінки алгоритму 2.1 у ситуації, коли функціонал f_2 не є сильно опуклим.

Припустимо, що

(A1) $\exists k > 0 : f_1(x) \geq k \cdot d_C^2(x) = k \cdot \min_{y\in C} \|x - y\|^2 \ \forall x \in H.$

З міркувань теорії двоїстості опуклих функціоналів [52, 53, 56] випливає такий факт [50].

Лема 2.3. *Нехай для f_1 виконується припущення (A1). Тоді для $z \in C$ і $w \in N_C z$ має місце нерівність*

$$(w, x) - f_1(x) - (w, z) \leq \frac{1}{4k} \|w\|^2 \ \ \forall x \in H.$$

Доведення. Оскільки

$$(w, x) - f_1(x) - (w, z) \leq f_1^*(w) - \sigma_C(w),$$

то достатньо довести оцінку

$$f_1^*(\cdot) - \sigma_C(\cdot) \leq \frac{1}{4k} \|\cdot\|^2.$$

Ця оцінка випливає із однорідності опорної функції σ_C, нерівності

$$f_1^*(\cdot) \leq \left(k \cdot d_C^2\right)^* (\cdot) = 2k \left(\frac{d_C^2}{2}\right)^* \left(\frac{\cdot}{2k}\right)$$

та рівності

$$\left(\frac{d_C^2}{2}\right)^* = \left(\frac{\|\cdot\|^2}{2} \oplus \chi_C\right)^* = \frac{\|\cdot\|^2}{2} + \sigma_C,$$

де χ_C — індикаторна функція множини C, $\oplus$ — операція інфімальної конволюції. □

Зауваження 2.3. Якщо припустити існування параметрів $k > 0$, $p > 1$, таких, що

$$f_1(x) \geq k \cdot d_C^p(x) = k \cdot \min_{y \in C} \|x - y\|^p \quad \forall x \in H,$$

то для $z \in C$ і $w \in N_C z$ можна довести оцінку

$$(w, x) - f_1(x) - (w, z) \leq \frac{1}{q(pk)^{q-1}} \|w\|^q \quad \forall x \in H,$$

де $q > 1$ та $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$.

Отримаємо онсновну нерівність.

Лема 2.4. *Нехай для f_1 виконується припущення (A1). Нехай $z \in C$, $v \in \partial f_2(z) + N_C z$, а точка $w \in N_C z$, така, що*

$$v - w \in \partial f_2(z).$$

Тоді виконується нерівність

$$\|x_{n+1} - z\|^2 - \|x_n - z\|^2 + \|x_n - x_{n+1}\|^2 + \lambda_n \alpha_n f_1(x_{n+1}) \leq \\ \leq 2\lambda_n (v, z - x_{n+1}) + \frac{\lambda_n}{\alpha_n} \frac{1}{k} \|w\|^2. \quad (2.2)$$

Доведення. Оскільки

$$x_{n+1} = \operatorname{argmin}_{y \in H} \left\{ \lambda_n f_2(y) + \lambda_n \alpha_n f_1(y) + \frac{1}{2} \|y - x_n\|^2 \right\},$$

то маємо

$$0 \in \lambda_n \partial f_2(x_{n+1}) + \lambda_n \alpha_n \partial f_1(x_{n+1}) + x_{n+1} - x_n,$$

тобто, існують

$$u_{n+1}^1 \in \partial f_1(x_{n+1}), \quad u_{n+1}^2 \in \partial f_2(x_{n+1}),$$

такі, що

$$\lambda_n u_{n+1}^2 + \lambda_n \alpha_n u_{n+1}^1 = x_n - x_{n+1}.$$

Має місце рівність

$$\|x_n - z\|^2 = \|x_{n+1} - z\|^2 + \|x_n - x_{n+1}\|^2 + 2(x_{n+1} - z, x_n - x_{n+1}) = \\ = \|x_{n+1} - z\|^2 + \|x_n - x_{n+1}\|^2 + 2\lambda_n (x_{n+1} - z, u_{n+1}^2 + \alpha_n u_{n+1}^1).$$

Із нерівності

$$-f_1(x_{n+1}) = f_1(z) - f_1(x_{n+1}) \geq (u_{n+1}^1, z - x_{n+1})$$

випливає оцінка

$$\|x_{n+1}-z\|^2-\|x_n-z\|^2+\|x_n-x_{n+1}\|^2+\lambda_n\alpha_n f_1(x_{n+1})\le \\ \le 2\lambda_n(u_{n+1}^2,z-x_{n+1})-\lambda_n\alpha_n f_1(x_{n+1}).$$

Монотонність оператора ∂f_2 дає оцінку

$$(u_{n+1}^2,z-x_{n+1})\le(v-w,z-x_{n+1}).$$

Тому

$$2\lambda_n(u_{n+1}^2,z-x_{n+1})-\lambda_n\alpha_n f_1(x_{n+1})\le 2\lambda_n(v-w,z-x_{n+1})-\lambda_n\alpha_n f_1(x_{n+1})= \\ =2\lambda_n(v,z-x_{n+1})+\lambda_n\alpha_n\left\{\left(\frac{2w}{\alpha_n},x_{n+1}\right)-f_1(x_{n+1})-\left(\frac{2w}{\alpha_n},z\right)\right\}.$$

Враховуючи лему 2.3, отримуємо нерівність (2.2). □

2.2.3 Слабка збіжність

Має місце

Лема 2.5. *Нехай $S\neq\emptyset$, виконується умова (A1). Припустимо, що*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n}{\alpha_n}<+\infty. \tag{2.3}$$

Тоді

1) $\forall z\in S\ \exists\ \lim_{n\to\infty}\|x_n-z\|\in\mathbb{R}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\|x_{n+1}-x_n\|^2<+\infty$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\alpha_n f_1(x_{n+1})<+\infty$.

Доведення. Оскільки $S\neq\emptyset$, то в нерівності (2.2) з леми 2.4 для $z\in S$ можна покласти $v=0=w-w$, де $w\in-\partial f_2(z)\cap N_C z$ (випливає з включення $0\in\partial f_2(z)+N_C z$). Маємо

$$\|x_{n+1}-z\|^2-\|x_n-z\|^2+\|x_n-x_{n+1}\|^2+\lambda_n\alpha_n f_1(x_{n+1})\le\frac{\lambda_n}{\alpha_n}\frac{1}{k}\|w\|^2. \tag{2.4}$$

Твердження 1), 2) та 3) випливають з (2.3), (2.4) та леми 2.1. □

Доведемо слабку збіжність послідовності (x_n) до розв'язку задачі (2.1). В силу леми 2.2 та твердження 1) леми 2.5 для цього достатньо показати, що всі слабкі часткові границі послідовності (x_n) належать множині S. Оскільки

функціонали f_1 та f_2 слабко напівнеперервні знизу, то останнє випливатиме з наступної асимптотичної поведінки числових послідовностей $(f_1(x_n))$, $(f_2(x_n))$

$$\lim_{n\to\infty} f_1(x_n) = 0, \tag{2.5}$$

$$\limsup_{n\to\infty} f_2(x_n) \le f_2(z) \ \ \forall z \in S. \tag{2.6}$$

Теорема 2.2. *Нехай $S \neq \emptyset$, виконується умова (A1). Припустимо, що*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{\alpha_n} < +\infty, \tag{2.7}$$

$$\liminf_{n\to\infty} \lambda_n > 0. \tag{2.8}$$

Тоді породжена алгоритмом 2.1 послідовність (x_n) слабко збігається до розв'язку задачі (2.1).

Зауваження 2.4. Умовам теореми 2.2 задовольняє варіант алгоритму 2.1 з $\lambda_n = 1$, $\alpha_n = n^2$:

$$x_{n+1} = \operatorname{argmin}_{y\in H} \left\{ f_2(y) + n^2 f_1(y) + \frac{1}{2}\|y - x_n\|^2 \right\}.$$

Доведення теореми 2.2. З (2.7) та (2.8) випливає, що $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = +\infty$. Тому для деяких $m \in \mathbb{N}$ та $c > 0$ виконується

$$\lambda_n \alpha_n \ge c \quad \forall n \ge m.$$

Тому, враховуючи факт 3) з леми 2.5, маємо

$$c \sum_{n=m}^{\infty} f_1(x_{n+1}) \le \sum_{n=m}^{\infty} \lambda_n \alpha_n f_1(x_{n+1}) < +\infty.$$

Звідки випливає (2.5).

Доведемо (2.6) від супротивного. Припустимо існування $z \in S$ такого, що $\limsup_{n\to\infty} f_2(x_n) > f_2(z)$. Тобто існує така підпослідовність (x_{n_k}), що для деякого $\delta > 0$ виконується

$$f_2(x_{n_k}) - f_2(z) \ge \delta \ \ \forall k \in \mathbb{N}. \tag{2.9}$$

Оскільки

$$x_{n_k} = \operatorname{argmin}_{y\in H} \left\{ \lambda_{n_k-1} f_2(y) + \lambda_{n_k-1}\alpha_{n_k-1} f_1(y) + \frac{1}{2}\|y - x_{n_k-1}\|^2 \right\},$$

то

$$\lambda_{n_k-1}\left(f_2(y)+\alpha_{n_k-1}f_1(y)-f_2(x_{n_k})-\alpha_{n_k-1}f_1(x_{n_k})\right)+ \\ +\left(x_{n_k}-x_{n_k-1},y-x_{n_k}\right)\geq 0 \quad (2.10)$$

для всіх $y\in H$. Поклавши в (2.10) $y=z\in S$ і врахувавши рівність $f_1(z)=0$, одержимо

$$2\lambda_{n_k-1}\left(f_2(x_{n_k})-f_2(z)\right)\leq \|x_{n_k-1}-z\|^2- \\ -\|x_{n_k}-z\|^2-\|x_{n_k-1}-x_{n_k}\|^2-2\lambda_{n_k-1}\alpha_{n_k-1}f_1(x_{n_k})\leq \\ \leq \|x_{n_k-1}-z\|^2-\|x_{n_k}-z\|^2-2\lambda_{n_k-1}\alpha_{n_k-1}f_1(x_{n_k}). \quad (2.11)$$

Не зменшуючи загальності, можна вважати, що $\lambda_n\geq d>0$ для $n\geq n_1$. Сумуючи нерівності (2.11) та враховуючи оцінку (2.9), одержимо

$$0<2\delta Nd\leq 2\delta\sum_{k=1}^{N}\lambda_{n_k-1}\leq 2\sum_{k=1}^{N}\lambda_{n_k-1}\left(f_2(x_{n_k})-f_2(z)\right)\leq \\ \leq \|x_{n_1-1}-z\|^2-2\sum_{k=1}^{N}\lambda_{n_k-1}\alpha_{n_k-1}f_1(x_{n_k}). \quad (2.12)$$

Спрямувавши в (2.12) число N до нескінченності, прийдемо до абсурду. □

Теорема 2.3. *Нехай $S\neq\emptyset$, виконується умова (A1). Припустимо, що*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n}{\alpha_n}<+\infty, \quad (2.13)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n=+\infty, \quad (2.14)$$

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n=+\infty, \quad (2.15)$$

$$\exists M>0:\ \ \alpha_{n+1}-\alpha_n\leq M\lambda_n\alpha_n. \quad (2.16)$$

Тоді породжена алгоритмом 2.1 послідовність (x_n) слабко збігається до розв'язку задачі (2.1).

Зауваження 2.5. Умовам теореми 2.3 задовольняє варіант алгоритму 2.1 з $\lambda_n=\frac{1}{n}$, $\alpha_n=n^2$:

$$x_{n+1}=\operatorname{argmin}_{y\in H}\left\{\frac{1}{n}f_2(y)+nf_1(y)+\frac{1}{2}\|y-x_n\|^2\right\}. \quad (2.17)$$

З теореми 2.2 не випливає збіжність схеми (2.17).

Доведення теореми 2.3. Маємо

$$\lambda_n f_2(x_{n+1}) + \lambda_n \alpha_n f_1(x_{n+1}) + \frac{1}{2}\|x_{n+1} - x_n\|^2 \le \lambda_n f_2(x_n) + \lambda_n \alpha_n f_1(x_n).$$

Врахувавши (2.16), отримаємо

$$\begin{aligned} f_2(x_{n+1}) + \alpha_n f_1(x_{n+1}) &\le f_2(x_n) + \alpha_n f_1(x_n) \le \\ &\le f_2(x_n) + \alpha_{n-1} f_1(x_n) + (\alpha_n - \alpha_{n-1})\, f_1(x_n) \le \\ &\le f_2(x_n) + \alpha_{n-1} f_1(x_n) + M\lambda_{n-1}\alpha_{n-1} f_1(x_n). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Застосувавши до нерівності (2.18) лему 2.1 та твердження 3) леми 2.5, отримаємо існування скінченної границі $\lim_{n\to\infty}(f_2(x_{n+1}) + \alpha_n f_1(x_{n+1}))$.

Для всіх $N > 1$ та $z \in S$ має місце оцінка (отримана сумуванням нерівностей, аналогічних (2.11))

$$2\sum_{n=1}^{N} \lambda_n \left(f_2(x_{n+1}) + \alpha_n f_1(x_{n+1}) - f_2(z)\right) \le \|x_1 - z\|^2. \quad (2.19)$$

Покажемо, що

$$\lim_{n\to\infty} \left(f_2(x_{n+1}) + \alpha_n f_1(x_{n+1})\right) \le f_2(z) \ \ \forall z \in S,$$

звідки одержимо (2.6). Міркуємо від супротивного. Припустимо існування $z \in S$ такого, що $\lim_{n\to\infty}(f_2(x_{n+1}) + \alpha_n f_1(x_{n+1})) > f_2(z)$. Тобто існують такі $\delta > 0$, $n_0 \in \mathbb{N}$, що для всіх $n > n_0$ виконується

$$f_2(x_{n+1}) + \alpha_n f_1(x_{n+1}) - f_2(z) > \delta. \quad (2.20)$$

Для всіх $N > n_0$ з (2.19) та (2.20) випливає оцінка

$$2\delta \sum_{n=n_0+1}^{N} \lambda_n \le \|x_1 - z\|^2 - 2\sum_{n=1}^{n_0} \lambda_n \left(f_2(x_{n+1}) + \alpha_n f_1(x_{n+1}) - f_2(z)\right).$$

Отже, $(\lambda_n) \in \ell_1$, що суперечить умові (2.14).

З умови (2.15) та

$$\alpha_n f_1(x_{n+1}) = (f_2(x_{n+1}) + \alpha_n f_1(x_{n+1})) - f_2(x_{n+1}) = O(1)$$

випливає (2.5). □

2.2.4 Слабка збіжність за Чезаро

Використовуючи техніку, розвинуту в [46], покажемо, що розв'язність задачі (2.1) рівносильна слабкій збіжності послідовності середніх за Чезаро елементів x_n, породжених алгоритмом 2.1.

Перш за все сформулюємо відоме твердження [46].

Лема 2.6. *Нехай H — гільбертовий простір; $F \subseteq H$ — непорожня множина; (x_n) — послідовність точок H і $\bar{x}_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k}{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k}$, де (λ_n) — послідовність додатніх чисел така, що $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = +\infty$. Припустимо, що:*

1) усі слабкі часткові границі послідовності $(\bar{x}_n)$ належать F;

2) для всіх $y \in F$ існує $\lim_{n\to\infty} \|x_n - y\| \in \mathbb{R}$.

Тоді $(\bar{x}_n)$ слабко збігається до деякої точки $x \in F$.

Має місце

Лема 2.7. *Для точок z, v, w з леми 2.4 та породженої алгоритмом 2.1 послідовності (x_n) виконується нерівність*

$$-\frac{\|x_1 - z\|^2}{2\sum_{i=1}^{n} \lambda_i} \le (v, z - \bar{x}_{n+1}) + \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\alpha_i} \right) \frac{1}{2k} \|w\|^2, \tag{2.21}$$

де $\bar{x}_n = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i x_{i+1}}{\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i}$.

Доведення. Для $i = \overline{1, n}$ маємо

$$\frac{\|x_{i+1} - z\|^2 - \|x_i - z\|^2}{2} \le \lambda_i (v, z - x_{i+1}) + \frac{\lambda_i}{\alpha_i} \frac{1}{2k} \|w\|^2.$$

Просумувавши ці нерівності по i від 1 до n, після ділення на $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i$, одержимо (2.21). □

Сформулюємо основний результат розділу.

Теорема 2.4. *Нехай виконуються умова (A1). Припустимо, що*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{\alpha_n} < +\infty, \tag{2.22}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = +\infty. \tag{2.23}$$

Тоді справедливі твердження:

1) якщо $S \neq \emptyset$*, то послідовність чезарівських середніх* $(\bar{x}_n)$ *слабко збігається до точки з множини* S*;*

2) якщо $S = \emptyset$*, то* $\|\bar{x}_n\| \to +\infty$*.*

Доведення. Якщо $S \neq \emptyset$, то за лемою 2.5 послідовність (x_n) обмежена та існує $\lim_{n\to\infty} \|x_n - z\| \in \mathbb{R}$ для всіх $z \in S$. Те саме має місце і для послідовності середніх

$$\bar{x}_n = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i x_{i+1}}{\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i}.$$

Тому послідовність $(\bar{x}_n)$ має слабко збіжну до деякого $\bar{x} \in H$ підпослідовність $(\bar{x}_{n_k})$. Записавши (2.21) для $\bar{x}_{n_k}$ та здійснивши (з урахуванням (2.22), (2.23)) граничний перехід при $k \to \infty$, отримаємо

$$(v, z - \bar{x}) \geq 0$$

для всіх $z \in C$, $v \in \partial f_2(z) + N_C z$. З максимальної монотонності $\partial f_2 + N_C$ випливає включення $\bar{x} \in S$.

Отже, у випадку $S \neq \emptyset$ для згенерованої алгоритмом послідовності (x_n) і множини $F = S$ виконані умови леми 2.6. Тому послідовність $(\bar{x}_n)$ слабко збігається до точки з множини S.

Припустимо, що $S = \emptyset$. Тоді $\|\bar{x}_n\| \to +\infty$. Дійсно, інакше послідовність $(\bar{x}_n)$ має слабку граничну точку $\bar{x} \in H$, що, як було показано, лежить в множині S. □

2.2.5 Зауваження

Для задачі (2.1) ми одержали такий основний результат. Якщо додатні послідовності (λ_n) та (α_n) задовольняють умови

$$(\lambda_n/\alpha_n) \in \ell_1, \tag{2.24}$$

$$\liminf_{n\to\infty} \lambda_n > 0 \quad \text{або} \quad \begin{cases} (\lambda_n) \notin \ell_1, \\ \lim_{n\to\infty} \alpha_n = +\infty, \\ \exists M > 0 : \ \alpha_{n+1} - \alpha_n \leq M\lambda_n\alpha_n, \end{cases}$$

то алгоритм

$$x_{n+1} = \mathrm{prox}_{\lambda_n(f_2+\alpha_n f_1)} x_n \tag{2.25}$$

слабко збігається до розв'язку задачі (2.1) (теореми 2.2, 2.3). Зокрема, послідовність (x_n), породжена схемою

$$x_{n+1} = \mathrm{argmin}_{y\in H} \left\{ f_2(y) + n^\alpha f_1(y) + \frac{n^\gamma}{2} \|y - x_n\|^2 \right\},$$

слабко збіжна до розв'язку задачі (2.1) при виконанні умов:

$$\gamma \le 1, \quad \alpha > 1 - \gamma.$$

При виконанні умов (2.24) та $(\lambda_n) \notin \ell_1$ доведено слабку збіжність чезаровських середніх породженої алгоритмом послідовності (теорема 2.4).

Зауваження 2.6. Якщо замість умови (A1) функціонал f_1 задовольняє умову росту зауваження 2.3, то замінивши (2.24) на умову $(\lambda_n/\alpha_n^{q-1}) \in \ell_1$, де $q > 1$ та $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$, одержуємо аналогічні результати про збіжність (2.25).

2.3 Альтернуючий проксимальний алгоритм для задачі дворівневої опуклої мінімізації

Тепер для дворівневої задачі опуклої мінімізації (2.1) розглянемо схему вигляду

$$\begin{cases} y_n = \operatorname{argmin}_{y \in H} \left\{ \lambda_n f_2(y) + \frac{1}{2} \|y - x_n\|^2 \right\}, \\ x_{n+1} = \operatorname{argmin}_{y \in H} \left\{ \lambda_n \alpha_n f_1(y) + \frac{1}{2} \|y - y_n\|^2 \right\}. \end{cases}$$

При $\alpha_n = 1$ маємо альтернуючий метод проксимальної декомпозиції для задачі $f_1 + f_2 \to \min$ [46, 47].

2.3.1 Альтернуючий проксимальний алгоритм

Нехай (λ_n), (α_n) — послідовності додатніх чисел. Розглянемо

Алгоритм 2.2. Обираємо $x_1 \in H$ та генеруємо послідовність елементів (x_n) за допомогою ітераційної схеми

$$\begin{cases} y_n = \operatorname{prox}_{\lambda_n f_2} x_n, \\ x_{n+1} = \operatorname{prox}_{\lambda_n \alpha_n f_1} y_n. \end{cases}$$

Для породжених алгоритмом 2.2 послідовностей (x_n) та (y_n) мають місце наступні твердження.

Лема 2.8. *Нехай $z \in C$, $v \in \partial f_2(z) + N_C z$, а точки $w^* \in \partial f_2(z)$, $w^{**} \in N_C z$, такі, що $v = w^* + w^{**}$. Тоді виконується нерівність*

$$\|x_{n+1} - z\|^2 - \|x_n - z\|^2 + \|x_n - y_n\|^2 + \frac{1}{2} \|x_{n+1} - y_n\|^2 + \\ + \lambda_n \alpha_n f_1(x_{n+1}) \le 2\lambda_n (v, z - x_{n+1}) + \frac{\lambda_n}{\alpha_n} \frac{1}{k} \|w^{**}\|^2 + 2\lambda_n^2 \|w^*\|^2. \quad (2.26)$$

Доведення. Оскільки

$$\begin{cases} y_n = \operatorname{argmin}_{y\in H}\left\{\lambda_n f_2(y) + \frac{1}{2}\|y - x_n\|^2\right\}, \\ x_{n+1} = \operatorname{argmin}_{y\in H}\left\{\lambda_n \alpha_n f_1(y) + \frac{1}{2}\|y - y_n\|^2\right\}, \end{cases}$$

то $x_n - y_n \in \lambda_n \partial f_2(y_n)$, $y_n - x_{n+1} \in \lambda_n \alpha_n \partial f_1(x_{n+1})$. З монотонності оператора ∂f_2 випливає оцінка

$$\|x_n - z\|^2 - \|y_n - z\|^2 - \|x_n - y_n\|^2 = \\ = 2(x_n - y_n, y_n - z) \geq 2\lambda_n(w^*, y_n - z). \quad (2.27)$$

З нерівності

$$-f_1(x_{n+1}) = f_1(z) - f_1(x_{n+1}) \geq \frac{1}{\lambda_n \alpha_n}(y_n - x_{n+1}, z - x_{n+1})$$

випливає оцінка

$$\|y_n - z\|^2 - \|x_{n+1} - z\|^2 - \|x_{n+1} - y_n\|^2 = \\ = 2(y_n - x_{n+1}, x_{n+1} - z) \geq 2\lambda_n \alpha_n f_1(x_{n+1}). \quad (2.28)$$

Додавши (2.27) до (2.28), одержимо

$$\|x_n - z\|^2 - \|x_{n+1} - z\|^2 - \|x_n - y_n\|^2 - \|x_{n+1} - y_n\|^2 \geq \\ \geq 2\lambda_n \alpha_n f_1(x_{n+1}) + 2\lambda_n(w^*, y_n - z).$$

Маємо

$$2\lambda_n(w^*, y_n - z) = 2\lambda_n(w^*, x_{n+1} - z) + 2\lambda_n(w^*, y_n - x_{n+1}).$$

Оскільки

$$2\lambda_n(w^*, y_n - x_{n+1}) = (2\lambda_n w^*, y_n - x_{n+1}) \geq -2\lambda_n^2 \|w^*\|^2 - \frac{1}{2}\|y_n - x_{n+1}\|^2,$$

то

$$\|x_n - z\|^2 - \|x_{n+1} - z\|^2 - \|x_n - y_n\|^2 - \frac{1}{2}\|x_{n+1} - y_n\|^2 \geq \\ \geq 2\lambda_n \alpha_n f_1(x_{n+1}) + 2\lambda_n(w^*, x_{n+1} - z) - 2\lambda_n^2 \|w^*\|^2. \quad (2.29)$$

Нерівність (2.29) перепишимо у наступному вигляді (використали рівність

$v = w^* + w^{**}$)

$$\|x_{n+1} - z\|^2 - \|x_n - z\|^2 + \|x_n - y_n\|^2 + \frac{1}{2}\|x_{n+1} - y_n\|^2 +$$
$$+ \lambda_n\alpha_n f_1(x_{n+1}) \le -\lambda_n\alpha_n f_1(x_{n+1}) + 2\lambda_n(w^*, z - x_{n+1}) + 2\lambda_n^2\|w^*\|^2 =$$
$$= 2\lambda_n(v, z - x_{n+1}) + \lambda_n\alpha_n\left\{\left(\frac{2w^{**}}{\alpha_n}, x_{n+1}\right) -\right.$$
$$\left. - f_1(x_{n+1}) - \left(\frac{2w^{**}}{\alpha_n}, z\right)\right\} + 2\lambda_n^2\|w^*\|^2.$$

Враховуючи лему 2.3 отримуємо нерівність (2.26). □

Лема 2.9. *Для точок z, v, w^* та w^{**} з леми 2.8 виконується нерівність*

$$-\frac{\|x_1 - z\|^2}{2\sum_{i=1}^n \lambda_i} \le (v, z - \bar{x}_{n+1}) + \frac{\left(\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\alpha_i}\frac{1}{2k}\|w^{**}\|^2 + \sum_{i=1}^n \lambda_i^2\|w^*\|^2\right)}{\sum_{i=1}^n \lambda_i},$$

де $\bar{x}_n = \frac{\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i x_{i+1}}{\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i}$.

Лема 2.10. *Нехай функціонал f_2 сильно опуклий з сталою $c > 0$. Тоді для єдиного розв'язку задачі (2.1) $z \in H$ виконоується нерівність*

$$2c\lambda_n\|x_{n+1} - z\|^2 \le \|x_n - z\|^2 - \|x_{n+1} - z\|^2 + \left(\frac{\lambda_n}{\alpha_n}\frac{1}{k} + 2\lambda_n^2\right)\|w^*\|^2, \quad (2.30)$$

де $w^* \in -\partial f_2(z) \cap N_C z$.

Доведення. Сильна монотонність оператора ∂f_2 [55] замість (2.27) дає оцінку

$$\|x_n - z\|^2 - \|y_n - z\|^2 - \|x_n - y_n\|^2 =$$
$$= 2(x_n - y_n, y_n - z) \ge 2\lambda_n(-w^*, y_n - z) + 2c\lambda_n\|y_n - z\|^2.$$

З нерівності (2.28) випливає

$$\|x_{n+1} - z\|^2 \le \|y_n - z\|^2.$$

Тому

$$\|x_n - z\|^2 - \|y_n - z\|^2 - \|x_n - y_n\|^2 \ge$$
$$\ge 2\lambda_n(-w^*, y_n - z) + 2c\lambda_n\|x_{n+1} - z\|^2.$$

Повторивши міркування доведення леми 2.8, отримаємо нерівність (2.30). □

2.3.2 Теореми збіжності

Стосовно послідовностей (λ_n) та (α_n) зробимо такі припущення:

(A2) $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = +\infty$;

(A3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{\alpha_n} < +\infty$;

(A4) $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 < +\infty$.

Зауваження 2.7. Наприклад, $\lambda_n = \frac{1}{n^p}$, $1/2 < p \leq 1$, $\alpha_n = n^q$, $q > 1 - p$. Якщо $\frac{c_1}{\alpha_n} \leq \lambda_n \leq \frac{c_2}{\alpha_n}$, де $c_1, c_2 > 0$, то умова (A3) рівносильна умові (A4).

Лема 2.11. *Нехай $S \neq \emptyset$, виконуються (A1)–(A4). Тоді*

1) $\forall z \in S \ \exists \lim_{n\to\infty} \|x_n - z\| \in \mathbb{R}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n - y_n\|^2 < +\infty$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_{n+1} - y_n\|^2 < +\infty$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \alpha_n f_1(x_{n+1}) < +\infty$.

У випадку сильної опуклості f_2 алгоритм 2.2 сильно збігається до єдиного розв'язку задачі (2.1).

Теорема 2.5. *Нехай функціонал f_2 сильно опуклий, виконуються (A1)–(A4). Тоді породжена алгоритмом 2.2 послідовність (x_n) сильно збігається до єдиного розв'язку задачі (2.1).*

Доведення. Нехай z — розв'язок задачі (2.1), $w^* \in -\partial f_2(z) \bigcap N_C z$, $c > 0$ — стала сильної опуклості f_2. За лемою 2.10 для $n = \overline{1, N}$ маємо

$$2c\lambda_n \|x_{n+1} - z\|^2 \leq \|x_n - z\|^2 - \|x_{n+1} - z\|^2 + \left(\frac{\lambda_n}{\alpha_n}\frac{1}{k} + 2\lambda_n^2\right)\|w^*\|^2.$$

Просумувавши нерівності, одержимо

$$2c\sum_{n=1}^{N} \lambda_n \|x_{n+1} - z\|^2 \leq \|x_1 - z\|^2 - \|x_{N+1} - z\|^2 + \left(\frac{1}{k}\sum_{n=1}^{N}\frac{\lambda_n}{\alpha_n} + 2\sum_{n=1}^{N}\lambda_n^2\right)\|w^*\|^2 \leq \|x_1 - z\|^2 + \left(\frac{1}{k}\sum_{n=1}^{N}\frac{\lambda_n}{\alpha_n} + 2\sum_{n=1}^{N}\lambda_n^2\right)\|w^*\|^2.$$

Після граничного переходу при $N \to \infty$ маємо

$$2c \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \|x_{n+1} - z\|^2 \le \|x_1 - z\|^2 + \left(\frac{1}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{\alpha_n} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 \right) \|w^*\|^2 < +\infty.$$

З умови (A2) та існування $\lim_{n\to\infty} \|x_n - z\|$ випливає $\lim_{n\to\infty} \|x_n - z\| = 0$. □

Для не сильно опуклих функціоналів f_2 встановлено факт слабкої збіжності алгоритму 2.2.

З лем 2.6, 2.9, 2.11 та міркувань роботи [46] випливає збіжність слабка чезарівських середніх послідовності (x_n).

Теорема 2.6. *Нехай виконуються умови (A1)–(A4). Тоді справедливі твердження:*

1) якщо $S \neq \emptyset$, то послідовність чезарівських середніх $(\bar{x}_n)$ слабко збігається до точки з множини S;

2) якщо $S = \emptyset$, то $\|\bar{x}_n\| \to +\infty$.

Більш тонкий аналіз дозволяє довести слабку збіжність послідовності (x_n). В силу леми 2.2 та твердження 1) леми 2.11 для цього достатньо показати, що всі слабкі часткові границі послідовності (x_n) належать множині S. Оскільки функціонали f_1 та f_2 слабко напівнеперервні знизу,

$$\lim_{n\to\infty} \|x_{n+1} - y_n\| = 0,$$

то останнє випливатиме з наступної асимптотичної поведінки числових послідовностей $(f_1(x_n))$, $(f_2(y_n))$

$$\lim_{n\to\infty} f_1(x_n) = 0,$$
$$\limsup_{n\to\infty} f_2(y_n) \le f_2(z) \ \ \forall z \in S.$$

Має місце

Теорема 2.7. *Нехай $S \neq \emptyset$, виконуються умови (A1)–(A4) та*

$$\liminf_{n\to\infty} \alpha_n \lambda_n > 0.$$

Тоді породжена алгоритмом 2.2 послідовність (x_n) слабко збігається до розв'язку задачі (2.1).

Розділ 3

Типовість розв'язності неопуклих екстремальних задач

У розділі категорними методами досліджується існування розв'язків деяких класів неопуклих задач, які залежать від параметра, що є елементом повного метричного простору. Ми доводимо існування масивних множин значень параметрів, для яких задачі мають розв'язок, тобто показуємо, що властивість розв'язності задач типова. Отримані теореми застосовано до дослідження існування розв'язків задач оптимального керування лінійними системами. Останній параграф розділу присвячено дослідженню задач векторної оптимізації, зокрема, доведенню варіанта варіаційного принципу Девілля–Годфруа–Зізлера.

Основні результати розділу були опубліковані у роботах [59–64].

3.1 Категорні методи в теорії екстремальних задач

Нехай (X, ρ) — повний метричний простір і $x \in X$. Властивість $P(x)$ називаємо типовою, якщо множина $B \subseteq X$, де вона виконується, містить зліченний перетин непорожніх відкритих скрізь щільних підмножин. Теорема Бера про категорію стверджує, що у повному метричному просторі довільна множина, яка містить зліченний перетин непорожніх відкритих скрізь щільних підмножин, є скрізь щільною. Такі множини часто називають масивними. Структура масивних множин багатша, ніж просто скрізь щільних підмножин. Наприклад, дві скрізь щільні множини можуть не перетинатись, тоді як перетин зліченної кількості масивних підмножин повного метричного простору завжди непорожній і скрізь щільний.

Є цікава ігрова інтерпретація поняття масивності, пов'язана з класичною грою Банаха-Мазура [65]. Нехай B — підмножина повного метричного простору (X, ρ). Гравці α і β грають у таку гру. Спочатку α обирає замкнену кулю $B_1 \subseteq X$; далі β обирає замкнену кулю $B_2 \subseteq B_1$ ($\mathrm{diam} B_2 \leq \frac{1}{2}\mathrm{diam} B_1$); далі α обирає замкнену кулю $B_3 \subseteq B_2$ ($\mathrm{diam} B_3 \leq \frac{1}{2}\mathrm{diam} B_2$) і далі за чергою. Якщо

множина $\cap_{n=1}^{\infty} B_n$ не перетинається з B, то перемагає α, інакше перемагає β. Стефан Банах довів, що для β існує виграшна стратегія лише тоді, коли $X \backslash B$ — множина першої категорії, тобто B — масивна множина. Цей факт дає таке тлумачення масивності множини: це множина, з якою звичайний гравець β (слід лише скористатися своєю перевагою) виграє у будь-якого геніального гравця α.

Для неопуклих задач оптимізації відомо дуже небагато загальних результатів про існування та єдиність роз'язків. У нескінченновимірному випадку та при відсутності компактності залишається не так вже багато засобів аналізу. Поширена песимістична думка [53], що в цій ситуації взагалі не варто сподіватись на загальні теореми існування та єдиності. Приклади показують, що можуть виникати різноманітні патологічні ситуації: обмежена знизу неперервна функція не досягає свого інфімуму; мінімізуюча послідовність може збігатись, а може і не збігатись; у випадку, коли вона збігається, її границя може не співпадати з розв'язком задачі навіть тоді, коли він існує.

Один з методів дослідження проблеми існування розв'язків полягає у вкладенні неопуклої екстремальної задачі у деяку параметричну родину задач з подальшим доведенням існування масивних (скрізь щільних і типу G_δ) множин значень параметрів, для яких задачі з родини мають розв'язок.

Перші результати такого роду належать С. Б. Стєчкіну, який дослідив задачу найкращого наближення. Нехай X — замкнена підмножина банахового простору E, для $y \in E$ слід знайти точку $\bar{x} \in X$ таку, що

$$\|y - \bar{x}\|_E = \inf_{x \in X} \|y - x\|_E .$$

Розглянемо множину існування

$$E(X) = \left\{ y \in E : \ \exists \bar{x} \in X \quad \|y - \bar{x}\|_E = \inf_{x \in X} \|y - x\|_E \right\}.$$

У [66] доведено масивність $E(X)$ для довільної непорожньої замкненої підмножини X рівномірно опуклого банахового простору. Ця робота поклала початок інтенсивним дослідженням категорних та щільнісних властивостей в теорії найкращого наближення (див. огляд [67]). У роботі [68] К.-С. Лау узагальнив результат С. Б. Стєчкіна на випадок замкнених підмножин локально рівномірно опуклого рефлексивного простору E. Далі, в [69] С. В. Конягін описав клас банахових просторів, в яких $E(X)$ є множиною другої категорії для довільної замкненої множини $X \subseteq E$. Це так звані простори Єфімова–Стєчкіна — рефлексивні простори, в яких слабка збіжність послідовності елементів із $S_1(E) = \{x \in E : \|x\|_E = 1\}$ до елементу із $S_1(E)$ тягне сильну (умова Кадеця–Клі). У статті [70] розглянуто задачу пошуку точок

узагальненого найкращого наближення. Відмінність від класичної задачі полягає у використанні для оцінки відхилення елементів функціоналу Мінковського замкненого опуклого околу нуля банахового простору. При деяких геометричних припущеннях на окіл, що породжує функціонал Мінковського, автори отримали аналог згаданого результату С. Б. Стєчкіна.

Інший напрямок досліджень пов'язано із задачами мінімізації функціоналів із збуреннями типу норми. Нехай f — заданий на X функціонал. У 1973 році Ж. Баранже [71] узагальнив результат С. Б. Стєчкіна, довівши типовість розв'язності задачі

$$f(x) + \|y - x\|_E \to \inf_{x \in X} \tag{3.1}$$

для замкненої непорожньої підмножини X рівномірно опуклого банахового простору E та обмеженого знизу напівнеперервного знизу функціоналу $f : X \to \mathbb{R}$. Огляд останніх результатів, пов'язаних із категорними властивостями розв'язності задачі (3.1), є в статті [72].

Нехай X — обмежена підмножина банахового простору $(E, \|\cdot\|_E)$. Однією з класичних задач максимізації є пошук найвіддаленіших точок у множині X, а саме: для $y \in E$ слід знайти точку $\bar{x} \in X$ таку, що

$$\|y - \bar{x}\|_E = \sup_{x \in X} \|y - x\|_E .$$

Розглянемо множину точок $y \in E$, для яких існує найвіддаленіша в X точка:

$$E(X) = \left\{ y \in E : \ \exists \bar{x} \in X \quad \|y - \bar{x}\|_E = \sup_{x \in X} \|y - x\|_E \right\}.$$

У 1966 році М. Едельштейн [73] довів, що коли X — непорожня замкнена й обмежена підмножина рівномірно опуклого банахового простору[1] E, то множина $E(X)$ щільна в E. Тоді ж Е. Асплунд [74] розширив цей результат, показавши, що коли X — непорожня замкнена й обмежена підмножина рефлексивного локально рівномірно опуклого банахового простору E, то множина $E(X)$ містить щільну в E підмножину типу G_δ (множина має тип G_δ, якщо вона є зліченним перетином відкритих множин). Нарешті, К.-С. Лау у роботі [75] отримав подібний результат для слабко компактної підмножини довільного банахового простору. У [76] Р. Девіль та В. Зізлер показали, що результат К.-С. Лау неможливо поширити на $\sigma(E^*, E)$-компактні підмножини спряженого банахового простору. Наприклад, для всіх $\alpha > 1$ множина

$$X_\alpha = \left\{ x = (x_n) \in \ell_1 : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| + \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^\alpha \le 1 \right\} \subseteq \ell_1 = (c_0)^*$$

[1] Нагадаємо, що рівномірно опуклий банахів простір за теоремою Мільмана–Петтіса є рефлексивним.

опукла та компактна в топології $\sigma(\ell_1, c_0)$, але для довільної точки $y \in l_1$ не існує точки $\bar{x} \in X_\alpha$ такої, що

$$\|y - \bar{x}\|_{\ell_1} = \sup_{x \in X_\alpha} \|y - x\|_{\ell_1}.$$

Нехай f — заданий на X функціонал. Ж. Баранже [77] розглянув узагальнення задачі про найвіддаленішу точку: для $y \in E$ знайти точку $\bar{x} \in X$ таку, що

$$f(\bar{x}) + \|y - \bar{x}\|_E = \sup_{x \in X} (f(x) + \|y - x\|_E). \tag{3.2}$$

У статті [77] доведено, що коли X — непорожня замкнена й обмежена множина рівномірно опуклого банахового простору E, функціонал $f : X \to \mathbb{R}$ — обмежений зверху та слабко напівнеперервний зверху, то множина $y \in E$ таких, що задача (3.2) має розв'язок, є масивною. У [53, 77, 78] цей результат перенесено на випадок задачі (3.2), поставленої у рефлексивному локально рівномірно опуклому банаховому просторі. С. Кобзаш у статті [79] узагальнює для задачі (3.2) результат К.-С. Лау, довівши масивність множини $y \in E$ таких, що задача (3.2) має розв'язок, якщо X — слабко компактна підмножина банахового простору E, а функціонал $f : X \to \mathbb{R}$ — обмежений зверху та слабко напівнеперервний зверху.

У роботах [53, 77] результати про типовість існування розв'язків екстремальної задачі (3.2) було використано при дослідженні задач оптимального керування коефіцієнтами еліптичних рівнянь. Останні відомі нам результати, пов'язані із розв'язністю задачі (3.2), опубліковано в статті [80].

У нелінійному аналізі варіаційними принципами називають групу результатів про те, що напівнеперервну знизу та обмежену знизу функцію на повному метричному просторі можна як завгодно мало збурити так, що збурена функція буде досягати мінімуму. Це перш за все теореми Екланда [53, 54, 81], Борвейна–Прайса [82] та Девілля–Годфруа–Зізлера [83], які мають багато застосувань в теорії оптимізації. Ряд аналогів принципу Екланда для векторнозначних відображень отримано у статтях К. Таммер [84, 85].

Серед згаданих теорем варіаційний принцип Девілля–Годфруа–Зізлера є твердженням про масивність множини адитивних збурень, що забезпечують розв'язність. Для векторнозначних відображень деякий аналог цього принципу було отримано у роботі [86]. Ми отримаємо близький результат. Але на відміну від [86], розглянемо відображення, задані на метричному просторі, а не на лінійному нормованому; внутрішність конусу $K \subseteq E$ може бути порожньою.

3.2 Максимізація на $\sigma(E, E^*)$-компактних множинах

3.2.1 Постановка задачі та деякі зауваження

Розглянемо дійсний банаховий простір $(E, \|\cdot\|_E)$ із спряженим $(E^*, \|\cdot\|_{E^*})$. Нехай B — замкнена опукла підмножина простору E така, що $0 \in \operatorname{int} B$. Очевидно, що множина B поглинаюча, але не обов'язково симетрична. Нагадаємо, що функціонал Мінковського $\mu_B : E \to \mathbb{R}$ множини B задається таким чином

$$\mu_B(x) = \inf\{\lambda > 0 : \ x \in \lambda B\} \quad \forall x \in E.$$

Сформулюємо добре відомі властивості функціонала Мінковського, які випливають безпосередньо з його означення.

Твердження 3.1. *Для довільних $x \in E$ і $y \in E$ маємо:*

1) $\mu_B(x) \geqslant 0$ *і* $x = 0 \ \Rightarrow \ \mu_B(x) = 0$;

2) $\mu_B(\alpha x) = \alpha \mu_B(x) \quad \forall \alpha \geq 0$;

3) $\mu_B(x + y) \leqslant \mu_B(x) + \mu_B(y)$;

4) $-\mu_B(y - x) \leqslant \mu_B(x) - \mu_B(y) \leqslant \mu_B(x - y)$;

5) $\mu_B(-x) = \mu_{-B}(x)$;

6) $\mu_B(x) = 1 \Leftrightarrow x \in \operatorname{fr} B$;

7) $\mu_B(x) < 1 \Leftrightarrow x \in \operatorname{int} B$;

8) $\mu_{\alpha B}(x) = \frac{1}{\alpha}\mu_B(x) \quad \forall \alpha > 0$;

9) $m_0 \|x\|_E \leqslant \mu_B(x) \leqslant m_1 \|x\|_E$, *де* $m_0 = \inf_{x \in E:\ \|x\|_E = 1} \mu_B(x)$, $m_1 = \sup_{x \in E:\ \|x\|_E = 1} \mu_B(x)$.

Без обмеження загальності будемо вважати, що одинична замкнена куля $B_1(E)$ є підмножиною B.

Нехай $X \subseteq E$ — непорожня обмежена множина. Для обмеженого зверху функціонала $f : X \to \mathbb{R}$ та точки $y \in E$ розглянемо задачу максимізації

$$f(x) + \mu_B(x - y) \to \sup_{x \in X}. \tag{3.3}$$

Дослідження задач вигляду (3.3) має довгу історію, що викладена вище. Частинним випадком задачі (3.1) є розглянута вперше Ж. Баранже [71] задача: для $y \in E$ знайти точку $\bar{x} \in X$ таку, що

$$f(\bar{x}) + \|y - \bar{x}\|_E = \sup_{x \in X} \left(f(x) + \|y - x\|_E\right). \tag{3.4}$$

Якщо $B = B_1(E)$, то $\mu_B(\cdot) = \|\cdot\|_E$ і задача (3.3) співпаде з задачею (3.4).

Нашою метою є доведення теореми про типовість розв'язності задачі (3.1).

3.2.2 Теорема про типовість розв'язності

Нагадаємо, що субдиференціалом опуклого функціонала $g : E \to \mathbb{R} \bigcup \{+\infty\}$ у точці $x_0 \in E$ (такій, що $g(x_0) < +\infty$) називається множина $\partial g(x_0) \subseteq E^*$ лінійних неперервних функціоналів x_0^* таких, що $g(x) - g(x_0) \geq \langle x_0^*, x - x_0 \rangle_{E^*,E}$ $\forall\, x \in E$. Якщо функціонал g неперервний у точці $x_0 \in E$, то $\partial g(x_0)$ — непорожня опукла та компактна в топології $\sigma(E^*, E)$ множина [53].

Тепер сформулюємо основний результат — теорему про типовість розв'язності задачі (3.3), яка узагальнює результати К.-С. Лау та С. Кобзаша.

Теорема 3.1. *Нехай* $(E, \|\cdot\|_E)$ *— банахів простір,* X *— непорожня компактна в топології* $\sigma(E, E^*)$ *підмножина простору* E*,* B *— замкнена опукла підмножина простору* E *така, що* $0 \in \operatorname{int} B$*, функціонал* $f : X \to \mathbb{R}$ *обмежений зверху та напівнеперервний зверху в топології* $\sigma(E, E^*)$*. Тоді множина таких* $y \in E$*, що задача* (3.3) *має розв'язок, містить щільну в* E G_δ*-підмножину.*

Зауваження 3.1. Доведення використовує ідеї робіт [75, 79].

Для точки $y \in E$ покладемо

$$r(y) = \sup_{x \in X} \left(f(x) + \mu_B(x - y) \right). \tag{3.5}$$

Вивчимо властивості функціонала $r : E \to \mathbb{R}$, визначеного за допомогою (3.5).

Лема 3.1. *Функціонал* $y \mapsto r(y)$ *опуклий та задовольняє умову Ліпшиця з константою* 1*.*

Доведення. Для кожного $x \in X$ функціонал $E \ni y \mapsto f(x) + \mu_B(x - y)$ опуклий. Тому опуклим буде і їх супремум — функціонал $y \mapsto r(y)$.

Для довільних точок $y_1, y_2 \in E$ і $x \in X$ маємо

$$f(x) + \mu_B(x - y_1) \leq f(x) + \mu_B(x - y_2) + \mu_B(y_2 - y_1) \leq r(y_2) + \mu_B(y_2 - y_1).$$

Оскільки $B_1(E) \subseteq B$, то $\mu_B(y) \leq \|y\|_E$ для всіх $y \in E$. Отже, отримаємо $r(y_1) \leq r(y_2) + \|y_2 - y_1\|_E$ або $r(y_1) - r(y_2) \leq \|y_2 - y_1\|_E$.

Змінивши порядок y_1і y_2, отримаємо $|r(y_1) - r(y_2)| \leq \|y_2 - y_1\|_E$. □

Лема 3.2. *Якщо* $y^* \in \partial r(y)$*, тоді* $\forall\, x \in E$*:* $\langle y^*, x \rangle_{E^*,E} \leq \mu_{-B}(x)$.

Доведення. Нехай $y \in E$ і $y^* \in \partial r(y)$. Тоді $\forall\, y' \in E$ маємо

$$\langle y^*, y' - y\rangle_{E^*,E} \le r(y') - r(y) \le \mu_B(y - y') = \mu_{-B}(y' - y).$$

Звідси випливає, що $\forall\, x \in E$ має місце нерівність $\langle y^*, x\rangle_{E^*,E} \le \mu_{-B}(x)$. □

Зауваження 3.2. З леми 3.2 випливає, що $\forall\ y^* \in \partial r(y)$: $\|y^*\|_{E^*} \le \sup_{-B} y^* \le 1$.

Лема 3.3. *Нехай $y \in E$ і $y^* \in \partial r(y)$. Тоді має місце нерівність*

$$\sup_{x\in X}\left(f(x) + \langle y^*, y - x\rangle_{E^*,E}\right) \le r(y).$$

Доведення. Нехай $y \in E$ і $y^* \in \partial r(y)$. Тоді за лемою 3.2 маємо

$$\forall\, x \in E : \langle y^*, y - x\rangle_{E^*,E} \le \mu_{-B}(y - x) = \mu_B(x - y).$$

Звідки

$$\forall\, x \in E : f(x) + \langle y^*, y - x\rangle_{E^*,E} \le f(x) + \mu_B(x - y) \le r(y).$$

Перейшовши до точної верхньої межі по $x \in E$, отримаємо нерівність $\sup_{x\in X}\left(f(x) + \langle y^*, y - x\rangle_{E^*,E}\right) \le r(y)$. □

Для кожного $n \in \mathbb{N}$ визначимо множину

$$F_n = \{y \in E : \sup_{x\in X}\left(f(x) + \langle y^*, y - x\rangle_{E^*,E}\right) \leqslant r(y) - \tfrac{1}{n} \text{ для деякого } y^* \in \partial r(y)\}.$$

Покладемо $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Очевидно, що

$$F = \left\{y \in E : \sup_{x\in X}\left(f(x) + \langle y^*, y - x\rangle_{E^*,E}\right) < r(y) \text{ для деякого } y^* \in \partial r(y)\right\}.$$

Покажемо, що множина $F \subseteq E$ є множиною першої категорії та має тип F_σ (тобто, F є зліченним об'єднанням замкнених ніде не щільних підмножин).

Лема 3.4. *$\forall n \in \mathbb{N}$ множина F_n замкнена.*

Доведення. Розглянемо довільну послідовність точок $y_k \in F_n$, яка сильно збігається до точки $y \in E$. Покажемо, що $y \in F_n$. Для кожного $k \in \mathbb{N}$ обираємо такий функціонал $y_k^* \in \partial r(y_k)$, що $\sup_{x\in X}\left(f(x) + \langle y_k^*, y_k - x\rangle_{E^*,E}\right) \le r(y_k) - \frac{1}{n}$.

За лемою 3.2 $\forall x \in E$ має місце нерівність $\langle y^*, x\rangle_{E^*,E} \le \mu_{-B}(x)$. А з вкладення $B_1(E) \subseteq B$ випливає, що $\forall k \in \mathbb{N}$: $\|y_k^*\|_{E^*} \le 1$.

Отже, не зменшуючи загальності, можна вважати, що існує функціонал $y^* \in E^*$ такий, що $y_k^* \to y^*$ в топології $\sigma(E^*, E)$.

Доведемо, що $\forall y' \in E$

$$\langle y_k^*, y' - y_k \rangle_{E^*,E} \to \langle y^*, y' - y \rangle_{E^*,E} \quad \text{при} \quad k \to \infty. \tag{3.6}$$

Дійсно, $\forall\, y' \in E$ маємо

$$\begin{aligned} |\langle y_k^*, y' - y_k \rangle_{E^*,E} - \langle y^*, y' - y \rangle_{E^*,E}| \le |\langle y_k^*, y' - y_k \rangle_{E^*,E} - \langle y_k^*, y' - y \rangle_{E^*,E}| + \\ + |\langle y_k^*, y' - y \rangle_{E^*,E} - \langle y^*, y' - y \rangle_{E^*,E}| = |\langle y_k^*, y - y_k \rangle_{E^*,E}| + \\ + |\langle y_k^* - y^*, y' - y \rangle_{E^*,E}| \le \|y_k^*\|_{E^*} \|y - y_k\|_E + |\langle y_k^* - y^*, y' - y \rangle_{E^*,E}|. \end{aligned}$$

Врахувавши сильну збіжність (y_k) до y та слабку* збіжність (y_k^*) до y^*, з останньої оцінки отримаємо (3.6).

Для функціоналів $y_k^* \in E^*$ виконуються нерівності

$$f(x) + \langle y_k^*, y_k - x \rangle_{E^*,E} \le r(y_k) - \tfrac{1}{n} \quad \forall\, x \in X. \tag{3.7}$$

Здійснивши граничний перехід в (3.7) при $k \to \infty$, отримаємо

$$f(x) + \langle y^*, y - x \rangle_{E^*,E} \le r(y) - \tfrac{1}{n} \quad \forall\, x \in X. \tag{3.8}$$

Покажемо, що $y^* \in \partial r(y)$. За означенням субдиференціала $\forall k \in \mathbb{N}$ маємо

$$\langle y_k^*, y' - y_k \rangle_{E^*,E} + r(y_k) \le r(y') \quad \forall\, y' \in E. \tag{3.9}$$

Здійснивши граничний перехід в (3.9) при $k \to \infty$, отримаємо

$$\langle y^*, y' - y \rangle_{E^*,E} + r(y) \le r(y') \quad \forall\, y' \in E,$$

тобто, $y^* \in \partial r(y)$.

Отже, для точки $y \in E$ має місце нерівність (3.8) з $y^* \in \partial r(y)$, тобто, $y \in F_n$ і множина F_n замкнена. □

Лема 3.5. $\forall n \in \mathbb{N}$ *множина* F_n *має порожню внутрішність.*

Доведення. Міркуємо від супротивного. Припустимо, що для деякого $n \in \mathbb{N}$ внутрішність множини F_n непорожня. Тобто, існує відкрита куля O з центром в точці $y_0 \in F_n$ і радіусом $2\lambda d$ (де $d = \sup_{x \in X} \|x - y_0\|_E < +\infty$) для деякого $\lambda > 0$, така що

$$O \subseteq F_n.$$

Покладемо $\varepsilon = \frac{\lambda}{4(1+\lambda)n}$. Оберемо точку $z_0 \in X$ так, що

$$r(y_0) - \varepsilon \le f(z_0) + \mu_B(z_0 - y_0) \le r(y_0), \tag{3.10}$$

і покладемо

$$x_0 = y_0 + \lambda(y_0 - z_0). \tag{3.11}$$

На відрізку $[x_0, y_0]$ візьмемо точку $x_1 \in E$ так, що

$$\|x_0 - x_1\|_E = \varepsilon. \tag{3.12}$$

Оскільки $\|x_0 - y_0\|_E = \lambda \|y_0 - z_0\|_E \leq \lambda d < 2\lambda d$, то x_0 і, звичайно, x_1 лежать в $O \subseteq F_n$.

Із того, що $x_1 \in F_n$, випливає існування $x_1^* \in \partial r(x_1)$ такого, що

$$\sup_{x \in X} (f(x) + \langle x_1^*, x_1 - x \rangle_{E^*,E}) \leq r(x_1) - \tfrac{1}{n}. \tag{3.13}$$

З (3.10) випливає, що

$$r(y_0) - r(x_1) \leq f(z_0) + \mu_B(z_0 - y_0) + \varepsilon - r(x_1). \tag{3.14}$$

Врахувавши (3.11), отримаємо

$$z_0 - y_0 = \frac{1}{1+\lambda}(z_0 - x_0) \tag{3.15}$$

та

$$\mu_B(z_0 - y_0) = \frac{1}{1+\lambda}\mu_B(z_0 - x_0). \tag{3.16}$$

Оцінимо різницю $r(y_0) - r(x_1)$ зверху, використовуючи (3.12), (3.14), (3.15) та (3.16):

$$\begin{aligned} r(y_0) - r(x_1) &\leq f(z_0) + \frac{1}{1+\lambda}\mu_B(z_0 - x_0) + \varepsilon - r(x_1) \leq \\ &\leq \frac{1}{1+\lambda} r(x_0) + \frac{\lambda}{1+\lambda} f(z_0) + \varepsilon - r(x_1) \leq \frac{1}{1+\lambda}\{r(x_1) + \mu_B(x_1 - x_0)\} + \\ &\qquad + \frac{\lambda}{1+\lambda} f(z_0) + \varepsilon - r(x_1) \leq \\ &\leq \frac{\|x_1 - x_0\|_E}{1+\lambda} + \frac{\lambda}{1+\lambda} f(z_0) + \varepsilon - \frac{\lambda}{1+\lambda} r(x_1) < \frac{\lambda}{1+\lambda}\{f(z_0) - r(x_1)\} + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Із (3.13) випливає, що

$$f(z_0) - r(x_1) \leq \langle x_1^*, z_0 - x_1 \rangle_{E^*,E} - \tfrac{1}{n}.$$

Отже, маємо

$$r(y_0) - r(x_1) < \frac{\lambda}{1+\lambda}\left\{\langle x_1^*, z_0 - x_1 \rangle_{E^*,E} - \tfrac{1}{n}\right\} + 2\varepsilon.$$

Оскільки $z_0 - x_1 = z_0 - x_0 + x_0 - x_1$ і $\|x_1^*\|_E \leq 1$, то

$$r(y_0) - r(x_1) < \frac{\lambda}{1+\lambda}\left\{\langle x_1^*, z_0 - x_0 \rangle_{E^*,E} - \tfrac{1}{n}\right\} + 3\varepsilon.$$

Із (3.5) випливає, що

$$r(y_0) - r(x_1) < \langle x_1^*, y_0 - x_0 \rangle_{E^*,E} - \frac{\lambda}{(1+\lambda)n} + 3\varepsilon.$$

Нарешті, отримаємо

$$r(y_0) - r(x_1) < \langle x_1^*, y_0 - x_1 \rangle_{E^*,E} - \frac{\lambda}{(1+\lambda)n} + 4\varepsilon \le \langle x_1^*, y_0 - x_1 \rangle_{E^*,E}.$$

Отже, $r(y_0) - r(x_1) < \langle x_1^*, y_0 - x_1 \rangle_{E^*,E}$, що суперечить тому, що $x_1^* \in \partial r(x_1)$. Це й доводить лему. □

Доведення теореми 3.1. Нехай $D = E \backslash F$, де $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Із лем 3.4, 3.5 та теореми Бера випливає, що множина $D \subseteq E$ скрізь щільна в E та має тип G_δ.

Покажемо, що для кожного $y \in D$ задача (3.3) має розв'язок. Нехай $y \in D$ та $y^* \in \partial r(y)$. Оскільки $\forall n \in \mathbb{N}\ y \notin F_n$, то $\sup_{x \in X} (f(x) + \langle y^*, y - x \rangle_{E^*,E}) = r(y)$.

Із $\sigma(E, E^*)$-компактності множини X і $\sigma(E, E^*)$-напівнеперервності зверху функціонала f випливає існування точки $\bar{x} \in X$ такої, що

$$f(\bar{x}) + \langle y^*, y - \bar{x} \rangle_{E^*,E} = \sup_{x \in X} (f(x) + \langle y^*, y - x \rangle_{E^*,E}) = r(y).$$

З іншого боку, за лемою 3.2 маємо

$$r(y) = f(\bar{x}) + \langle y^*, y - \bar{x} \rangle_{E^*,E} \le f(\bar{x}) + \mu_{-B}(y - \bar{x}) = f(\bar{x}) + \mu_B(\bar{x} - y) \le r(y).$$

Отже, точка $\bar{x} \in X$ — розв'язок задачі (3.3). □

Зліченний перетин щільних G_δ-множин — щільна G_δ-множина. Тому має місце теорема.

Теорема 3.2. *Нехай $\{X_n\}$ — сім'я непорожніх $\sigma(E, E^*)$-компактних підмножин банахова простору $(E, \|\cdot\|_E)$; $\{B_n\}$ — сім'я замкнених опуклих підмножин E таких, що $0 \in \mathrm{int} B_n$; $\{f_n : X_n \to \mathbb{R}\}$ — сім'я обмежених зверху і $\sigma(E, E^*)$-напівнеперервних зверху функціоналів. Тоді множина таких $y \in E$, що задачі*

$$f_n(x) + \mu_{B_n}(x - y) \to \sup_{x \in X_n}$$

мають розв'язок, містить щільну в E підмножину типу G_δ.

3.2.3 Абстрактна задача керування лінійною системою

Розглянемо застосування отриманих теорем для доведення існування оптимальних керувань лінійними системами.

Нехай $(H, \|\cdot\|_H)$, $(W, \|\cdot\|_W)$ і $(V, \|\cdot\|_V)$ — банахові простори, $U \subseteq H$ — підмножина допустимих керувань, B — замкнена опукла підмножина простору H така, що $0 \in \mathrm{int} B$.

Розглядається екстремальна задача

$$\varphi(y, h) + \mu_B(h - h_0) \to \sup, \tag{3.17}$$

$$Ly - F(h) = 0, h \in U. \tag{3.18}$$

Тут $L : V \to W$ — лінійний неперервний оператор, $F : H \to W$ — нелінійний оператор, $\varphi : V \times H \to \mathbb{R}$ — заданий функціонал, $h_0 \in H$ — фіксований елемент.

Припустимо, що

1) простір $(V, \|\cdot\|_V)$ станів системи (3.18) є рефлексивним;

2) множина $U \subseteq H$ — компактна в топології $\sigma(H, H^*)$;

3) оператор $F : H \to W$ — $\sigma(H, H^*)$-$\sigma(W, W^*)$-неперервний, тобто

$$h_n \to h \text{ в топології } \sigma(H, H^*) \;\Rightarrow\; F(h_n) \to F(h) \text{ в топології } \sigma(W, W^*);$$

4) оператор $L : V \to W$ є лінійним топологічним ізоморфізмом V в W, причому $R(L) \supseteq F(U)$;

5) фунціонал $\varphi : V \times H \to \mathbb{R}$ — обмежений зверху, напівнеперервний зверху в добутку топологій $\sigma(V, V^*)$ і $\sigma(H, H^*)$ (з того, що $y_n \to y$ в топології $\sigma(V, V^*)$ і $h_n \to h$ в топології $\sigma(H, H^*)$, випливає $\varphi(y, h) \geq \limsup_{n\to\infty} \varphi(y_n, h_n)$).

При виконанні умов 1)–5) задача (3.17), (3.18) може й не мати розв'язків. Але з результату попереднього пункту випливає твердження.

Теорема 3.3. *Нехай виконуються умови 1)-5). Тоді існує масивна множина $M \subseteq H$ така, що $\forall h_0 \in M$ задача* (3.17), (3.18) *має розв'язок.*

Доведення. Нехай $h \in U$. Тоді існує єдиний елемент $y = y(h) \in V$ такий, що

$$Ly - F(h) = 0,$$

$$\|y\|_V \leq c \|F(h)\|_W, \quad c > 0. \tag{3.19}$$

Введемо до розгляду функціонал $f : H \to \mathbb{R}$:

$$U \ni h \to f(h) = \varphi(y(h), h).$$

Покажемо, що функціонал f — напівнеперервний зверху в топології $\sigma(H, H^*)$ на множині U.

Нехай $h_n \to h$ в топології $\sigma(H, H^*)$ (h_n, $h \in U$). Позначимо $y_n = y(h_n) \in V$. Оскільки $F(h_n) \to F(h)$ в топології $\sigma(W, W^*)$ і має місце оцінка (3.19), то множина $\{y_n\} \subseteq V$ обмежена в V. Простір V рефлексивний, тому можна вважати, що $y_n \to y$ в топології $\sigma(V, V^*)$.

Покажемо, що $y = y(h)$. Для довільного $e \in W^*$ в тотожності

$$\langle L^* e, y_n \rangle_{V^*,V} = \langle e, L y_n \rangle_{W^*,W} = \langle e, F(h_n) \rangle_{W^*,W} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

перейдемо до границі при $n \to \infty$. Отримаємо

$$\langle L^* e, y \rangle_{V^*,V} = \langle e, F(h) \rangle_{W^*,W},$$

тобто, $y = y(h)$.

Отже, маємо

$$f(h) = \varphi(y(h), h) \geq \limsup_{n\to\infty} \varphi(y(h_n), h_n) = \limsup_{n\to\infty} f(h_n).$$

Після цього теорема 3.3 випливає з теореми 3.1. □

3.3 Максимізація на $\sigma(E^*, E)$-компактних множинах

Наша мета — доведення аналогу теореми 3.1 для задач максимізації на підмножинах спряженого банахова простору. Приклад із статті [76] показує, що у довільному спряженому просторі ми не можемо отримати точний аналог теореми 3.1 для $\sigma(E^*, E)$-компактних підмножин. Але для просторів, спряжених до банахових просторів, що мають властивість Радона–Нікодима, ми можемо отримати змістовне твердження про типовість розв'язності деяких задач максимізації на $\sigma(E^*, E)$-компактних множинах.

Нехай $(E, \|\cdot\|_E)$, $(E^*, \|\cdot\|_{E^*})$ — дійсний банахів простір зі своїм спряженим, B — $\sigma(E^*, E)$-замкнена опукла підмножина простору E^* така, що $0 \in \mathrm{int} B$. Будемо вважати, що одинична замкнена куля $B_1(E^*)$ є підмножиною B.

Візьмемо непорожню замкнену обмежену множину $X \subseteq E^*$. Для обмеженого зверху функціонала $f : X \to \mathbb{R}$ та точки $y^* \in E^*$ розглянемо задачу максимізації

$$f(x^*) + \mu_B(x^* - y^*) \to \sup_{x^* \in X}.$$

Для точки $y^* \in E^*$ покладемо $r(y^*) = \sup_{x^* \in X}(f(x^*) + \mu_B(x^* - y^*))$. Відзначимо, що функціонал r є опуклим напівнеперервним знизу в топології $\sigma(E^*, E)$, оскільки r є супремумом таких функціоналів. Як і в попередньому пункті, ми можемо показати, що

$$|r(y_1^*) - r(y_1^*)| \leq \|y_1^* - y_1^*\|_{E^*} \quad \forall \{y_1^*, y_2^*\} \subseteq E^*;$$

$$\|y^{**}\|_{E^{**}} \le \sup_{-B} y^{**} \le 1 \quad \forall\, y^{**} \in \partial r(y^*);$$

$$\sup_{x^* \in X} (f(x^*) + \langle y^* - x^*, y^{**} \rangle_{E^*, E^{**}}) \le r(y^*), \;\; y^* \in E^*, \;\; y^{**} \in \partial r(y^*)$$

та множина

$$F = \{y^* \in E^* : \sup_{x^* \in X} (f(x^*) + \langle y^* - x^*, y^{**} \rangle_{E^*, E^{**}}) < r(y^*)$$

для деякого $y^{**} \in \partial r(y^*)\}$

є множиною першої категорії та має тип F_σ.

Використаємо результат роботи [87]. У цій статті доведено, що банахів простір $(E, \|\cdot\|_E)$ має властивість Радона–Нікодима тоді і тільки тоді, коли спряжений простір $(E^*, \|\cdot\|_{E^*})$ має слабку* властивість Асплунда. Слабка* властивість Асплунда означає, що довільний $\sigma(E^*, E)$-напівнеперервний знизу опуклий функціонал $\phi : E^* \to \mathbb{R}$ — диференційовний за Фреше на щільній і G_δ-підмножині своєї області неперервності (неперервність та G_δ-тип розглядаються відносно сильної топології простору E^*).

Отже, якщо банахів простір $(E, \|\cdot\|_E)$ має властивість Радона–Нікодима, то функціонал r диференційовний за Фреше на щільній в E^* підмножині типу G_δ. Нехай r диференційовний за Фреше в точці $y_0^* \in E^*$ та $y_0^{**} = r'(y_0^*) \in E^{**}$ — відповідний диференціал. Тоді з $\sigma(E^*, E)$-напівнеперервності знизу опуклого функціоналу r випливає, що $y_0^{**} = y_0 \in E$ [88].

Лема 3.6. *Нехай функціонал $y^* \mapsto r(y^*)$ диференційовний за Фреше в точці $y_0^* \in E^*$. Тоді має місце рівність*

$$\sup_{x^* \in X} (f(x^*) + \langle y_0^* - x^*, y_0 \rangle_{E^*, E}) = r(y_0^*),$$

де $\{y_0 = r'(y_0^*)\} = \partial r(y_0^*)$.

Доведення. Міркуємо від супротивного. Припустимо, що функціонал r має похідну Фреше в точці $y_0^* \in E^*$ та

$$\delta = r(y_0^*) - \sup_{x^* \in X} (f(x^*) + \langle y_0^* - x^*, y_0 \rangle_{E^*, E}) > 0,$$

де $y_0 = r'(y_0^*)$. Покажемо, що тоді існує такий окіл O точки $y_0^* \in E^*$, що

$$\forall y^* \in O, \;\; \forall y^{**} \in \partial r(y^*):$$

$$r(y^*) - \sup_{x^* \in X} (f(x^*) + \langle y^* - x^*, y^{**} \rangle_{E^*, E^{**}}) > 0,$$

і, тим самим отримаємо протиріччя з тим, що множина

$$F = \{y^* \in E^* : \sup_{x^* \in X} (f(x^*) + \langle y^* - x^*, y^{**} \rangle_{E^*,E^{**}}) < r(y^*) \text{ для деякого } y^{**} \in \partial r(y^*)\}$$

є множиною першої категорії Бера.

Для елементів $x^* \in X$, $y^* \in E^*$ і $y^{**} \in \partial r(y^*)$ маємо

$$\begin{aligned} |f(x^*) + \langle y^* - x^*, y^{**} \rangle_{E^*,E^{**}} - f(x^*) - \langle y_0^* - x^*, y_0 \rangle_{E^*,E}| \leq \\ \leq |\langle y^* - x^*, y^{**} \rangle_{E^*,E^{**}} - \langle y_0^* - x^*, y^{**} \rangle_{E^*,E}| + \\ + |\langle y_0^* - x^*, y^{**} \rangle_{E^*,E^{**}} - \langle y_0^* - x^*, y_0 \rangle_{E^*,E}| \leq \\ \leq \|y^* - y_0^*\|_{E^*} \|y^{**}\|_{E^{**}} + \|y_0^* - x^*\|_{E^*} \|y^{**} - y_0\|_{E^{**}}. \end{aligned}$$

Тому

$$\begin{aligned} \left| \sup_{x^* \in X} (f(x^*) + \langle y^* - x^*, y^{**} \rangle_{E^*,E^{**}}) - \sup_{x^* \in X} (f(x^*) + \langle y_0^* - x^*, y_0 \rangle_{E^*,E}) \right| \leq \\ \leq \|y^* - y_0^*\|_{E^*} + C \|y^{**} - y_0\|_{E^{**}}, \end{aligned}$$

де $C = \sup_{x^* \in X} \|y_0^* - x^*\|_{E^*} < +\infty$.

Оскільки у точці $y_0^* \in E^*$ існує похідна Фреше функціоналу r, то існує такий окіл O точки $y_0^* \in E^*$, що $2\|y^* - y_0^*\|_{E^*} + C\|y^{**} - y_0\|_{E^{**}} < \delta$ для всіх $y^* \in O$ та $y^{**} \in \partial r(y^*)$ [88].

Якщо $y^* \in O$ та $y^{**} \in \partial r(y^*)$, то можемо записати

$$\begin{aligned} \left\{ r(y_0^*) - \sup_{x^* \in X} (f(x^*) + \langle y_0^* - x^*, y_0 \rangle_{E^*,E}) \right\} - \\ - \left\{ r(y^*) - \sup_{x^* \in X} (f(x^*) + \langle y^* - x^*, y^{**} \rangle_{E^*,E^{**}}) \right\} \leq \\ \leq |r(y_0^*) - r(y^*)| + \\ + \left| \sup_{x^* \in X} (f(x^*) + \langle y^* - x^*, y^{**} \rangle_{E^*,E^{**}}) - \sup_{x^* \in X} (f(x^*) + \langle y_0^* - x^*, y_0 \rangle_{E^*,E}) \right| \leq \\ \leq \|y^* - y_0^*\|_{E^*} + \|y^* - y_0^*\|_{E^*} + C\|y^{**} - y_0\|_{E^{**}} < \delta. \end{aligned}$$

З означення числа $\delta > 0$ випливає, що

$$r(y^*) - \sup_{x^* \in X} (f(x^*) + \langle y^* - x^*, y^{**} \rangle_{E^*,E^{**}}) > 0,$$

де $y^* \in O$ та $y^{**} \in \partial r(y^*)$. □

Теорема 3.4. *Нехай* $(E, \|\cdot\|_E)$ — *банахів простір, що має властивість*

Радона–Нікодима, X *— непорожня* $\sigma(E^*, E)$*-компактна підмножина простору* E^**,* B *—* $\sigma(E^*, E)$*-замкнена опукла підмножина простору* E^* *така, що* $0 \in \mathrm{int} B$*, функціонал* $f : X \to \mathbb{R}$ *обмежений зверху та напівнеперервний зверху в топології* $\sigma(E^*, E)$*. Тоді множина таких* $y^* \in E^*$*, що задача*

$$f(x^*) + \mu_B(x^* - y^*) \to \sup_{x^* \in X} \tag{3.20}$$

має розв'язок, містить щільну в E^* *підмножину типу* G_δ*.*

Доведення. Нехай $D^* \subseteq E^*$ — множина точок диференційовності за Фреше функціоналу r. Ця множина щільна в E^* і має тип G_δ. Покажемо, що для кожного $y^* \in D^*$ функціонал $x^* \mapsto f(x^*) + \mu_B(x^* - y^*)$ досягає максимуму на X.

Нехай $y_0^* \in D^*$ та $y_0 = r'(y_0^*)$. Із $\sigma(E^*, E)$-компактності множини X і $\sigma(E^*, E)$-напівнеперервності зверху функціонала f випливає існування точки $x_0^* \in X$ такої, що $f(x_0^*) + \langle y_0^* - x_0^*, y_0 \rangle_{E^*,E} = \sup_{x^* \in X} \left(f(x^*) + \langle y_0^* - x^*, y_0 \rangle_{E^*,E} \right)$.

З іншого боку, використовуючи лему 3.6, маємо

$$r(y_0^*) = \sup_{x^* \in X} \left(f(x^*) + \langle y_0^* - x^*, y_0 \rangle_{E^*,E} \right) = f(x_0^*) + \langle y_0^* - x_0^*, y_0 \rangle_{E^*,E} \leq$$

$$\leq f(x_0^*) + \mu_{-B}(y_0^* - x_0^*) = f(x_0^*) + \mu_B(x_0^* - y_0^*) \leq r(y_0^*).$$

Отже, точка $x_0^* \in X$ – розв'язок задачі (3.20). □

Нехай E^* — простір, спряжений до банахова простору E, що має властивість Радона-Нікодима, і f_n, B_n, X_n задовольняють умови теореми 3.4. Оскільки зліченний перетин масивних множин суть масивна множина, то з теореми 3.4 випливає твердження про масивність множини таких $y^* \in E^*$, що кожен елемент зліченної сім'ї задач виду $f_n(x^*) + \mu_{B_n}(x^* - y^*) \to \sup_{x^* \in X_n}$ має розв'язок.

Виникає цікава проблема. Нехай задано деяку незліченну сім'ю $\{f_\alpha, B_\alpha, X_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ елементів, які задовольняють умови теореми 3.4. Треба з'ясувати, коли можна гарантувати непорожність (щільність, масивність) множини таких значень параметра $y^* \in E^*$, що задачі $f_\alpha(x^*) + \mu_{B_\alpha}(x^* - y^*) \to \sup_{x^* \in X_\alpha}$ розв'язні. Аналогічне питання виникає для задач максимізації, розглянутих раніше, та задач мінімізації, вивченням яких ми зараз займемось.

3.4 Задачі мінімізації з параметром

3.4.1 Постановка задачі та деякі зауваження

Нехай B — замкнена обмежена опукла підмножина простору E така, що $0 \in \mathrm{int}B$, $\mu_B : E \to \mathbb{R}$ — функціонал Мінковського множини B. Будемо вважати, що одинична замкнена куля $B_1(E)$ є підмножиною B. Отже, існує таке число $M \geq 1$, що $B_1(E) \subseteq B \subseteq B_M(E)$, і тому для $x \in E$: $\frac{1}{M}\|x\|_E \leq \mu_B(x) \leq \|x\|_E$.

Нехай $X \subseteq E$ — непорожня множина. Для обмеженого знизу функціонала $f : X \to \mathbb{R}$ та точки $y \in E$ розглянемо задачу мінімізації

$$f(x) + \mu_B(x - y) \to \inf_{x \in X}. \tag{3.21}$$

Частинними випадками (3.21) є задача найкращого наближення: нехай X — замкнена підмножина банахова простору $(E, \|\cdot\|_E)$, для $y \in E$ слід знайти точку $\bar{x} \in X$ таку, що $\|y - \bar{x}\|_E = \inf_{x \in X}\|y - x\|_E$; і задача

$$f(x) + \|y - x\|_E \to \inf_{x \in X}, \tag{3.22}$$

де X — замкнена непорожня підмножина банахова простору E, $f : X \to \mathbb{R}$ — обмежений знизу напівнеперервний знизу функціонал. Огляд результатів, пов'язаних з категорними властивостями задачі (3.22), є в статті [72].

Метою є отримання результату про типовість розв'язності для задачі (3.21) при умовах, близьких до припущень робіт [68, 69].

3.4.2 Основний результат: теорема про типовість розв'язності

Почнемо з однієї геометричної властивості [89].

Означення 3.1. Кажемо, що множина B має властивість Кадеця–Клі, якщо для довільної послідовності точок $x_n \in B$ з умов $\mu_B(x_n) = 1$ та $x_n \to x$ слабко в E, $\mu_B(x) = 1$ випливає, що $\|x_n - x\|_E \to 0$.

Якщо $B = B_1(E)$, то маємо справу з відомою властивістю Кадеця–Клі банахова простору E [90].

Сформулюємо основний результат.

Теорема 3.5. *Нехай $(E, \|\cdot\|_E)$ — рефлексивний банахів простір; $B \subseteq E$ — замкнений обмежений опуклий окіл нуля, що має властивість Кадеця–Клі; X — непорожня замкнена підмножина простору E; функціонал $f : X \to \mathbb{R}$ обмежений знизу та напівнеперервний знизу. Тоді множина таких $y \in E$, що задача*

$$f(x) + \mu_B(x - y) \to \inf_{x \in X} \tag{3.23}$$

має розв'язок, містить щільну в $E \backslash X$ підмножину типу G_δ.

Розіб'ємо доведення теореми 3.5 на декілька кроків-лем.

Для точки $y \in E$ покладемо

$$r(y) = \inf_{x \in X} (f(x) + \mu_B(x - y)). \tag{3.24}$$

Вивчимо властивості функціонала $r : E \to \mathbb{R}$, визначеного за допомогою (3.24).

Лема 3.7. *Функціонал $y \mapsto r(y)$ задовольняє умову Ліпшиця з константою 1.*

Доведення. Для довільних точок $y_1, y_2 \in E$ і $x \in X$ маємо

$$r(y_1) \le f(x) + \mu_B(x - y_1) \le f(x) + \mu_B(x - y_2) + \mu_B(y_2 - y_1).$$

Перейшовши до інфімуму по $x \in X$ у правій частині нерівності, отримаємо

$$r(y_1) \le r(y_2) + \mu_B(y_2 - y_1).$$

Оскільки $B_1(E) \subseteq B$, то $\mu_B(y) \le \|y\|_E$ для всіх $y \in E$. Отже,

$$r(y_1) \le r(y_2) + \|y_2 - y_1\|_E$$

або

$$r(y_1) - r(y_2) \le \|y_2 - y_1\|_E.$$

Змінивши порядок y_1 і y_2, отримаємо $|r(y_1) - r(y_2)| \le \|y_2 - y_1\|_E$. □

Розглянемо довільний функціонал $\phi : E \to \mathbb{R}$. Функціонал $y^* \in E^*$ називають локально ε-опорним для ϕ в точці $y \in E$, якщо існує $\delta > 0$ таке, що

$$\phi(y') - \phi(y) \ge \langle y^*, y' - y \rangle_{E^*,E} - \varepsilon \|y' - y\|_E$$

для всіх $y' \in E$: $\|y' - y\|_E < \delta$ [78].

У роботі [78] І. Екланд та Ж. Лебур довели, що для довільного $\varepsilon > 0$ напівнеперервний знизу функціонал, заданий на рефлексивному банаховому просторі E, має локальні ε-опорні функціонали на щільній в E підмножині. Отже, для $y \mapsto r(y)$ множина існування локально ε-опорних функціоналів щільна в E.

Лема 3.8. *Нехай $y^* \in E^*$ — локально ε-опорний функціонал для r у точці $y \in E \setminus X$. Тоді*

$$1 - M\varepsilon \le \sup_{-B} y^* \le 1 + M\varepsilon. \tag{3.25}$$

Доведення. З означення локально ε-опорного функціоналу отримаємо

$$\frac{r(y') - r(y)}{\mu_{-B}(y' - y)} \ge \left\langle y^*, \frac{y' - y}{\mu_{-B}(y' - y)} \right\rangle_{E^*,E} - \varepsilon \frac{\|y' - y\|_E}{\mu_{-B}(y' - y)} \tag{3.26}$$

для всіх $y' \in E$: $\|y' - y\|_E < \delta$. Ліва частина (3.26) не перевищує 1, тому, враховуючи нерівність $\|\cdot\|_E / \mu_{-B}(\cdot) \le M$, маємо $\sup_{-B} y^* \le 1 + M\varepsilon$.

Доведемо оцінку знизу в (3.25). Знову, з означення локально ε-опорного функціоналу, для $y' \in E$: $\|y' - y\|_E < \delta$ отримаємо нерівність

$$\sup_{-B} y^* \ge \left\langle y^*, \frac{y - y'}{\mu_{-B}(y - y')} \right\rangle_{E^*,E} \ge$$
$$\ge \frac{r(y) - r(y')}{\mu_{-B}(y - y')} - \varepsilon \frac{\|y - y'\|_E}{\mu_{-B}(y - y')} \ge \frac{r(y) - r(y')}{\mu_{-B}(y - y')} - M\varepsilon.$$

Побудуємо послідовність (y'_n) таку, що $y'_n \to y$ і $\frac{r(y) - r(y'_n)}{\mu_{-B}(y - y'_n)} \to 1$. Цим ми і доведемо лему. Розглянемо послідовність точок $x_n \in X$ таких, що

$$0 \le f(x_n) + \mu_B(x_n - y) - r(y) < \tfrac{1}{n^2}.$$

Покладемо

$$y'_n = y + t_n(x_n - y), \quad t_n = \frac{1}{n\mu_B(x_n - y)}.$$

Ясно, що $\|y'_n - y\|_E \le M\mu_B(y'_n - y) = \frac{M}{n} \to 0$. Для достатньо великих $n \in \mathbb{N}$ маємо $t_n \in (0,1)$ та

$$r(y) - r(y'_n) \ge r(y) - \{f(x_n) + \mu_B(x_n - y'_n)\} =$$
$$= r(y) - \{f(x_n) + (1 - t_n)\mu_B(x_n - y)\} =$$
$$= t_n\mu_B(x_n - y) - \{f(x_n) + \mu_B(x_n - y) - r(y)\}.$$

Отже,

$$1 \ge \frac{r(y) - r(y'_n)}{\mu_{-B}(y - y'_n)} > \frac{t_n\mu_B(x_n - y) - \{f(x_n) + \mu_B(x_n - y) - r(y)\}}{\mu_{-B}(y - y'_n)} =$$
$$= \frac{t_n\mu_B(x_n - y) - \{f(x_n) + \mu_B(x_n - y) - r(y)\}}{t_n\mu_B(x_n - y)} =$$
$$= 1 - \frac{f(x_n) + \mu_B(x_n - y) - r(y)}{t_n\mu_B(x_n - y)} =$$
$$= 1 - n(f(x_n) + \mu_B(x_n - y) - r(y)) > 1 - \tfrac{1}{n},$$

що і потрібно було отримати. □

Функціонал f обмежений знизу на X деяким числом $c \in \mathbb{R}$. Маємо:

$$f(x) - c \ge 0, x \in X, \inf_{x \in X}(f(x) - c + \mu_B(x - y)) = \inf_{x \in X}(f(x) + \mu_B(x - y)) - c.$$

Тому можемо вважати, що $f(x) \ge 0$ для $x \in X$.

Для $\varepsilon \in (0,1)$ розглянемо множину G_ε усіх точок $y \in E\backslash X$, для яких існують $y^* \in E^*$ і $\delta > 0$ такі, що

$$1 - M\varepsilon \le \sup_{-B} y^* \le 1 + M\varepsilon,$$

$$\inf\{f(x) + \langle y^*, y - x\rangle_{E^*,E} : \quad x \in X \text{ та } f(x) + \mu_B(x-y) \le r(y) + \delta\} > (1-\varepsilon)\, r(y).$$

Лема 3.9. *Для кожного $\varepsilon \in (0,1)$ множина G_ε щільна в $E\backslash X$.*

Доведення. Спочатку покажемо, що коли $\varepsilon \in (0, 1/2M)$ і $y^* \in E^*$ локально ε-опорний функціонал для r в точці $y \in E\backslash X$, то $y \in G_{2M\varepsilon}$.

Нехай $\delta' \in (0,1)$ таке, що

$$r(y') - r(y) \ge \langle y^*, y' - y\rangle_{E^*,E} - \varepsilon \|y' - y\|_E \tag{3.27}$$

для всіх $y' \in E$: $\|y' - y\|_E < \delta'$. Оберемо число $\alpha \in (0,1)$ так, щоб

$$M\alpha r(y) < \tfrac{1}{2}.$$

Покладемо

$$\delta = \frac{\varepsilon\delta' M\alpha r(y)}{2} \in \left(0, \tfrac{1}{4}\right).$$

Якщо $x \in X$ задовольняє нерівність

$$f(x) + \mu_B(x-y) \le r(y) + \delta, \tag{3.28}$$

то

$$M\alpha\delta'\mu_B(x-y) \le M\alpha\delta'(r(y) + \delta) < \delta'.$$

Покладемо $y' = y + \alpha\delta'(x-y)$. Тоді для $y' - y = \alpha\delta'(x-y)$ маємо

$$\|y' - y\|_E \le M\mu_B(y'-y) = M\alpha\delta'\mu_B(x-y) < \delta'.$$

Підставимо $y' = y + \alpha\delta'(x-y)$ в (3.27) та урахувавши (3.28), отримаємо

$$\begin{aligned}\langle y^*, y'-y\rangle_{E^*,E} - \varepsilon\|y'-y\|_E &= \alpha\delta'\langle y^*, x-y\rangle_{E^*,E} - \varepsilon\alpha\delta'\|x-y\|_E \le \\ &\le r(y + \alpha\delta'(x-y)) - r(y) \le \\ \le f(x) + (1-\alpha\delta')\,\mu_B(x-y) - f(x) - \mu_B(x-y) + \delta &= -\alpha\delta'\mu_B(x-y) + \delta.\end{aligned}$$

Поділивши на $\alpha\delta' > 0$, отримаємо нерівність

$$\langle y^*, x-y\rangle_{E^*,E} \le -\mu_B(x-y) + \varepsilon\|x-y\|_E + \frac{\delta}{\alpha\delta'} \le$$

$$\leq (-1 + M\varepsilon)\,\mu_B(x-y) + \tfrac{M\varepsilon}{2} r(y).$$

Звідси приходимо до оцінки:

$$f(x) + \langle y^*, y-x\rangle_{E^*,E} \geq f(x) + (1-M\varepsilon)\,\mu_B(x-y) - \tfrac{M\varepsilon}{2} r(y) =$$
$$= (1-M\varepsilon)\,(f(x) + \mu_B(x-y)) + \underbrace{M\varepsilon f(x)}_{\geq 0} - \tfrac{M\varepsilon}{2} r(y) \geq \left(1 - \tfrac{3M\varepsilon}{2}\right) r(y).$$

Отже, маємо

$$\inf\{f(x) + \langle y^*, y-x\rangle_{E^*,E} : \quad x \in X \quad \text{та}$$
$$f(x) + \mu_B(x-y) \leq r(y) + \delta\} \geq \left(1 - \tfrac{3M\varepsilon}{2}\right) r(y) > (1 - 2M\varepsilon)\, r(y),$$

тобто, $y \in G_{2M\varepsilon}$.

Тепер твердження леми випливає із щільності в $E\backslash X$ множини існування локально ε-опорних функціоналів для r. Дійсно, нехай $y' \in E\backslash X$ і $\delta_0 > 0$. Тоді існує точка $y \in E\backslash X$ така, що $\|y' - y\|_E < \delta_0$ і в y функціонал r має локально $\frac{\varepsilon}{2M}$-опорний функціонал. За доведеним маємо $y \in G_\varepsilon$. □

Лема 3.10. *Множина G_ε відкрита в E.*

Доведення. Нехай $y \in G_\varepsilon$. Позначимо

$$M_{y,\delta} = \inf\{f(x) + \langle y^*, y-x\rangle_{E^*,E} : \quad x \in X \quad \text{та}$$
$$f(x) + \mu_B(x-y) \leq r(y) + \delta\},$$

де $y^* \in E^*$, $\delta > 0$ — функціонал і число такі, що

$$1 - M\varepsilon \leq \sup_{-B} y^* \leq 1 + M\varepsilon, \quad M_{y,\delta} > (1-\varepsilon)\, r(y).$$

Оберемо таке $\lambda > 0$, що

$$\lambda < \frac{\delta}{3}, \quad \lambda < \frac{\alpha}{2\varepsilon\,(M-1)},$$
$$2\lambda \sup_{-B} y^* \leq \alpha, \tag{3.29}$$

де $2\alpha = M_{y,\delta} - (1-\varepsilon)\, r(y) > 0$.

Покажемо, що для довільного $y' \in B_\lambda(y)$ виконується нерівність

$$\inf\{f(x) + \langle y^*, y'-x\rangle_{E^*,E} : \quad x \in X \quad \text{та}$$
$$f(x) + \mu_B(x-y') \leq r(y') + \lambda\} > (1-\varepsilon)\, r(y'),$$

тобто, $B_\lambda(y) \subseteq G_\varepsilon$.

Якщо $\|y' - y\|_E < \lambda$ і $f(x) + \mu_B(x - y') \le r(y') + \lambda$ $(x \in X)$, то

$$f(x) + \mu_B(x - y) \le f(x) + \mu_B(x - y') + \mu_B(y' - y) \le$$
$$\le r(y') + \lambda + \|y' - y\|_E \le$$
$$\le r(y) + 2\lambda + r(y') - r(y) \le r(y) + 2\lambda + \|y' - y\|_E \le$$
$$\le (y) + 3\lambda \le r(y) + \delta.$$

Звідси для розглянутих x випливає

$$f(x) + \langle y^*, y - x\rangle_{E^*,E} \ge M_{y,\delta}.$$

Із нерівності (3.29) отримаємо

$$2\lambda \sup_{-B} y^* \le f(x) + \langle y^*, y - x\rangle_{E^*,E} - M_{y,\delta} + \alpha.$$

Для виразу $f(x) + \langle y^*, y' - x\rangle_{E^*,E}$ маємо низку оцінок знизу:

$$f(x) + \langle y^*, y' - x\rangle_{E^*,E} = f(x) + \langle y^*, y - x\rangle_{E^*,E} + \langle y^*, y' - y\rangle_{E^*,E} \ge$$
$$\ge 2\lambda \sup_{-B} y^* + M_{y,\delta} - \alpha + \langle y^*, y' - y\rangle_{E^*,E} \ge$$
$$\ge \lambda \sup_{-B} y^* + M_{y,\delta} - \alpha = \lambda \sup_{-B} y^* + \alpha + (1 - \varepsilon) r(y) =$$
$$= \alpha + (1 - \varepsilon) r(y') + \lambda \sup_{-B} y^* + (1 - \varepsilon)(r(y) - r(y')) \ge$$
$$\ge \alpha + (1 - \varepsilon) r(y') + \lambda \sup_{-B} y^* - (1 - \varepsilon) \|y - y'\|_E >$$
$$> \alpha + (1 - \varepsilon) r(y') + \lambda \sup_{-B} y^* - (1 - \varepsilon)\lambda =$$
$$= \alpha + (1 - \varepsilon) r(y') + \lambda \left\{ \sup_{-B} y^* - 1 + M\varepsilon \right\} - \lambda\varepsilon\{M - 1\} \ge$$
$$= \left\{ \frac{\alpha}{2} - \lambda\varepsilon\{M - 1\} \right\} + \frac{\alpha}{2} + (1 - \varepsilon) r(y') > \frac{\alpha}{2} + (1 - \varepsilon) r(y').$$

Звідси отримаємо

$$\inf\{f(x) + \langle y^*, y' - x\rangle_{E^*,E} : \quad x \in X \quad \text{та}$$
$$f(x) + \mu_B(x - y') \le r(y') + \lambda\} \ge$$
$$\ge \frac{\alpha}{2} + (1 - \varepsilon) r(y') > (1 - \varepsilon) r(y').$$

Отже, $y' \in G_\varepsilon$. □

Покладемо $G = \bigcap_{n=2}^{\infty} G_{\frac{1}{n}}$. За лемою 3.10 множина G має тип G_δ, а з леми

3.9 і теореми Бера про категорію випливає її щільність в $E\backslash X$.

Теорема 3.5 випливає з наступної заключної леми.

Лема 3.11. *Якщо* $y \in G$, *то існує* $\bar{x} \in X$*:*

$$f(\bar{x}) + \mu_B(\bar{x} - y) = \min_{x \in X} \{f(x) + \mu_B(x - y)\}.$$

Доведення. Нехай $y \in G$. Тоді існують $y_n^* \in E^*$, $\delta_n > 0$ такі, що:

$$1 - \tfrac{M}{n} \le \sup_{-B} y_n^* \le 1 + \tfrac{M}{n},$$

$$f(x) + \langle y_n^*, y - x\rangle_{E^*,E} > \left(1 - \tfrac{1}{n}\right) r(y)$$

для всіх $x \in X$: $f(x) + \mu_B(x - y) \le r(y) + \delta_n$.

Візьмемо таку послідовність $x_n \in X$, що $f(x_n) + \mu_B(x_n - y) \le r(y) + \frac{1}{n}$. Звідси випливає, що $\lim_{n\to\infty}\{f(x_n) + \mu_B(x_n - y)\} = r(y)$. Мінімізуюча послідовність (x_n) обмежена, оскільки $\|x_n\|_E \le \|y\|_E + M\left(r(y) + \frac{1}{n}\right)$. Із рефлексивності банахова простору $(E, \|\cdot\|_E)$ випливає існування у (x_n) підпослідовності, слабко збіжної до деякого елемента $\bar{x} \in E$. Тому можемо вважати, що

$$f(x_n) + \mu_B(x_n - y) \to r(y),$$

$$f(x_n) \to a,$$

$$\mu_B(x_n - y) \to b,$$

$$x_n - y \to \bar{x} - y \quad \text{в топології} \quad \sigma(E, E^*). \tag{3.30}$$

Зафіксуємо $n > 2$ та таке $k_0 \in \mathbb{N}$, що $1/k_0 < \delta_n$. Оскільки для $k \ge k_0$

$$f(x_k) + \mu_B(x_k - y) \le r(y) + \tfrac{1}{k} \le r(y) + \delta_n,$$

то

$$f(x_k) + \langle y_n^*, y - x_k\rangle_{E^*,E} > \left(1 - \tfrac{1}{n}\right) r(y) \quad \forall k \ge k_0.$$

Зробивши граничний перехід при $k \to \infty$, отримаємо

$$a + \langle y_n^*, y - \bar{x}\rangle_{E^*,E} \ge \left(1 - \tfrac{1}{n}\right) r(y).$$

Із нерівності

$$a + \sup_{-B} y_n^* \cdot \mu_B(\bar{x} - y) = a + \sup_{-B} y_n^* \cdot \mu_{-B}(y - \bar{x}) \ge$$
$$\ge a + \langle y_n^*, y - \bar{x}\rangle_{E^*,E} \ge \left(1 - \tfrac{1}{n}\right) r(y)$$

та $\sup_{-B} y_n^* \to 1$ отримаємо (після граничного переходу при $n \to \infty$)

$$a + \mu_B(\bar{x} - y) \ge r(y). \tag{3.31}$$

Функціонал Мінковського μ_B є слабко напівнеперервним знизу. Тому з (3.30) випливає, що $\mu_B(\bar{x}-y) \le \lim_{n\to\infty} \mu_B(x_n - y) = b$. Ураховуючи (3.31), отримаємо $r(y) \le a + \mu_B(\bar{x}-y) \le a + b = r(y)$, звідки

$$\mu_B(\bar{x}-y) = B = \lim_{n\to\infty} \mu_B(x_n - y).$$

Оскільки $x_n - y \to \bar{x} - y$ в топології $\sigma(E, E^*)$, $\mu_B(x_n - y) \to \mu_B(\bar{x}-y)$, а множина B має властивість Кадеця–Клі, то $\|x_n - \bar{x}\|_E \to 0$. Множина $X \subseteq E$ замкнена, тому $\bar{x} \in X$. Із напівнеперервності знизу функціоналу f, отримаємо

$$f(\bar{x}) \le \lim_{n\to\infty} f(x_n) = a.$$

Але

$$r(y) \le f(\bar{x}) + \mu_B(\bar{x}-y) \le a + b = r(y),$$

звідки

$$f(\bar{x}) + \mu_B(\bar{x}-y) = r(y),$$

що й доводить лему. □

Зауваження 3.3. Для елементів множини G ми довели більше, ніж вказано в формулюванні теореми 3.5. Показано, що для довільного $y \in G$ задача (3.23) коректна за Тіхоновим в узагальненому розумінні, тобто, множина її розв'язків непорожня, а довільна мінімізуюча послідовність має сильно збіжну до деякого розв'язку підпослідовність [91].

3.4.3 Негативні результати

Покажемо, що без рефлексивності банахова простору E або без властивості Кадеця–Клі множини B результат типу теореми 3.5 не має місця. Наступні дві теореми — узагальнення відомих результатів С. В. Конягіна [69] про характеризацію просторів Єфімова–Стєчкіна.

Почнемо із розгляду випадку нерефлексивного банахова простору $(E, \|\cdot\|_E)$.

Теорема 3.6. *Нехай $(E, \|\cdot\|_E)$ — нерефлексивний банахів простір, $f = 0$. Тоді існують непорожня замкнена множина $X \subseteq E$ і непорожня відкрита множина $O \subseteq E\backslash X$ такі, що для довільної точки $y \in O$ екстремальна задача*

$$\mu_B(x-y) \to \inf_{x\in X}$$

не має розв'язків.

Доведення. За класичною теоремою Джеймса [90] існує функціонал $x^* \in E^*$ такий, що $\langle x^*, x\rangle_{E^*,E} < \sup_{-B} x^* = 1$ $\forall x \in -B$.

Розглянемо дві множини: замкнену обмежену

$$X = B_1(E) \cap \{x \in E : \langle x^*, x\rangle_{E^*,E} = 0\}$$

та відкриту

$$O = \left\{y \in E : \|y\|_E < \tfrac{1}{2M+1}\right\} \cap \{y \in E : \langle x^*, y\rangle_{E^*,E} > 0\}.$$

Візьмемо $y \in O$. Спочатку покажемо, що

$$\inf_{x\in X} \mu_B(x-y) = \langle x^*, y\rangle_{E^*,E}. \tag{3.32}$$

Дійсно, якщо $x \in X$, то

$$\langle x^*, y\rangle_{E^*,E} = \langle x^*, y-x\rangle_{E^*,E} \le \mu_{-B}(y-x) = \mu_B(x-y).$$

Розглянемо послідовність точок $z_n \in -B$ таких, що $\frac{n}{n+1} < \langle x^*, z_n\rangle_{E^*,E} < 1$. Покладемо

$$y_n = y - \frac{\langle x^*, y\rangle_{E^*,E}}{\langle x^*, z_n\rangle_{E^*,E}} z_n.$$

Точки y_n належать множині X, оскільки

$$\langle x^*, y_n\rangle_{E^*,E} = \langle x^*, y\rangle_{E^*,E} - \frac{\langle x^*, y\rangle_{E^*,E}}{\langle x^*, z_n\rangle_{E^*,E}} \langle x^*, z_n\rangle_{E^*,E} = 0$$

та

$$\begin{aligned}\|y_n\|_E &\le \|y\|_E + \left|\frac{\langle x^*, y\rangle_{E^*,E}}{\langle x^*, z_n\rangle_{E^*,E}}\right| \|z_n\|_E \le \\ &\le \|y\|_E + \tfrac{n+1}{n} |\langle x^*, y\rangle_{E^*,E}| \, \|z_n\|_E \le \|y\|_E + 2|\langle x^*, y\rangle_{E^*,E}| \, \|z_n\|_E \le \\ &\le \|y\|_E + 2\mu_{-B}(y) \, \|z_n\|_E \le (1+2M) \, \|y\|_E < 1.\end{aligned}$$

Оскільки $y_n \in X$, то

$$\begin{aligned}\inf_{x\in X} \mu_B(x-y) &\le \mu_B(y_n - y) = \\ &= \mu_{-B}\left(\frac{\langle x^*, y\rangle_{E^*,E}}{\langle x^*, z_n\rangle_{E^*,E}} z_n\right) \le \frac{\langle x^*, y\rangle_{E^*,E}}{\langle x^*, z_n\rangle_{E^*,E}} < \tfrac{n+1}{n} \langle x^*, y\rangle_{E^*,E},\end{aligned}$$

звідки й випливає рівність (3.32).

Припустимо тепер, що існує точка $\bar{x} \in X$ така, що $\mu_B(\bar{x}-y) = \langle x^*, y\rangle_{E^*,E}$. Розглянемо точку $z = \frac{y-\bar{x}}{\mu_B(\bar{x}-y)}$. Тоді $z \in -B$ і $\langle x^*, z\rangle_{E^*,E} = 1$. Отримали протиріччя з вибором функціонала $x^* \in E^*$. □

Аналогічний результат має місце, якщо розглянути множину B, що не має властивості Кадеця–Клі.

Теорема 3.7. *Нехай* $(E, \|\cdot\|_E)$ *— банахів простір,* $B \subseteq E$ *— замкнений обмежений опуклий окіл нуля, що не має властивості Кадеця-Клі,* $f = 0$. *Тоді існують непорожня замкнена множина* $X \subseteq E$ *і непорожня відкрита множина* $O \subseteq E \backslash X$ *такі, що для довільної точки* $y \in O$ *екстремальна задача*

$$\mu_B(x - y) \to \inf_{x \in X}$$

не має розв'язків.

Доведення. Якщо банахів простір E нерефлексивний, то твердження вже доведено (теорема 3.6).

Припустимо, що E рефлексивний простір. Оскільки множина B, а, отже, і $-B$, не має властивості Кадеця–Клі, то існує послідовність точок $z_n \in -B$ така, що $z_n \to z$ слабко в E, $\mu_{-B}(z_n) = \mu_{-B}(z) = 1$, $\inf_{k \neq n} \|z_n - z_k\|_E > \varepsilon$ для деякого $\varepsilon > 0$.

Візьмемо функціонал $x^* \in E^*$ такий, що $\langle x^*, z \rangle_{E^*,E} = \sup_{-B} x^* = 1$. Тоді маємо $\langle x^*, z_n \rangle_{E^*,E} \to 1$. Можна вважати, що

$$1 \geq \langle x^*, z_n \rangle_{E^*,E} > 1 - \tfrac{1}{n+2} > \tfrac{1}{2}.$$

Покладемо $y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) z_n$ та розглянемо дві множини:

$$X = \cup_{n=1}^{\infty} X_n,$$

де $X_n = B_{\frac{\varepsilon}{3}}(-y_n) \cap \{-y_n + x \in E : \ \langle x^*, x \rangle_{E^*,E} = 0\}$, та

$$O = \left\{ y \in E : \ \|y\|_E < \tfrac{\varepsilon}{3(2M+1)} \right\}.$$

Доведемо, що множина X замкнена. Нехай $u' \in X_k$, $u'' \in X_n$ та $k > n$. Тоді для достатньо великих k і n маємо

$$\begin{aligned} \|u' - u''\|_E &= \|u' - u'' + z_n - z_n + z_k - z_k + y_n - y_n + y_k - y_k\|_E \geq \\ &\geq \|z_k - z_n\|_E - \|z_n - y_n\|_E - \|y_k - z_k\|_E - \|y_k + u'\|_E - \|y_n + u''\|_E > \\ &> \varepsilon - \tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{k} - \tfrac{\varepsilon}{3} - \tfrac{\varepsilon}{3} > \tfrac{\varepsilon}{10}. \end{aligned}$$

Множини X_n замкнені, а починаючи з деякого n «$\frac{\varepsilon}{10}$-відділені» одна від одної. Тому множина $X = \cup_{n=1}^{\infty} X_n$ замкнена.

Розглянемо точку $y \in O$. Візьмемо довільну точку $x \in X$. Тоді для деякого $n \in \mathbb{N}$ $x \in X_n$ і $\langle x^*, x \rangle_{E^*,E} = \langle x^*, -y_n \rangle_{E^*,E} = -\left(1 + \frac{1}{n}\right) \langle x^*, z_n \rangle_{E^*,E} \leq -\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{n+2}\right) < -1$. Звідси випливає, що $\forall x \in X$

$$\begin{aligned} \mu_B(x - y) = \mu_{-B}(y - x) &\geq \langle x^*, y - x \rangle_{E^*,E} = \\ &= \langle x^*, y \rangle_{E^*,E} - \langle x^*, x \rangle_{E^*,E} > 1 + \langle x^*, y \rangle_{E^*,E}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Покажемо, що

$$\inf_{x\in X}\mu_B(x-y)=1+\langle x^*,y\rangle_{E^*,E}, \tag{3.34}$$

чим і доведемо теорему.

Розглянемо послідовність $v_n=y-y_n-\frac{\langle x^*,y\rangle_{E^*,E}}{\langle x^*,z_n\rangle_{E^*,E}}z_n$. Точка v_n лежить у множині $X_n\subseteq X$, оскільки

$$\langle x^*,v_n+y_n\rangle_{E^*,E}=\left\langle x^*,y-\frac{\langle x^*,y\rangle_{E^*,E}}{\langle x^*,z_n\rangle_{E^*,E}}z_n\right\rangle_{E^*,E}=$$
$$=\langle x^*,y\rangle_{E^*,E}-\frac{\langle x^*,y\rangle_{E^*,E}}{\langle x^*,z_n\rangle_{E^*,E}}\langle x^*,z_n\rangle_{E^*,E}=0$$

та

$$\|v_n+y_n\|_E\le\|y\|_E+\left|\frac{\langle x^*,y\rangle_{E^*,E}}{\langle x^*,z_n\rangle_{E^*,E}}\right|\|z_n\|_E\le$$
$$\le\|y\|_E+\tfrac{n+2}{n+1}|\langle x^*,y\rangle_{E^*,E}|\,\|z_n\|_E\le\|y\|_E+2|\langle x^*,y\rangle_{E^*,E}|\,\|z_n\|_E\le$$
$$\le\|y\|_E+2\mu_{-B}(y)\,\|z_n\|_E\le(1+2M)\,\|y\|_E<\tfrac{\varepsilon}{3}.$$

Оскільки $v_n\in X$, то для довільного $n\in\mathbb{N}$

$$\inf_{x\in X}\mu_B(x-y)\le\mu_B(v_n-y)=\mu_{-B}\left(y_n+\frac{\langle x^*,y\rangle_{E^*,E}}{\langle x^*,z_n\rangle_{E^*,E}}z_n\right)=$$
$$=\mu_{-B}\left(\left(1+\tfrac{1}{n}\right)z_n+\frac{\langle x^*,y\rangle_{E^*,E}}{\langle x^*,z_n\rangle_{E^*,E}}z_n\right)=$$
$$=1+\tfrac{1}{n}+\frac{\langle x^*,y\rangle_{E^*,E}}{\langle x^*,z_n\rangle_{E^*,E}}<1+\tfrac{1}{n}+\tfrac{n+2}{n+1}\langle x^*,y\rangle_{E^*,E}. \tag{3.35}$$

Врахувавши строгу нерівність (3.33), отримаємо з оцінки (3.35) рівність (3.34) та факт неможливості досягнення в ній інфімуму. □

3.5 Варіант принципу Девілля–Годфруа–Зізлера для векторної оптимізації

3.5.1 Постановка задачі та допоміжні факти

Нехай (X, ρ) — повний метричний простір, $(E, \|\cdot\|_E)$ — банахів простір. Простір E частково упорядковано замкненим опуклим та гострим конусом $K \subseteq E$.

Нехай задано відображення $f : X \to E$. Об'єктом нашого дослідження є задача векторної мінімізації

$$f \to K - \min_X, \tag{3.36}$$

тобто, задача пошуку точок $x_0 \in X$ таких, що

$$f(X) \cap (f(x_0) - K \setminus \{0\}) = \emptyset. \tag{3.37}$$

Точки $x_0 \in X$, що задовольняють (3.37), називають ефективними розв'язками задачі (3.36). Через $K\text{-}\operatorname{argmin}(f)$ будемо позначати множину усіх ефективних розв'язків задачі (3.36), а $K\text{-}\min(f)$ — множину $f(K\text{-}\operatorname{argmin}(f)) \subseteq E$.

Нагадаємо ряд необхідних нам понять та фактів з роботи [92].

Означення 3.2. Відображення $f : X \to E$ називаємо K-обмеженим знизу, якщо існує точка $z \in E$ така, що $f(X) \subseteq z + K$.

Зауваження 3.4. Якщо $\operatorname{int} K \neq \emptyset$, то K-обмеженість знизу відображення $f : X \to E$ випливає з обмеженості множини $f(X)$. Дійсно, нехай $k \in \operatorname{int} K$, тобто, існує непорожня куля $O_M(k) \subseteq K$. Тоді для довільного елемента $x \in X$

$$k + \frac{M}{\sup_{\xi \in X} \|f(\xi)\|_E} f(x) \in K, \quad k - \frac{M}{\sup_{\xi \in X} \|f(\xi)\|_E} f(x) \in K,$$

і, оскільки K — конус, то

$$f(X) \subseteq -k \frac{\sup_{\xi \in X} \|f(\xi)\|_E}{M} + K.$$

Означення 3.3. Відображення $f : X \to E$ називаємо K-напівнеперервним знизу в точці $x_0 \in X$, якщо для довільного околу $V \subseteq E$ точки $f(x_0) \in E$ існує такий окіл $W \subseteq X$ точки $x_0 \in X$, що $f(W) \subseteq V + K$.

Означення 3.4. Відображення $f : X \to E$ називаємо K-напівнеперервним знизу, якщо f є K-напівнеперервним знизу в кожній точці $x_0 \in X$.

У роботі [92] доведено, що K-напівнеперервні знизу відображення $f : X \to E$ утворюють конус.

Зафіксуємо елемент $e \in K \setminus \{0\}$ такий, що $-e \notin K$, і розглянемо функціонал $e^* \in K^* = \{k^* \in E^* : \ \langle k^*, k\rangle_{E^*,E} \geq 0 \quad \forall k \in K\}$ такий, що $\langle e^*, e\rangle_{E^*,E} = 1$.

З відображенням $f : X \to E$ зв'яжемо такий функціонал $(e^* \circ f)(x) = \langle e^*, f(x)\rangle_{E^*,E}$. Введений функціонал має наступні властивості: якщо відображення $f : X \to E$ K-обмежене знизу, то функціонал $e^* \circ f$ обмежений знизу; якщо відображення $f : X \to E$ є K-напівнеперервним знизу, то функціонал $e^* \circ f$ напівнеперервний знизу.

Нагадаємо, що $p : X \to \mathbb{R}$ досягає в точці $x_0 \in X$ строгого мінімуму, якщо $p(x_0) = \min_{x \in X} p(x)$ і $\rho(x_n, x_0) \to 0$ для всіх таких (x_n), що $p(x_n) \to p(x_0)$.

Лема 3.12. *Якщо функціонал $e^* \circ f$ досягає в точці $x_0 \in X$ строгого мінімуму, то x_0 — ефективний розв'язок задачі $f \to K\text{-}\min_X$.*

Доведення. Нехай у точці $x_0 \in X$ функціонал $e^* \circ f$ досягає строгого мінімуму, тобто, $(e^* \circ f)(x_0) = \min_{x \in X}(e^* \circ f)(x)$ і $\rho(x_n, x_0) \to 0$ для всіх таких (x_n), що

$$(e^* \circ f)(x_n) \to (e^* \circ f)(x_0).$$

Якщо припустити, що $x_0 \notin K\text{-}\operatorname{argmin}(f)$, то існує точка $x' \in X \setminus \{x_0\}$ така, що

$$f(x') \in f(x_0) - K \setminus \{0\}.$$

Звідки маємо

$$(e^* \circ f)(x') \leq (e^* \circ f)(x_0).$$

Може виконуватись тільки рівність $(e^* \circ f)(x') = (e^* \circ f)(x_0)$. Але, $x_n = x' \nrightarrow x_0$, що приводить до протиріччя. □

Гарантувати на такому рівні загальності існування розв'язків задачі (3.36) ми не можемо без припущення про компактність повного метричного простору (X, ρ). Але ми покажемо, що за допомогою як завгодно малих спеціальних адитивних збурень задачі (3.36) можна отримати розв'язну задачу векторної оптимізації.

3.5.2 Варіаційний принцип для векторної оптимізації

Введемо поняття допустимого конусу відображень-збурень.

Означення 3.5. Опуклий конус $(Y, \|\cdot\|_Y)$ обмежених, K-обмежених знизу і K-напівнеперервних знизу відображень X в E називаємо допустимим, якщо:

1) $\forall g \in Y$: $\|g\|_{BC(X,E)} = \sup_{x \in X} \|g(x)\|_E \leq \|g\|_Y$;

2) Y – повний відносно метрики, яка породжена нормою $\|\cdot\|_Y$;

3) для кожного $n \in \mathbb{N}$ існує число $M_n > 0$ таке, що для кожної точки $x \in X$ існує функціонал $b_n : X \to [0,1]$ такий, що $b_n(x) = 1$, $\operatorname{supp} b_n \subseteq B_{\frac{1}{n}}(x)$, $-b_n e \in Y$ і $\|-b_n e\|_Y \leq M_n$.

За допустимий конус відображень $(Y, \|\cdot\|_Y)$ можна обрати, наприклад, банахів простір усіх неперервних ліпшицевих обмежених та K-обмежених знизу відображень $g : X \to E$ з нормою

$$\|g\|_Y = \sup_{x \in X} \|g(x)\|_E + \sup_{x \neq y} \frac{\|g(x) - g(y)\|_E}{\rho(x,y)}.$$

Теорема 3.8. *Нехай $(Y, \|\cdot\|_Y)$ — допустимий конус відображень X в E. Нехай відображення $f : X \to E$ — K-напівнеперервне знизу і K-обмежене знизу. Тоді множина $g \in Y$ таких, що функціонал $e^* \circ (f+g)$ досягає строгого мінімуму на X, містить щільну в Y підмножину типу G_δ.*

Доведення. Ясно, що для $g \in Y$ функціонал $e^* \circ (f+g)$ обмежений знизу. Розглянемо зліченну сім'ю множин

$$U_n = \{g \in Y : \ \exists\, x_n \in X \quad e^* \circ (f+g)(x_n) < \inf\left\{e^* \circ (f+g)(x) : \ \rho(x, x_n) \geq \tfrac{1}{n}\right\}\}.$$

Лема 3.13. *$\forall n \in \mathbb{N}$ множина U_n відкрита.*

Доведення. Нехай $g \in U_n$. Тоді існує точка $x_n \in X$ така, що

$$\varepsilon = \inf\left\{e^* \circ (f+g)(x) : \ \rho(x, x_n) \geq \tfrac{1}{n}\right\} - e^* \circ (f+g)(x_n) > 0.$$

Якщо $h \in Y$, то

$$\sup_X |e^* \circ h| = \sup_{x \in X} |\langle e^*, h(x)\rangle_{E^*,E}| \leq \|e^*\|_{E^*} \|h\|_{BC(X,E)} \leq \|e^*\|_{E^*} \|h\|_Y.$$

Розглянемо $e^* \circ (f+h)(x_n) = e^* \circ (f+g)(x_n) + e^* \circ (h-g)(x_n)$. Оберемо $h \in Y$ так, що

$$\|h - g\|_Y \leq \frac{\varepsilon}{4\|e^*\|_{E^*}}.$$

Тоді для всіх $x \in X$ таких, що $\rho(x, x_n) \geq \frac{1}{n}$, маємо

$$e^* \circ (f+h)(x_n) \leq e^* \circ (f+g)(x) - \varepsilon + e^* \circ (h-g)(x_n) \leq$$
$$\leq e^* \circ (f+g)(x) - \frac{3\varepsilon}{4} = e^* \circ (f+h)(x) + e^* \circ (g-h)(x) - \frac{3\varepsilon}{4} \leq$$
$$\leq e^* \circ (f+h)(x) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Звідси

$$e^* \circ (f+h)(x_n) \le \inf\left\{e^* \circ (f+h)(x) :\ \rho(x,x_n) \ge \tfrac{1}{n}\right\} - \frac{\varepsilon}{2} < \\ < \inf\left\{e^* \circ (f+h)(x) :\ \rho(x,x_n) \ge \tfrac{1}{n}\right\},$$

тобто $h \in U_n$. □

Лема 3.14. *$\forall n \in \mathbb{N}$ множина U_n щільна в Y.*

Доведення. Нехай $g \in Y$ і $\delta > 0$. Оскільки $e^* \circ (f+g)$ обмежений знизу, то існує точка $x_n \in X$ така, що

$$e^* \circ (f+g)(x_n) < \inf\{e^* \circ (f+g)(x) :\ x \in X\} + \delta.$$

Візьмемо функціонал $b_n : X \to [0,1]$ такий, що

$$b_n(x_n) = 1,\ \operatorname{supp} b_n \subseteq B_{\frac{1}{n}}(x_n),\ -b_n e \in Y,\ \|-b_n e\|_Y \le M_n.$$

Тоді маємо

$$e^* \circ (f+g)(x_n) - \delta = e^* \circ (f+g-\delta b_n e)(x_n) < \\ < \inf\{e^* \circ (f+g)(x) :\ x \in X\} \le \inf\left\{e^* \circ (f+g)(x) :\ \rho(x,x_n) \ge \tfrac{1}{n}\right\}.$$

Але

$$\inf\left\{e^* \circ (f+g)(x) :\ \rho(x,x_n) \ge \tfrac{1}{n}\right\} = \\ = \inf\left\{e^* \circ (f+g-\delta b_n e)(x) :\ \rho(x,x_n) \ge \tfrac{1}{n}\right\}.$$

Тому відображення $g - \delta b_n e \in Y$ належить множині U_n.

З іншого боку,

$$\|g - (g - \delta b_n e)\|_Y \le M_n \delta.$$

Оскільки числа $n \in \mathbb{N}$ і $M_n > 0$ фіксовані, а число $\delta > 0$ можемо обрати як завгодно малим, то $g \in Y$ є точкою дотику множини U_n. Отже, множина U_n щільна в Y. □

Розглянемо множину $G = \cap_{n=1}^{\infty} U_n$. Із теореми Бера випливає, що G щільна G_δ-підмножина повного конуса Y.

Покажемо, що для $g \in G$ функціонал $e^* \circ (f+g)$ досягає строгого мінімуму на множині X.

Для довільного $n \in \mathbb{N}$ існує точка $x_n \in X$ така, що

$$e^* \circ (f+g)(x_n) < \inf\left\{e^* \circ (f+g)(x) :\ \rho(x,x_n) \ge \tfrac{1}{n}\right\}.$$

Для $k > n$ маємо $\rho(x_k, x_n) < \frac{1}{n}$. Дійсно, якщо припустити, що для деяких $k > n$ $\rho(x_k, x_n) \geq \frac{1}{n}$, то $e^* \circ (f+g)(x_n) < e^* \circ (f+g)(x_k)$, і, оскільки $\frac{1}{k} < \frac{1}{n}$,

$$e^* \circ (f+g)(x_k) < e^* \circ (f+g)(x_n).$$

Отримали протиріччя. Отже, (x_n) — фундаментальна послідовність, і внаслідок повноти простору X існує $x_0 = \lim_{n\to\infty} x_n \in X$. Із напівнеперервності знизу функціоналу $e^* \circ (f+g)$ випливає

$$\begin{aligned} e^* \circ (f+g)(x_0) &\leq \liminf_{n\to\infty} e^* \circ (f+g)(x_n) \leq \\ &\leq \liminf_{n\to\infty} \left\{ \inf \left\{ e^* \circ (f+g)(x) : \ \rho(x, x_0) \geq \tfrac{1}{n} \right\} \right\} = \\ &= \inf \left\{ \inf \left\{ e^* \circ (f+g)(x) : \ \rho(x, x_0) \geq \tfrac{1}{n} \right\} \right\} \leq \\ &\leq \inf \{ e^* \circ (f+g)(x) : \ x \in X \setminus \{x_0\} \}. \end{aligned}$$

Отже, $x_0 \in X$ — точка мінімуму $e^* \circ (f+g)$.

Припустимо, що існує послідовність $x'_n \in X$ така, що

$$e^* \circ (f+g)(x'_n) \to e^* \circ (f+g)(x_0) \quad \text{при} \quad n \to \infty$$

і x'_n не збігається до x_0. Виділивши, якщо необхідно, підпослідовність, можемо вважати, що для деякого $\varepsilon > 0$ і всіх $n \in \mathbb{N}$ виконується нерівність $\rho(x'_n, x_0) \geq \varepsilon$. Оскільки $x_0 = \lim_{n\to\infty} x_n$, то можна обрати таке число $k \in \mathbb{N}$, що $\rho(x'_n, x_k) \geq \frac{1}{k}$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Звідси $\forall\, n \in \mathbb{N}$ маємо

$$\begin{aligned} e^* \circ (f+g)(x_0) &\leq e^* \circ (f+g)(x_k) < \\ &< \inf \left\{ e^* \circ (f+g)(x) : \ \rho(x, x_k) \geq \tfrac{1}{k} \right\} \leq e^* \circ (f+g)(x'_n). \end{aligned}$$

А це суперечить збіжності послідовності $e^* \circ (f+g)(x'_n)$ до $e^* \circ (f+g)(x_0)$. □

Наслідок 3.1. *Нехай $(Y, \|\cdot\|_Y)$ — допустимий конус відображень X в E; $\{f_n : X \to E\}_{n\in\mathbb{N}}$ — зліченна сім'я K-напівнеперервних знизу і K-обмежених знизу відображень. Тоді для довільного $\varepsilon > 0$ існує відображення $g \in Y$ таке, що*

1) $\|g\|_Y < \varepsilon$;

2) $\forall n \in \mathbb{N}$ $K\text{-}\operatorname{argmin}(f_n + g) \neq \emptyset$.

Зауваження 3.5. Цікаво дослідити можливість твердження типу наслідку 3.1 для незліченних сімей відображень $\{f_\alpha : X \to E\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$.

3.5.3 Один результат про σ-пористість у векторній оптимізації

Крім ніде не щільності та поняття першої категорії останнім часом стали популярними такі характеристики малості як пористість і σ-пористість [93, 94].

Означення 3.6. Нехай (Y, ρ) — метричний простір. Множину $A \subseteq Y$ називають пористою в Y, якщо існують $\lambda_0 \in (0, 1]$, $r_0 > 0$ такі, що для довільних $x \in Y$ і $r \in (0, r_0]$ існує точка $y \in Y$ така, що $O_{\lambda_0 r}(y) \subseteq O_r(x) \cap (Y \backslash A)$.

Означення 3.7. Множину $A \subseteq Y$ називають σ-пористою в Y, якщо вона може бути зображена у вигляді зліченного об'єднання пористих в Y множин.

Ясно, що замикання та довільна підмножина пористої множини є пористими. Також очевидно, що пориста множина є ніде не щільною. Отже, кожна σ-пориста в Y множина є множиною першої категорії в Y. Якщо $Y = \mathbb{R}^n$, то σ-пориста підмножина Y має лебегову міру нуль. Відомо, що існують не σ-пористі підмножини $\mathbb{R}^n$ лебегової міри нуль та першої категорії. Тобто, поняття σ-пористості є більш тонким, ніж поняття множини лебегової міри нуль та множини першої категорії Бера.

У роботі [95] для багатьох ситуацій доведено, що множини функціоналів, які породжують нерозв'язні задачі мінімізації, є σ-пористими у відповідних функціональних просторах.

Далі, спираючись на результати [96] та ідею з [95], уточнимо результат теореми 3.8. А саме: покажемо, що в умовах теореми 3.8 множина $g \in Y$ таких, що $e^* \circ (f + g)$ не досягає строгого мінімуму, є σ-пористою.

Теорема 3.9. *При виконанні умов теореми 3.8 множина $g \in Y$ таких, що функціонал $e^* \circ (f + g)$ досягає строгого мінімуму на X, має тип G_δ і σ-пористе доповнення.*

Будемо використовувати класичну характеризацію досяжності строгого мінімуму напівнеперервним знизу функціоналом, який задано в повному метричному просторі [96].

Нехай $g \in Y$. Функціонал $e^* \circ (f + g)$ досягає строгого мінімуму на X тоді і тільки тоді, коли

$$\inf_{\varepsilon > 0} \left\{ \operatorname{diam} \left\{ x \in X : \ e^* \circ (f + g)(x) \leq \inf_X e^* \circ (f + g) + \varepsilon \right\} \right\} = 0.$$

Отже, множину G відображень $g \in Y$ таких, що $e^* \circ (f + g)$ досягає строгого мінімуму на X, можна подати у вигляді $G = \cap_{n=1}^{\infty} G_n$, де

$$G_n = \left\{ g \in Y : \ \inf_{\varepsilon > 0} \{ \operatorname{diam} \{ x \in X : \ e^* \circ (f + g)(x) \leq \inf_X e^* \circ (f + g) + \varepsilon \} \} < \frac{1}{n} \right\}.$$

Для завершення доведення слід показати, що всі множини G_n відкриті, а множини $Y\backslash G_n$ пористі в Y.

Розглянемо $g \in G_n$. Для деякого $\varepsilon > 0$ виконується нерівність:

$$\operatorname{diam}\left\{e^* \circ (f+g) \leq \inf_X e^* \circ (f+g) + \varepsilon\right\} < \tfrac{1}{n}.$$

Оберемо $g' \in Y$ так, що $\|g' - g\|_Y < \frac{\varepsilon}{3\|e^*\|_{E^*}}$. Тоді з нерівності

$$\inf_X e^* \circ (f+g') \leq e^* \circ (f+g')(x) = \\ = e^* \circ (f+g)(x) + e^* \circ (g'-g)(x) \leq e^* \circ (f+g)(x) + \tfrac{\varepsilon}{3} \ \ \forall x \in X,$$

випливає

$$\inf_X e^* \circ (f+g') \leq \inf_X e^* \circ (f+g) + \tfrac{\varepsilon}{3}.$$

Якщо $x \in \left\{e^* \circ (f+g') \leq \inf_X e^* \circ (f+g') + \frac{\varepsilon}{3}\right\}$, то

$$e^* \circ (f+g)(x) = e^* \circ (f+g')(x) + e^* \circ (g-g')(x) < \\ < e^* \circ (f+g')(x) + \frac{\varepsilon}{3} \leq \\ \leq \inf_X e^* \circ (f+g') + \frac{2\varepsilon}{3} \leq \inf_X e^* \circ (f+g) + \varepsilon.$$

Отже,

$$\operatorname{diam}\left\{e^* \circ (f+g') \leq \inf_X e^* \circ (f+g') + \tfrac{\varepsilon}{3}\right\} \leq \\ \leq \operatorname{diam}\left\{e^* \circ (f+g) \leq \inf_X e^* \circ (f+g) + \varepsilon\right\} < \tfrac{1}{n},$$

тобто, $O_{\varepsilon/3\|e^*\|_{E^*}}(g) \subseteq G_n$. Відкритість G_n доведено.

Лема 3.15. *$\forall n \in \mathbb{N}$ множина $Y\backslash G_n$ пориста в Y.*

Доведення. Візьмемо множину $Y\backslash G_n$. Покладемо $\lambda_n = \frac{1}{2(1+2M_{2n}\|e^*\|_{E^*})}$, де $M_{2n} > 0$ — константа з означення 3.5. Візьмемо довільне $r_n > 0$. Покажемо, що пара чисел λ_n і r_n задовольняє вимоги з означення 3.6.

Нехай $g \in Y$ і $r \in (0, r_n]$. Для доведення пористості $Y\backslash G_n$ нам потрібно знайти таке відображення $g_n \in Y$, що

$$O_{\lambda_n r}(g+g_n) \subseteq O_r(g) \bigcap G_n. \tag{3.38}$$

Зафіксуємо число $\varepsilon_n \in \left(0, \frac{r}{2M_{2n}}\right)$ і візьмемо точку $x_n \in X$ таку, що

$$e^* \circ (f+g)(x_n) \leq \inf_X e^* \circ (f+g) + \varepsilon_n.$$

Беремо функціонал $b_{2n} : X \to [0,1]$ такий, що

$$b_{2n}(x_n) = 1,\ \operatorname{supp} b_{2n} \subseteq B_{\frac{1}{2n}}(x_n),\ -b_{2n}e \in Y,\ \|-b_{2n}e\|_Y \le M_{2n},$$

та будуємо відображення $g_n \in Y$: $g_n(x) = -\delta_n b_{2n}(x)\, e$, $x \in X$, де $\delta_n = r\frac{1-\lambda_n}{M_{2n}}$.

Покажемо, що має місце вкладення (3.38). Нехай $p \in O_{\lambda_n r}(g + g_n)$. Тоді

$$p = g + g_n + p',$$

де $p' \in Y$: $\|p'\|_Y < \lambda_n r$. Мають місце оцінки

$$\|g - p\|_Y = \|g - g - g_n - p'\|_Y \le \|g_n\|_Y + \|p'\|_Y \le$$
$$\le \delta_n M_{2n} + \lambda_n r = r\frac{1-\lambda_n}{M_{2n}} M_{2n} + \lambda_n r = r.$$

Отже, $p \in O_r(g)$. Залишилось довести, що p належить множині G_n. Для цього достатньо переконатись, що для деякого $\varepsilon > 0$ виконується вкладення:

$$\left\{ e^* \circ (f+p) \le \inf_X e^* \circ (f+p) + \varepsilon \right\} \subseteq \operatorname{supp} b_{2n} \subseteq B_{\frac{1}{2n}}(x_n). \tag{3.39}$$

Для доведення (3.39) покажемо, що для $x \notin \operatorname{supp} b_{2n}$ має місце нерівність

$$e^* \circ (f+p)(x) > \inf_X e^* \circ (f+p) + \varepsilon. \tag{3.40}$$

Ураховувавши властивості відображення $g_n \in Y$, оцінку

$$\|p'\|_{BC(X,E)} \le \|p'\|_Y < \lambda_n r$$

та рівність $\langle e^*, e\rangle_{E^*,E} = 1$, отримаємо такий ланцюжок нерівностей ($x \notin \sup p\ b_{2n}$)

$$e^* \circ (f+p)(x) = e^* \circ (f+g+g_n+p')(x) =$$
$$= e^* \circ (f+g+p')(x) \ge e^* \circ (f+g)(x) - \lambda_n r \|e^*\|_{E^*} \ge$$
$$\ge \inf_X e^* \circ (f+g) - \lambda_n r \|e^*\|_{E^*} \ge e^* \circ (f+g)(x_n) - \varepsilon_n - \lambda_n r \|e^*\|_{E^*} =$$
$$= e^* \circ (f+g+g_n)(x_n) + \delta_n - \varepsilon_n - \lambda_n r \|e^*\|_{E^*} \ge$$
$$\ge e^* \circ (f+g+g_n+p')(x_n) + \delta_n - \varepsilon_n - 2\lambda_n r \|e^*\|_{E^*} \ge$$
$$\ge \inf_X e^* \circ (f+p) + \delta_n - \varepsilon_n - 2\lambda_n r \|e^*\|_{E^*}.$$

Для обґрунтування нерівності (3.40) слід показати, що $\delta_n - \varepsilon_n - 2\lambda_n r \|e^*\|_{E^*} >$

0. Із вибору ε_n і δ_n отримуємо:

$$\delta_n - \varepsilon_n - 2\lambda_n r \|e^*\|_{E^*} > \left(\frac{1-\lambda_n}{M_{2n}} - \frac{1}{2M_{2n}} - 2\lambda_n \|e^*\|_{E^*} \right) r. \tag{3.41}$$

Підставивши значення λ_n, отримаємо, що права частина нерівності (3.41) дорівнює нулю. □

Зауваження 3.6. При доведенні леми 3.15 ми обрали число $r_n > 0$ довільним. Тим самим ми показали, що множини $Y \backslash G_n$ глобально дуже пористі [67, 94].

Наслідок 3.2. *При виконанні умов теореми 3.8 множина*

$$\{g \in Y : \ K\text{-}\operatorname{argmin}(f+g) \neq \emptyset\} \subseteq Y$$

має σ*-пористе доповнення.*

Доведення. Випливає з теореми 3.9 та вкладення (лема 3.12)

$$\{g \in Y : \ e^* \circ (f+g) \text{ досягає строгого мінімуму на } X\} \subseteq$$
$$\subseteq \{g \in Y : \ K\text{-}\operatorname{argmin}(f+g) \neq \emptyset\}.$$

□

3.5.4 Застосування до лінійних систем з векторним критерієм якості

Розглянемо останнє питання — застосування теореми 3.5 для доведення існування оптимальних розв'язків задач векторного керування лінійними системами, залежними від параметра.

Нехай $(E, \|\cdot\|_E)$, $(H, \|\cdot\|_H)$, $(W, \|\cdot\|_W)$ і $(V, \|\cdot\|_V)$ — банахові простори; $U \subseteq H$ — підмножина допустимих керувань; $B \subseteq H$ — замкнений обмежений опуклий окіл нуля; простір E частково упорядковано замкненим опуклим та гострим конусом $K \subseteq E$; $e \in K \backslash \{0\}$ — фіксований елемент такий, що $-e \notin K$.

Розглядається екстремальна задача

$$\Phi(y, h) + \mu_B(h - h_0)\, e \to K\text{-}\min, \tag{3.42}$$

$$Ly - F(h) = 0, \ \ h \in U. \tag{3.43}$$

Тут $L : V \to W$ — лінійний неперервний оператор, $F : H \to W$ — нелінійний оператор, $\Phi : V \times H \to E$ — задане відображення, $h_0 \in H$ — фіксований елемент-параметр.

Припустимо, що

1) простір $(H, \|\cdot\|_H)$ керувань є рефлексивним;

2) множина $B \subseteq H$ має властивість Кадеця–Клі;

3) множина $U \subseteq H$ замкнена;

4) оператор $F : H \to W$ — неперервний;

5) оператор $L : V \to W$ є лінійним топологічним ізоморфізмом V в W, причому $R(L) \supseteq F(U)$;

6) відображення $\Phi : V \times H \to E$ — K-обмежене знизу, K-напівнеперервне знизу в добутку топологій $\sigma(V, V^*)$ і $\sigma(H, H^*)$ (в кожній точці $(y', h') \in V \times H$ виконується: $\forall$ околу $O \subseteq E$ точки $\Phi(y', h')$ $\exists$ такий окіл $V_0 \subseteq V$ точки $y' \in V$ і такий окіл $H_0 \subseteq H$ точки $h' \in H$, що $\Phi(V_0, H_0) \subseteq O + K$);

7) $(K^*)^\circ = \{l^* \in K^* : \ \langle l^*, l\rangle_{E^*,E} > 0 \quad \forall l \in K \backslash \{0\}\} \neq \emptyset$.

Зауваження 3.7. В класичній роботі [97] доведено, що у випадку сепарабельності E завжди $(K^*)^\circ \neq \emptyset$. Якщо ж простір E несепарабельний, то множина $(K^*)^\circ$ може бути порожньою.

Теорема 3.10. *Нехай виконуються умови 1)–7). Тоді існує масивна множина $M \subseteq H \backslash U$ така, що $\forall h_0 \in M$ задача* (3.42), (3.43) *має ефективний розв'язок.*

Доведення. Нехай $h \in U$. Тоді існує єдиний елемент $y = y(h) \in V$ такий, що

$$Ly - F(h) = 0,$$

$$\|y\|_V \leq c \|F(h)\|_W \ , c > 0. \tag{3.44}$$

Введемо до розгляду відображення $\Psi : H \to E$: $U \ni h \to \Psi(h) = \Phi(y(h), h)$.

Покажемо, що відображення Ψ — K-напівнеперервне знизу на множині U. Розглянемо дві точки $h' \in U$, $y' = y(h') \in V$ та окіл $O \subseteq E$ точки $\Phi(y', h') \in E$. Із умови 6) випливає існування таких околів V_0 і H_0 точок $y' \in V$ і $h' \in H$ відповідно, що $\Phi(V_0, H_0) \subseteq O + K$. Із неперервності оператора F і оцінки (3.44) випливає існування такого околу $H_{00} \subseteq H_0$ точки h', що $\left(L^{-1} \circ F\right)(H_{00}) \subseteq V_0$. Отже, $\Psi(H_{00}) \subseteq \Phi(V_0, H_0) \subseteq O + K$, що і треба було довести.

Візьмемо елемент $e^* \in (K^*)^\circ$ такий, що $\langle e^*, e\rangle_{E^*,E} = 1$, та розглянемо задачу

$$\langle e^*, \Phi(y, h)\rangle_{E^*,E} + \mu_B(h - h_0) \to \inf,$$

$$Ly - F(h) = 0, \ \ h \in U,$$

яку можемо записати у вигляді:

$$\langle e^*, \Psi(h)\rangle_{E^*,E} + \mu_B(h - h_0) \to \inf_{h\in U}. \tag{3.45}$$

Функціонал $h \mapsto \langle e^*, \Psi(h)\rangle_{E^*,E}$ напівнеперервний знизу та обмежений знизу на U. Отже, з теореми 3.5 випливає, що множина таких $h_0 \in H$, що задача (3.45) має розв'язок, містить щільну в $H\backslash U$ підмножину типу G_δ.

Для доведення теореми залишилось показати, що розв'язок (3.45) є ефективним розв'язком задачі (3.42), (3.43).

Нехай $\bar{h} \in U$ — розв'язок (3.45). Припустимо, що $\bar{h} \in U$ не є ефективним розв'язком (3.42), (3.43). Тоді існує така точка $h' \in U$, що

$$\Psi(h') + \mu_B(h' - h_0)e \in \Psi(\bar{h}) + \mu_B(\bar{h} - h_0)e - K\backslash\{0\}.$$

Звідки маємо (використали $\langle e^*, e\rangle_{E^*,E} = 1$)

$$\langle e^*, \Psi(h')\rangle_{E^*,E} + \mu_B(h' - h_0) < \langle e^*, \Psi(\bar{h})\rangle_{E^*,E} + \mu_B(\bar{h} - h_0).$$

Прийшли до протиріччя. □

Зауваження 3.8. Спираючись на теореми 3.1, 3.4, можна отримати подібні результати для задач векторної максимізації лінійної системи виду

$$\Phi(y, h) + \mu_B(h - h_0)e \to K\text{-}\max,$$

$$Ly - F(h) = 0, \quad h \in U.$$

У наступному розділі ми наведемо один близький результат.

Розділ 4

Дослідження задач опуклої максимізації

Важливим класом неопуклих екстремальних задач є задачі максимізації опуклих функціоналів на опуклих множинах. Вже цим задачам властива багатоекстремальність, яка ускладнює розробку та обґрунтування алгоритмів пошуку глобального екстремуму. Для нескінченновимірних задач при традиційних припущеннях теорії керування питання існування оптимальних розв'язків у багатьох випадках теж є проблемою. З іншого боку, наявність опуклої структури часто дозволяє отримати змістовні результати.

Відомо, що у рефлексивному банаховому просторі власний опуклий напівнеперервний знизу функціонал досягає мінімуму на довільній опуклій замкненій та обмеженій множині. Але для задачі максимізації напівнепе-рервного знизу опуклого функціоналу немає такої елегантної теореми існування. Вже у нескінченновимірному гільбертовому просторі існують опуклі замкнені та обмежені множини, які не містять елемента з максимальною нормою. Такою множиною є, наприклад,

$$X = \overline{\operatorname{conv}} \left\{ \frac{n}{n+1} e_n : \ n \in \mathbb{N} \right\},$$

де $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — стандартний ортонормований базис простору ℓ_2.

Інша добре відома фахівцям нетривіальність задачі опуклої максимізації полягає у можливій наявності локальних максимумів, які не є глобальними. Це сильно ускладнює розробку алгоритмів пошуку глобального максимуму. Цьому колу питань присвячено статті та монографії О. С. Стрекаловського [106–110]. У цих роботах запропоновано оригінальний геометричний підхід одержання умов глобального екстремуму для широкого кола неопуклих задач (у тому числі і для задачі опуклої максимізації), а також розроблено та обґрунтовано відповідні алгоритми глобального пошуку. Близькі питання вивчались в [111–113].

Однією з класичних задач опуклої максимізації є задача пошуку норми

лінійного неперервного оператора $\mathcal{A} \in \mathsf{L}(\mathsf{E},\mathsf{F})$ (E, F — простори Банаха)

$$\|\mathcal{A}x\|_{\mathsf{F}} \to \sup_{x\in \mathsf{B}_1(\mathsf{E})}.$$

Будемо казати, що оператор $\mathcal{A}$ досягає норми, якщо існує елемент $\bar{x} \in \mathsf{B}_1(\mathsf{E})$ такий, що $\|\mathcal{A}\bar{x}\|_{\mathsf{F}} = \sup_{x\in \mathsf{B}_1(\mathsf{E})} \|\mathcal{A}x\|_{\mathsf{F}} = \|\mathcal{A}\|_{\mathsf{L}(\mathsf{E},\mathsf{F})}$. Позначимо через $\mathsf{AN}_0(\mathsf{E},\mathsf{F})$ множину операторів з $\mathsf{L}(\mathsf{E},\mathsf{F})$, що досягають норми. Якщо простір E — рефлексивний, то лінійні компактні оператори $\mathcal{A}:\mathsf{E}\to\mathsf{F}$ належать $\mathsf{AN}_0(\mathsf{E},\mathsf{F})$ [76]. Але, звичайно, існують лінійні неперервні оператори, що не досягають норми. Прикладом може бути оператор $\mathcal{A}:\ell_2\to\ell_2$, заданий формулою

$$\ell_2 \ni x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...) \to \mathcal{A}x = \left(\tfrac{1}{2}x_1, \tfrac{2}{3}x_2, ..., \tfrac{n}{n+1}x_n, ...\right) \in \ell_2,$$

який очевидно не досягає норми. Класична теорема Бішопа–Фелпса [90] стверджує, що для довільного банахова простору E виконується рівність $\overline{\mathsf{AN}_0(\mathsf{E},\mathbb{R})} = \mathsf{L}(\mathsf{E},\mathbb{R}) = \mathsf{E}^*$. У статті [114] Лінденштраусс почав вивчати загальний випадок і показав, що результат типу теореми Бішопа–Фелпса може не мати місця, якщо замість $\mathbb{R}$ обрати довільний банахів простір, а саме, він навів приклад, коли множина $\mathsf{AN}_0(\mathsf{E},\mathsf{E})$ не щільна у просторі $\mathsf{L}(\mathsf{E},\mathsf{E})$. Але задача спрощується, якщо ми перейдемо до спряжених операторів. Введемо до розгляду множини

$$\mathsf{AN}_1(\mathsf{E},\mathsf{F}) = \{\mathcal{A}\in\mathsf{L}(\mathsf{E},\mathsf{F}) : \mathcal{A}^*\in\mathsf{AN}_0(\mathsf{F}^*,\mathsf{E}^*)\},$$

$$\mathsf{AN}_2(\mathsf{E},\mathsf{F}) = \{\mathcal{A}\in\mathsf{L}(\mathsf{E},\mathsf{F}) : \mathcal{A}^{**}\in\mathsf{AN}_0(\mathsf{E}^{**},\mathsf{F}^{**})\}.$$

Із теореми Хана–Банаха випливають вкладення

$$\mathsf{AN}_0(\mathsf{E},\mathsf{F}) \subseteq \mathsf{AN}_1(\mathsf{E},\mathsf{F}) \subseteq \mathsf{AN}_2(\mathsf{E},\mathsf{F}).$$

Лінденштраусс [90, 114] довів, що завжди

$$\overline{\mathsf{AN}_2(\mathsf{E},\mathsf{F})} = \mathsf{L}(\mathsf{E},\mathsf{F}).$$

Відмітимо, що у «рефлексивному» варіанті, тобто, коли банахів простір E — рефлексивний, це означає рівність

$$\overline{\mathsf{AN}_0(\mathsf{E},\mathsf{F})} = \mathsf{L}(\mathsf{E},\mathsf{F}).$$

Результат Лінденштраусса поліпшив Зізлер [115], довівши, що

$$\overline{\mathsf{AN}_1(\mathsf{E},\mathsf{F})} = \mathsf{L}(\mathsf{E},\mathsf{F}).$$

Основний момент доведень цих результатів про щільність — побудова для за-

даного $\varepsilon > 0$ за допомогою деякої ітераційної процедури ядерного оператора $\mathcal{B}$ такого, що $\|\mathcal{B}\|_{L(E,F)} < \varepsilon$, $\mathcal{A} + \mathcal{B} \in AN_k(E, F)$.

У статтях [116–118] досліджувався зв'язок між деякими геометричними властивостями просторів E, F і питанням про щільність $AN_0(E, F)$ в $L(E, F)$.

Більшу частину цього розділу присвячено дослідженню існування розв'язків задачі максимізації опуклого функціоналу f на замкненій опуклій і обмеженій підмножині X банахова простору $(E, \|\cdot\|_E)$. А саме, вивчається питання: якщо задача опуклої максимізації нерозв'язна, то чи можна цільовий функціонал як завгодно мало адитивно збурити лінійним неперервним функціоналом так, що збурення досягає максимуму? Отримано як позитивні відповіді, так звані лінійні варіаційні принципи, так і контрприклади. На цьому шляху ми узагальнюємо ітераційний процес, запропонований Лінденштрауссом при дослідженні щільності множини операторів, що досягають своєї норми на одиничній замкненій кулі. Відзначимо, що у випадку некомпактності у слабкій топології множини X велику роль починають грати різні геометричні властивості X. Розглянуто також ряд неопуклих узагальнень. Один з параграфів присвячено дослідженню існування розв'язків екстремальних задач на передопуклих множинах — доповненнях скінченних об'єднань опуклих множин до опуклої множини.

У останньому параграфі ми описуємо задані у рефлексивному банаховому просторі опуклі функціонали, що досягають супремуму на довільній обмеженій замкненій і опуклій множині простору.

Основні результати розділу були опубліковані у роботах [98–105].

4.1 Лінійний варіаційний принцип для опуклої максимізації

4.1.1 Постановка задачі та допоміжні факти

Відомо, що у рефлексивному банаховому просторі власний опуклий напівнеперервний знизу функціонал досягає мінімуму на довільній опуклій замкненій та обмеженій множині. Але для задачі максимізації напівнеперервного знизу опуклого функціоналу немає такої елегантної теореми існування. Вже у нескінченновимірному гільбертовому просторі існують опуклі замкнені та обмежені множини, які не містять елемента з максимальною нормою. Також існують необмежені зверху на замкненій одиничній кулі опуклі неперервні функціонали $f : \ell_2 \to \mathbb{R}$. Побудуємо відповідний приклад. Розглянемо у просторі ℓ_2 таку послідовність векторів (e_n), що $\|e_n\|_{\ell_2} = 4$, $e_n \to 0$ слабко в ℓ_2

при $n \to \infty$. Візьмемо послідовність функцій $\mathbb{R} \xrightarrow{f_n} \mathbb{R}$

$$f_n(t) = \begin{cases} n(|t|-1)\ , & t \notin [-1,1]\,, \\ 0\,, & t \in [-1,1]\,, \end{cases}$$

і покладемо для $x \in \ell_2$: $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n\left((e_n, x)_{\ell_2}\right)$. Побудований функціонал $f : \ell_2 \to \mathbb{R}$ опуклий та неперервний на ℓ_2. Дійсно, нехай $x \in \ell_2$, тоді існує $N \in \mathbb{N}$: $\left|(e_n, x)_{\ell_2}\right| < \frac{1}{2}$ для всіх $n \geq N$. Звідки для всіх $y \in B_{1/8}(x)$: $f(y) = \sum_{n=1}^{N} f_n\left((e_n, y)_{\ell_2}\right)$. Отже, функціонал f опуклий та неперервний (навіть задовольняє умову Ліпшиця) на $B_{1/8}(x)$.

Оскільки $\|e_n\|_{\ell_2} = \sup_{x \in B_1(\ell_2)} (e_n, x)_{\ell_2} = 4$, то для довільного $n \in \mathbb{N}$ існує $x_n \in B_1(\ell_2)$, що $(e_n, x_n)_{\ell_2} \geq 2$. Звідки $f(x_n) \geq n$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, що означає необмеженість зверху функціоналу f на кулі $B_1(\ell_2)$.

Відзначимо, що завдяки теоремі Джозефсона-Ніссенцвейга [119] необмежений зверху на замкненій одиничній кулі опуклий неперервний функціонал можна побудувати на довільному нескінченновимірному лінійному нормованому просторі.

Важливу роль в задачах опуклої максимізації відіграють крайні точки допустимої області. Позначимо через $\operatorname{ext}(X)$ множину крайніх точок підмножини X лінійного простору E.

Лема 4.1. *Нехай E — локально опуклий лінійний топологічний простір та напівнеперервний знизу власний опуклий функціонал $f : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ досягає супремуму на компактній опуклій множині $X \subseteq \operatorname{dom}(f)$ у точці $x' \in X$. Тоді існує точка $x'' \in \operatorname{ext}(X)$ така, що $f(x'') = f(x') = \sup_{x \in X} f(x)$.*

Зауваження 4.1. Твердження леми 4.1 добре відоме під назвою «принцип максимуму Бауера», але наводиться в літературі, як правило, для напівнеперервних зверху опуклих функціоналів [120]. Ми відкидаємо вимогу напівнеперервності зверху та виводимо результат з витонченої теореми Шоке–Бішопа–де Лю [121].

Доведення. Міркуємо від супротивного. Нехай для всіх $x \in \operatorname{ext}(X)$: $f(x) < f(x') = \sup_{x \in X} f(x)$. Розглянемо $\forall n \in \mathbb{N}$ множину

$$F_n = \left\{ y \in X : f(y) \leq \sup_{x \in X} f(x) - \tfrac{1}{n} \right\}.$$

За умовою F_n — замкнені підмножини X. Отже, множина

$$F = \{x \in X : f(x) = f(x')\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} (X \backslash F_n)$$

є елементом σ-алгебри берівських підмножин компакту X. Причому F не перетинається з множиною $\operatorname{ext}(X)$ крайніх точок X.

За теоремою Шоке–Бішопа–де Лю [121] існує ймовірнісна міра Радона μ на X, яка приймає нульове значення на усіх берівських підмножинах X, що не перетинаються з множиною $\operatorname{ext}(X)$, та представляє точку $x' \in X$, тобто

$$\forall x^* \in E^* : \langle x^*, x' \rangle_{E^*,E} = \int_X \langle x^*, x \rangle_{E^*,E} \, d\mu(x).$$

Звичайно,

$$\mu(F) = \mu(\{x \in X : f(x) = f(x')\}) = 0 \tag{4.1}$$

та $g(x') = \int_X g(x) \, d\mu(x)$ для довільного неперервного афінного функціоналу $g : E \to \mathbb{R}$ ($g(\cdot) = \langle x^*, \cdot \rangle_{E^*,E} + c$, $x^* \in E^*$, $c \in \mathbb{R}$).

З умови леми випливає, що $f = \sup_{\alpha \in \mathfrak{A}} g_\alpha$, де $\{g_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ — деяка непорожня множина неперервних на E афінних функціоналів [53]. Отже,

$$\forall \alpha \in \mathfrak{A} : \int_X f(x) \, d\mu(x) \geq \int_X g_\alpha(x) \, d\mu(x) = g_\alpha(x').$$

Звідки отримуємо, що $\int_X f(x) \, d\mu(x) \geq \int_X f(x') \, d\mu(x)$. Отже, маємо

$$\int_X (f(x) - f(x')) \, d\mu(x) = 0,$$

оскільки $f(x) \leq f(x')$ для усіх $x \in X$. Отже, $f(x) = f(x') \pmod{\mu}$. Тоді,

$$\mu(\{x \in X : f(x) = f(x')\}) = 1,$$

що суперечить (4.1). □

Нехай $(E, \|\cdot\|_E)$ — простір Банаха, функціонал $f : E \to \mathbb{R}$ опуклий і обмежений зверху на замкненій опуклій і обмеженій множині X. Розглянемо задачу

$$f \to \sup_X. \tag{4.2}$$

Навіть у випадку рефлексивності банахова простору $(E, \|\cdot\|_E)$ задача (4.2) може не мати оптимальних розв'язків. Виникає питання: якщо задача опуклої максимізації нерозв'язна, то чи можна цільовий функціонал як завгодно мало адитивно збурити лінійним неперервним функціоналом так, що збурення досягає максимуму? Позитивну відповідь на питання такого типу називатимемо лінійним варіаційним принципом.

Наступна лема в термінах афінних мінорант дає майже очевидний критерій досяжності супремуму напівнеперервним знизу опуклим функціоналом на компактній опуклій підмножині локально опуклого простору.

Лема 4.2. *Нехай* X *— компактна опукла підмножина локально опуклого простору* E, $f : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *— напівнеперервний знизу опуклий функціонал,* $X \subseteq \operatorname{dom}(f)$, (ε_n) *— нескінченно мала послідовність додатних чисел. Функціонал* f *досягає супремуму на* X *тоді і тільки тоді, коли виконана умова: існують послідовності точок* $x_n \in X$ *і неперервних афінних функціоналів* $\phi_n : E \to \mathbb{R}$*:*

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad f \geq \phi_n \quad \textit{на} \quad X, \tag{4.3}$$

$$\forall n \leq k: \quad \phi_n(x_k) \geq \sup_{x \in X} f(x) - \varepsilon_n. \tag{4.4}$$

Доведення. Нехай виконується умова. Розглянемо $x' \in X$ — граничну точку послідовності (x_n) та підсіть (x_{n_k}) таку, що $x_{n_k} \to x'$. Із неперервності ϕ_n та (4.4) випливає, що $\forall n \in \mathbb{N}$: $\phi_n(x') \geq \sup\limits_{x \in X} f(x) - \varepsilon_n$. Врахувавши (4.3), отримаємо $\forall n \in \mathbb{N}$: $f(x') \geq \sup_{x \in X} f(x) - \varepsilon_n$, отже, $f(x') = \sup_{x \in X} f(x)$.

Нехай функціонал f досягає супремуму на X в точці $x' \in X$. Візьмемо для простоти $\forall n \in \mathbb{N}$ $x_n = x'$. Оскільки $f = \sup_{\phi \in \Phi} \phi$, де Φ — деяка непорожня множина неперервних на E афінних функціоналів [53], то існують такі $\phi_n \in \Phi$, що $\forall n \in \mathbb{N}$: $\phi_n(x') \geq f(x') - \varepsilon_n$. □

Зауваження 4.2. Лема 4.2 — це узагальнення критерія Лінденштраусса [114] досяжності лінійним неперервним оператором своєї норми на одиничній замкненій кулі.

Далі ми встановимо ряд тверджень типу лінійного варіаційного принципу. На цьому шляху будемо використовувати лему 4.2 та ітераційний процес, аналогічний розглянутому Лінденштрауссом [114] при дослідженні щільності множини операторів, що досягають своєї норми на одиничній замкненій кулі.

4.1.2 Основна теорема

Ідея леми 4.2 і техніка, що була запропонована Лінденштрауссом [90, 114] для доведення сильної щільності множини лінійних неперервних операторів $A \in L(E, F)$, другі спряжені яких досягають своєї норми на одиничній замкненій кулі другого спряженого простору E^{**}, дозволили отримати теореми 4.1 і 4.2.

Теорема 4.1. *Нехай* $(E, \|\cdot\|_E)$ *— рефлексивний банахів простір;* $f : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *— власний опуклий напівнеперервний знизу функціонал, що задовольняє умову Ліпшиця на* $B_1(E)$*. Тоді для довільного* $\varepsilon > 0$ *існує* $x^* \in E^*$ *такий, що* $\|x^*\|_{E^*} < \varepsilon$ *і функціонал* $f + x^*$ *досягає супремуму на кулі* $B_1(E)$ *у крайній точці* $B_1(E)$*.*

Доведення. Без обмеження загальності будемо вважати, що функціонал f задовольняє умови

$$\forall x \in B_1(E): \ 3 \le f(x) \le 5,$$

$$\forall \{x, y\} \subseteq B_1(E): \ |f(x) - f(y)| \le \|x - y\|_E .$$

Нехай $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$. Оберемо спадну послідовність $\varepsilon_n > 0$ так, щоб виконувались нерівності $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < \varepsilon$, $\sum_{n=k+1}^{\infty} \varepsilon_n < \varepsilon_k^2$ для $k = 1, 2, \ldots$

Покладемо $f_1 = f$. Візьмемо точку $x_1 \in B_1(E)$ так, що

$$f_1(x_1) > \sup_{x \in B_1(E)} f_1(x) - \varepsilon_1^2.$$

Будуємо множину $M_1 \subseteq E \oplus \mathbb{R}$:

$$M_1 = \left\{(x, \alpha) \in E \oplus \mathbb{R}: \ f_1(x_1) - \varepsilon_1^2 - 2\|x - x_1\|_{E^*} \ge \alpha \ge -2\right\}.$$

Зрозуміло, що M_1 — компактна в топології $\sigma(E \oplus \mathbb{R}, E^* \oplus \mathbb{R})$ опукла підмножина $E \oplus \mathbb{R}$.

Множини $\operatorname{epi}(f_1)$ і M_1 не перетинаються, оскільки функціонал f_1 задовольняє умову Ліпшиця з константою 1, і відповідно для $x \in B_1(E)$

$$f_1(x) \ge f_1(x_1) - \|x - x_1\|_E > f_1(x_1) - \varepsilon_1^2 - 2\|x - x_1\|_E .$$

Оскільки надграфік $\operatorname{epi}(f_1)$ — замкнена в топології $\sigma(E \oplus \mathbb{R}, E^* \oplus \mathbb{R})$ опукла підмножина $E \oplus \mathbb{R}$, то існує $\sigma(E \oplus \mathbb{R}, E^* \oplus \mathbb{R})$-замкнена гіперплощина $L \subseteq E \oplus \mathbb{R}$, що строго відокремлює $\operatorname{epi}(f_1)$ від M_1. Гіперплощина L задається неперервним афінним функціоналом ϕ_1, тобто, функціоналом вигляду

$$\phi_1(\cdot) = \langle x_1^*, \cdot \rangle_{E^*, E} + c_1, \ \ x_1^* \in E^*, \ \ c_1 \in \mathbb{R}.$$

Цей функціонал має властивості:

$$\forall x \in E: \ f_1(x) > \phi_1(x),$$

$$f_1(x_1) - \varepsilon_1^2 - 2\|x - x_1\|_E \ge -2 \Rightarrow \phi_1(x) > f_1(x_1) - \varepsilon_1^2 - 2\|x - x_1\|_E .$$

Оцінимо величину $\sup_{x \in B_1(E)} |\phi_1(x)|$.

Розглянемо спочатку $\phi_1(0) = c_1$. Маємо

$$f_1(x_1) - \varepsilon_1^2 - 2\|x_1\|_E \ge \frac{5}{2} - \varepsilon_1^2 - 2 = \frac{1}{2} - \varepsilon_1^2 > 0.$$

Отже, $\phi_1(0) = c_1 > f_1(x_1) - \varepsilon_1^2 - 2\|x_1\|_E > 0$ і, очевидно, $\phi_1(0) = c_1 < f_1(0) < 6$.

Нехай $x \in E$: $\|x - x_1\|_E = 1$, тоді

$$f_1(x_1) - \varepsilon_1^2 - 2\|x - x_1\|_E = f_1(x_1) - \varepsilon_1^2 - 2 \geq \frac{1}{2} - \varepsilon_1^2 > 0.$$

Тоді, маємо $\phi_1(x) > 0$ при $\|x - x_1\|_E = 1$.

Далі, $6 > \frac{11}{2} > f_1(x_1) > \phi_1(x_1) > f_1(x_1) - \varepsilon_1^2 > \frac{5}{2} > 2$. Якщо $x \in E$: $\|x - x_1\|_E = 1$, то

$$\langle x_1^*, x - x_1 \rangle = \phi_1(x) - \phi_1(x_1) \geq -6.$$

Отже, $\left|\langle x_1^*, x \rangle_{E^*,E}\right| \leq 6$ при $\|x\|_E = 1$. Звідки $\|x_1^*\|_{E^*} \leq 6$ і для всіх $x \in B_1(E)$:

$$|\phi_1(x)| \leq |\langle x_1^*, x \rangle_{E^*,E}| + |c_1| \leq 6 + 6 \leq 12.$$

Задамо на E функціонал

$$f_2(x) = \begin{cases} f_1(x) + \frac{\varepsilon_1}{72}\phi_1(x) f_1(x_1), & x \in B_1(E), \\ +\infty, & x \in E \backslash B_1(E). \end{cases}$$

Зрозуміло, що f_2 — власний опуклий напівнеперервний знизу функціонал, що задовольняє на $B_1(E)$ умову Ліпшиця з константою $1 + \varepsilon_1$. Крім того,

$$\sup_{x \in B_1(E)} |f_2(x) - f_1(x)| \leq \varepsilon_1, \ \ \frac{11}{2} \geq f_2 \geq \frac{5}{2} \ \text{ на } \ B_1(E).$$

Тепер візьмемо точку $x_2 \in B_1(E)$ так, що

$$f_2(x_2) > \sup_{x \in B_1(E)} f_2(x) - \varepsilon_2^2.$$

Будуємо множину

$$M_2 = \left\{(x, \alpha) \in E \oplus \mathbb{R} : \ f_2(x_2) - \varepsilon_2^2 - 2\|x - x_2\|_E \geq \alpha \geq -2\right\}.$$

Множини $\operatorname{epi}(f_2)$ і M_2 не перетинаються, оскільки функціонал f_2 задовольняє умову Ліпшиця з константою $1 + \varepsilon_1 < 2$, і відповідно для $x \in B_1(E)$:

$$f_2(x) \geq f_2(x_2) - 2\|x - x_2\|_E > f_2(x_2) - \varepsilon_2^2 - 2\|x - x_2\|_E.$$

Отже, існує неперервний афінний функціонал

$$\phi_2(\cdot) = \langle x_2^*, \cdot \rangle_{E^*,E} + c_2 (x_2^* \in E^*, c_2 \in \mathbb{R})$$

на E такий, що

$$\forall x \in E : \ f_2(x) > \phi_2(x),$$

$$f_2(x_2) - \varepsilon_2^2 - 2\|x - x_2\|_E \geq -2 \Rightarrow \phi_2(x) > f_2(x_2) - \varepsilon_2^2 - 2\|x - x_2\|_E.$$

Оцінимо величину $\sup_{x\in B_1(E)} |\phi_2(x)|$. Маємо

$$f_2(x_2) - \varepsilon_2^2 - 2\|x_2\|_E \geq \frac{5}{2} - \varepsilon_2^2 - 2 = \frac{1}{2} - \varepsilon_2^2 > 0.$$

Отже, $\phi_2(0) = c_2 > f_2(x_2) - \varepsilon_2^2 - 2\|x_2\|_E > 0$ і, очевидно, $\phi_2(0) = c_2 < f_2(0) < 6$.

Нехай $x \in E$: $\|x - x_2\|_E = 1$, тоді

$$f_2(x_2) - \varepsilon_2^2 - 2\|x - x_2\|_E = f_2(x_2) - \varepsilon_2^2 - 2 \geq \frac{1}{2} - \varepsilon_2^2 > 0.$$

Маємо $\phi_2(x) > 0$ при $\|x - x_2\|_E = 1$.

Далі, $6 > \frac{11}{2} > f_2(x_2) > \phi_2(x_2) > f_2(x_2) - \varepsilon_2^2 > \frac{5}{2} > 2$. Якщо $x \in E$: $\|x - x_2\|_E = 1$, то

$$\langle x_2^*, x - x_2\rangle_{E^*,E} = \phi_2(x) - \phi_2(x_2) \geq -6.$$

Отже, $\left|\langle x_2^*, x\rangle_{E^*,E}\right| \leq 6$ при $\|x\|_E = 1$. Звідки $\|x_2^*\|_{E^*} \leq 6$ і для всіх $x \in B_1(E)$:

$$|\phi_2(x)| \leq |\langle x_2^*, x\rangle_{E^*,E}| + |c_2| \leq 6 + 6 \leq 12.$$

Задамо на E функціонал

$$f_3(x) = \begin{cases} f_2(x) + \frac{\varepsilon_2}{72}\phi_2(x) f_2(x_2), & x \in B_1(E), \\ +\infty, & x \in E\backslash B_1(E). \end{cases}$$

Зрозуміло, що f_3 — власний опуклий напівнеперервний знизу функціонал, що задовольняє на $B_1(E)$ умову Ліпшиця з константою $1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2$. Крім того,

$$\sup_{x\in B_1(E)} |f_3(x) - f_2(x)| \leq \varepsilon_2,\ \frac{11}{2} \geq f_3 \geq \frac{5}{2} \quad \text{на} \quad B_1(E).$$

Виконуючи аналогічні перетворення, отримаємо послідовності $x_n \in B_1(E)$, $x_n^* \in E^*$, $c_n \in \mathbb{R}$ і послідовність власних опуклих напівнеперервних знизу функціоналів f_n на E таких, що

$$f_n(x_n) > \sup_{x\in B_1(E)} f_n(x) - \varepsilon_n^2, \tag{4.5}$$

$$\phi_n(x_n) > f_n(x_n) - \varepsilon_n^2, (\phi_n(\cdot) = \langle x_n^*, \cdot\rangle_{E^*,E} + c_n), \tag{4.6}$$

$$f_n > \phi_n \quad \text{на} \quad E, \tag{4.7}$$

$$\sup_{x\in B_1(E)} |\phi_n(x)| \leq 12, \tag{4.8}$$

$$f_{n+1}(x) = \begin{cases} f_n(x) + \frac{\varepsilon_n}{72}\phi_n(x) f_n(x_n), & x \in B_1(E), \\ +\infty, & x \in E \backslash B_1(E). \end{cases} \tag{4.9}$$

Крім того, функціонал f_{n+1} задовольняє на множині $B_1(E)$ умову Ліпшиця з константою $1 + \varepsilon_1 + ... + \varepsilon_n$, і для $n \in \mathbb{N}$ виконуються нерівності

$$\sup_{x \in B_1(E)} |f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon_n, \ \ \frac{11}{2} \geq f_{n+1} \geq \frac{5}{2} \ \ \text{на} \ \ B_1(E).$$

Дійсно, для $x \in B_1(E)$

$$|f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leq \frac{\varepsilon_n}{72} f_n(x_n) |\phi_n(x)| \leq \frac{\varepsilon_n}{72} \cdot 6 \cdot 12 = \varepsilon_n$$

та

$$f_{n+1}(x) = f_1(x) + \sum_{k=1}^{n} (f_{k+1}(x) - f_k(x)) \leq$$

$$\leq f_1(x) + \sum_{k=1}^{n} |f_{k+1}(x) - f_k(x)| \leq 5 + \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k < 5 + \tfrac{1}{2} = \tfrac{11}{2},$$

$$f_{n+1}(x) = f_1(x) + \sum_{k=1}^{n} (f_{k+1}(x) - f_k(x)) \geq$$

$$\geq f_1(x) - \sum_{k=1}^{n} |f_{k+1}(x) - f_k(x)| \geq 3 - \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k < 3 + \tfrac{1}{2} = \tfrac{5}{2}.$$

Оскільки для $n < k$

$$\sup_{x \in B_1(E)} |f_k(x) - f_{n+1}(x)| \leq \sum_{i=n+1}^{k-1} \sup_{x \in B_1(E)} |f_{i+1}(x) - f_i(x)| \leq \sum_{i=n+1}^{k-1} \varepsilon_i < \varepsilon_n^2,$$

то

$$f_n \to g \ \text{ рівномірно на } \ B_1(E) \ \ \text{при} \ \ n \to \infty,$$

$$\sup_{x \in B_1(E)} |g(x) - f_{n+1}(x)| = \lim_{k \to \infty} \sup_{x \in B_1(E)} |f_k(x) - f_{n+1}(x)| \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} \varepsilon_i < \varepsilon_n^2. \tag{4.10}$$

Із (4.9) для $x \in B_1(E)$ випливає, що

$$f_{n+1}(x) = f_1(x) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon_k}{72} \phi_k(x) f_k(x_k) \, \forall n \in \mathbb{N},$$

і відповідно

$$g(x) = f_1(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{72} \phi_n(x) f_n(x_n) =$$

$$= f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{72} \langle x_n^*, x \rangle_{E^*,E} f_n(x_n) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{72} c_n f_n(x_n).$$

Причому числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{72} c_n f_n(x_n)$$

збігається до числа $c \in \mathbb{R}$, а ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{72} \langle x_n^*, \cdot \rangle_{E^*,E} f_n(x_n^*)$$

лінійних неперервних функціоналів на E рівномірно збігається на множині $B_1(E)$ до неперервного лінійного функціонала $h(\cdot) = \langle x^*, \cdot \rangle_{E^*,E}$ $(x^* \in E^*)$, і

$$\|x^*\|_{E^*} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < \varepsilon,$$

оскільки $\|x_n^*\|_{E^*} \leq 6$ і $\frac{11}{2} \geq f_n \geq \frac{5}{2}$ на $B_1(E)$. Тоді для $x \in B_1(E)$:

$$f(x) + \langle x^*, x \rangle_{E^*,E} + c = g(x).$$

Залишилось довести, що функціонал g досягає супремуму на $B_1(E)$. Для цього встановимо деякий «секвенційний» аналог нерівності (4.4) із леми 4.2 («секвенційним» аналогом нерівності (4.3) є, звичайно, нерівність (4.7)).

Лема 4.3. *Для послідовності функціоналів* (f_n) *виконуються нерівності*

$$\forall n \in \mathbb{N}: \sup_{x \in B_1(E)} f_{n+1}(x) > \sup_{x \in B_1(E)} f_n(x) + \frac{\varepsilon_n}{72} \left(\sup_{x \in B_1(E)} f_n(x) \right)^2 - 2\varepsilon_n^2. \quad (4.11)$$

Доведення. Помітимо, що

$$f_{n+1}(x_n) = f_n(x_n) + \frac{\varepsilon_n}{72} \phi_n(x_n) f_n(x_n) > f_n(x_n) + \frac{\varepsilon_n}{72} f_n^2(x_n) - \frac{\varepsilon_n^3}{72} f_n(x_n) >$$

$$> \sup_{x \in B_1(E)} f_n(x) - \varepsilon_n^2 + \frac{\varepsilon_n}{72} \left(\sup_{x \in B_1(E)} f_n(x) - \varepsilon_n^2 \right)^2 - \frac{\varepsilon_n^3}{72} \sup_{x \in B_1(E)} f_n(x) =$$

$$> \sup_{x\in B_1(E)} f_n(x) - \varepsilon_n^2 + \frac{\varepsilon_n}{72}\left(\sup_{x\in B_1(E)} f_n(x)\right)^2 - \frac{\varepsilon_n^3}{24}\sup_{x\in B_1(E)} f_n(x) + \frac{\varepsilon_n^5}{72} >$$

$$> \sup_{x\in B_1(E)} f_n(x) + \frac{\varepsilon_n}{72}\left(\sup_{x\in B_1(E)} f_n(x)\right)^2 - \varepsilon_n^2\left\{1 + \frac{\varepsilon_n}{24}\sup_{x\in B_1(E)} f_n(x)\right\} >$$

$$> \sup_{x\in B_1(E)} f_n(x) + \frac{\varepsilon_n}{72}\left(\sup_{x\in B_1(E)} f_n(x)\right)^2 - \varepsilon_n^2\left\{1 + \frac{11}{96}\right\} >$$

$$> \sup_{x\in B_1(E)} f_n(x) + \frac{\varepsilon_n}{72}\left(\sup_{x\in B_1(E)} f_n(x)\right)^2 - 2\varepsilon_n^2.$$

Звідки отримуємо бажані нерівності. □

Лема 4.4. *Для послідовності функціоналів* (ϕ_n) *виконуються нерівності*

$$\forall n < k: \quad \phi_n(x_k) > \sup_{x\in B_1(E)} f_n(x) - 144\varepsilon_n. \tag{4.12}$$

Доведення. Доведення. При $n < k$ виконується співвідношення

$$f_{n+1}(x_k) = f_k(x_k) + \sum_{i=n+1}^{k-1}(f_i(x_k) - f_{i+1}(x_k)) >$$

$$> \sup_{x\in B_1(E)} f_k(x) - \varepsilon_k^2 - \sum_{i=n+1}^{k-1}\varepsilon_i > \sup_{x\in B_1(E)} f_k(x) - \varepsilon_k^2 - \varepsilon_n^2.$$

Із нерівності

$$\sup_{x\in B_1(E)} f_{n+1}(x) = \sup_{x\in B_1(E)} |f_{n+1}(x) - f_k(x) + f_k(x)| \le$$

$$\le \sup_{x\in B_1(E)} f_k(x) + \sup_{x\in B_1(E)} |f_{n+1}(x) - f_k(x)| \le \sup_{x\in B_1(E)} f_k(x) + \varepsilon_n^2$$

випливає, що

$$f_{n+1}(x_k^*) > \sup_{x\in B_1(E)} f_{n+1}(x) - \varepsilon_n^2 - \varepsilon_k^2 - \varepsilon_n^2 \ge \sup_{x\in B_1(E)} f_{n+1}(x) - 3\varepsilon_n^2. \tag{4.13}$$

Далі, при $n < k$

$$f_{n+1}(x_k) = f_n(x_k) + \frac{\varepsilon_n}{72}\phi_n(x_k)\, f_n(x_k) \le$$

$$\le \sup_{x\in B_1(E)} f_n(x) + \frac{\varepsilon_n}{72}\phi_n(x_k)\, f_n(x_k). \tag{4.14}$$

З іншого боку, врахувавши (4.11) і (4.13), отримаємо

$$f_{n+1}(x_k) > \sup_{x\in B_1(E)} f_{n+1}(x) - 3\varepsilon_n^2 > \\ > \sup_{x\in B_1(E)} f_n(x) + \frac{\varepsilon_n}{72}\left(\sup_{x\in B_1(E)} f_n(x)\right)^2 - 5\varepsilon_n^2. \quad (4.15)$$

Із нерівностей (4.14) і (4.15) випливає, що при $n < k$

$$\frac{\varepsilon_n}{72}\varphi_n(x_k) f_n(x_k) > \frac{\varepsilon_n}{72}\left(\sup_{x\in B_1(E)} f_n(x)\right)^2 - 5\varepsilon_n^2.$$

Звідки маємо

$$\varphi_n(x_k) > \frac{1}{f_n(x_k)}\left(\sup_{x\in B_1(E)} f_n(x)\right)^2 - \frac{360}{f_n(x_k)}\varepsilon_n \geq \\ \geq \frac{1}{\sup_{x\in B_1(E)} f_n(x)}\left(\sup_{x\in B_1(E)} f_n(x)\right)^2 - \frac{720}{5}\varepsilon_n = \sup_{x\in B_1(E)} f_n(x) - 144\varepsilon_n$$

при $n < k$. □

Покажемо, нарешті, що функціонал g досягає супремуму на $B_1(E)$.

Врахувавши нерівності (4.11) та (4.12), отримаємо

$$\forall n < k: \ \varphi_n(x_k) > \sup_{x\in B_1(E)} f_n(x) - 144\varepsilon_n \geq \\ \geq \sup_{x\in B_1(E)} g(x) - 144\varepsilon_n - \varepsilon_n^2 > \sup_{x\in B_1(E)} g(x) - 145\varepsilon_n.$$

Нехай $\bar{x} \in B_1(E)$ — $\sigma(E, E^*)$-гранична точка послідовності $x_n \in B_1(E)$. Тоді з неперервності функціоналів φ_n у топології $\sigma(E, E^*)$ випливає, що

$$\forall n \in \mathbb{N}: \ \varphi_n(\bar{x}) \geq \sup_{x\in B_1(E)} g(x) - 145\varepsilon_n. \quad (4.16)$$

Із нерівностей (4.7) та (4.16) отримаємо

$$\forall n \in \mathbb{N}: \ f_n(\bar{x}^*) \geq \sup_{x\in B_1(E)} g(x) - 145\varepsilon_n. \quad (4.17)$$

Перейшовши в нерівності (4.17) до границі при $n \to \infty$, отримаємо, що

$$g(\bar{x}) \geq \sup_{x\in B_1(E)} g(x),$$

тобто, функціонал g досягає супремуму на множині $B_1(E)$ в точці $\bar{x} \in B_1(E)$. Із леми 4.1 випливає, що g досягає супремуму на $B_1(E)$ у деякій крайній точці множини $B_1(E)$. □

Перенесемо лінійний варіаційний принцип на екстремальні задачі виду

$$f \to \sup_X,$$

де X — $\sigma(E, E^*)$-компактна опукла підмножина банахова простору E, f — власний опуклий напівнеперервний знизу та ліпшицевий на множині X функціонал.

Теорема 4.2. *Нехай $f : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ — власний опуклий напівнеперервний знизу функціонал, що задовольняє умову Ліпшиця на $\sigma(E, E^*)$-компактній опуклій множині $X \subseteq \operatorname{dom}(f)$. Тоді для довільного $\varepsilon > 0$ існує функціонал $x^* \in E^*$ такий, що $\|x^*\|_{E^*} < \varepsilon$ і функціонал $f + x^*$ досягає супремуму на X у крайній точці множини X.*

Доведення. Без обмеження загальності будемо вважати, що $0 \in X \subseteq B_1(E)$. Дійсно, якщо теорема 4.2 справедлива для множини X, то вона буде справедливою і для довільного зсуву $X + y$ ($y \in E$) цієї множини. Нехай f — заданий на множині $X + y$ функціонал, який задовольняє умови теореми 4.2. Покладемо $\bar{f}(x) = f(x + y)$ $\forall x^* \in X$. Тоді для довільного $\varepsilon > 0$ існує $x^* \in E^*$ ($\|x^*\|_{E^*} < \varepsilon$) та $x_0 \in X$: $\bar{f}(x) + \langle x^*, x\rangle_{E^*,E} \le \bar{f}(x_0) + \langle x^*, x_0\rangle_{E^*,E}$ $\forall x \in X$. Додавши $\langle x^*, y\rangle_{E^*,E}$ до обох частин останньої нерівності, отримаємо, що у точці $x_0 + y$ функціонал $f + x$ досягає свого супремуму на множині $X + y$.

Аналогічно доводимо, що з припущення про справедливість твердження для X випливає його справедливість для кратного αX ($\alpha > 0$).

Далі міркуємо як і при доведенні теореми 4.1, тільки обираємо точки x_n з множини X. □

4.1.3 Варіант лінійного варіаційного принципу для спряженого простору

Сформулюємо один корисний варіант лінійного варіаційного принципу. Нехай $(E^*, \|\cdot\|_{E^*})$ — простір, спряжений до банахова простору $(E, \|\cdot\|_E)$. Має місце

Теорема 4.3. *Нехай $f : E^* \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ — власний опуклий $\sigma(E^*, E)$-напівнеперервний знизу функціонал, що задовольняє умову Ліпшиця на $\sigma(E^*, E)$-компактній опуклій множині $X^* \subseteq \operatorname{dom}(f)$. Тоді для довільного $\varepsilon > 0$ існує $x \in E$ такий, що $\|x\|_E < \varepsilon$ і функціонал $f + x$ досягає супремуму на X^* у крайній точці множини X^*.*

Доведення. Міркування повністю аналогічні використаним при доведенні теорем 4.1 і 4.2. Єдина відмінність — це, звичайно, робота з двоїстою парою (E^*, E) замість (E, E^*). □

4.1.4 Лінійний варіаційний принцип для векторної максимізації

Розглянемо одне застосування теореми 4.2 до опуклих задач векторної оптимізації [122].

Нехай $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ — дійсні банахові простори, простір F частково упорядковано замкненим опуклим і гострим конусом $K \subseteq F$. Позначимо через $K^* = \{y^* \in F^* \ : \ \langle y^*, y\rangle_{F^*,F} \geq 0 \quad \forall y \in K\}$ спряжений до K конус.

Розглянемо непорожню множину $X \subseteq E$ і оператор $f : E \to F$. Будемо вивчати задачу векторної максимізації

$$f \to K\text{-}\max_X, \tag{4.18}$$

тобто, задачу пошуку таких точок $x_0 \in X$, що $f(X) \cap (f(x_0) + K\backslash\{0\}) = \emptyset$.

Множину розв'язків задачі (4.18) позначимо $K\text{-}\operatorname{argmax}(f, X)$, а елементи цієї множини будемо називати максимальними за Парето (ефективними) розв'язками.

Означення 4.1. Оператор $f : E \to F$ називаємо K-опуклим, якщо

$$\forall\,(x_1,\ x_2 \in E,\ \lambda \in [0,1]) :\ f(\lambda x_1 + (1-\lambda)\,x_2) \in \lambda f(x_1) + (1-\lambda)\,f(x_2) - K.$$

Відносно поняття K-напівнеперервності знизу операторів $f : E \to F$ ми слідуємо роботі [92].

Візьмемо лінійний функціонал $y^* \in K^*$ та розглянемо функціонал $g : E \to \mathbb{R}$, що діє за правилом $g(x) = \langle y^*, f(x)\rangle_{F^*,F}$. Відомо, що коли відображення $f : E \to F$ є K-опуклим та K-напівнеперервним знизу, то функціонал $g : E \to \mathbb{R}$ опуклий та напівнеперервний знизу.

Легко показати, що коли $(K^*)^\circ = \{y^* \in K^* \ : \ \langle y^*, y\rangle_{F^*,F} > 0 \quad \forall y \in K\backslash\{0\}\} \neq \emptyset$; множина X компактна в топології $\sigma(E, E^*)$; відображення $f : E \to F$ — K-опукле та K-напівнеперервне знизу, то задача векторної мінімізації

$$f \to K\text{-}\min_X, \tag{4.19}$$

тобто, задача пошуку таких точок $x_0 \in X$, що $f(X) \cap (f(x_0) - K\backslash\{0\}) = \emptyset$ має розв'язки.

На відміну від задачі (4.19), для задачі (4.18) не існує такої очевидної теореми існування. При сформульованих умовах задача максимізації (4.18) досить часто нерозв'язна. Для таких нескінченновимірних опуклих задач векторної максимізації виникає природне питання: чи існують такі, як завгодно малі,

адитивні збурення критерия якості за допомогою лінійних неперервних операторів, що збурена задача має ефективні розв'язки?

У наступній теоремі дається часткова відповідь на дане питання.

Теорема 4.4. *Нехай* E, F — *банахові простори;* $K \subseteq F$ — *замкнений опуклий гострий конус, причому*

$$(K^*)^\circ = \{y^* \in K^* \,:\, \langle y^*, y\rangle_{F^*,F} > 0 \;\; \forall y \in K\backslash\{0\}\} \neq \emptyset;$$

множина $X \subseteq E$ *опукла і* $\sigma(E, E^*)$*-компактна; оператор* $f : E \to F$ — K*-опуклий,* K*-напівнеперервний знизу та задовольняє умову Ліпшиця на множині* X*. Тоді для довільного* $\delta > 0$ *існує оператор* $A \in L(E, F)$ *такий, що* $\|A\|_{L(E,F)} < \delta$, $\dim R(A) = 1$, *задача* $f + A \to K\text{-}\max_X$ *має ефективні розв'язки, причому* $\operatorname{ext}(X) \cap K\text{-}\operatorname{argmax}(f + A, X) \neq \emptyset$.

Доведення. Візьмемо довільний лінійний функціонал $e^* \in (K^*)^\circ$ та розглянемо композицію $g = e^* \circ f$. Побудований функціонал $g : E \to \mathbb{R}$ — опуклий, напівнеперервний знизу та ліпшицевий на множині X.

За теоремою 4.2 для довільного $\varepsilon > 0$ існує функціонал $x^* \in E^*$ такий, що $\|x^*\|_{E^*} < \varepsilon$ та $g + x^*$ досягає максимуму на множині X у крайній точці $x_0 \in \operatorname{ext}(X)$.

Далі беремо такий вектор $e \in K\backslash\{0\}$, що $\langle e^*, e\rangle_{F^*,F} = 1$, і покладаємо

$$A : x \mapsto \langle x^*, x\rangle_{E^*,E}\, e.$$

Тоді маємо $A \in L(E, F)$, $\dim R(A) = 1$ та $\|A\|_{L(E,F)} = \|e\|_F \|x^*\|_{E^*} < \delta$, якщо $\varepsilon \in (0, \delta/\|e\|_F)$, при цьому $x^* = e^* \circ A$.

Отже,

$$\forall x \in X : \;\; e^* \circ (f + A)(x_0) \geq e^* \circ (f + A)(x)\,. \tag{4.20}$$

Покажемо, що $x_0 \in X$ — розв'язок задачі $f + A \to K\text{-}\max_X$. Дійсно, інакше існує така точка $x' \in X$, що $f(x') + Ax' \in f(x_0) + Ax_0 + K\backslash\{0\}$. Звідки маємо

$$e^* \circ (f(x') + Ax') > e^* \circ (f(x_0) + Ax_0)\,,$$

що суперечить (4.20). □

Отже, для нескінченновимірних опуклих задач векторної максимізації доведено, що за умови слабкої компактності допустимої області існує таке як завгодно мале адитивне збурення K-опуклого, K-напівнеперервного знизу та ліпшицевого критерія якості лінійним неперервним оператором, що збурена задача має ефективні розв'язки.

4.2 Неможливість досягнення лінійними збуреннями існування розв'язків

У двох наступних параграфах ми покажемо, що для задачі опуклої максимізації у разі відсутності слабкої компактності замкненої, опуклої і обмеженої допустимої множини існування оптимальних розв'язків та, більш того, існування лінійних збурень, які забезпечують розв'язність, суттєво залежить від геометричних властивостей допустимої множини.

Означення 4.2. Опуклий функціонал $f : E \to \mathbb{R}$ називаємо локально рівномірно опуклим, якщо для довільних $\varepsilon > 0$ і $x \in E$ виконується нерівність

$$\inf\left\{\frac{1}{2}f(y) + \frac{1}{2}f(x) - f\left(\frac{y+x}{2}\right) : \ y \in E, \ \|x-y\|_E \geq \varepsilon\right\} > 0.$$

Можна показати, що локальна рівномірна опуклість функціоналу $f : E \to \mathbb{R}$ рівносильна властивості: для довільних послідовності $x_n \in E$ і точки $x \in E$ таких, що $\frac{1}{2}f(x_n) + \frac{1}{2}f(x) - f\left(\frac{x_n+x}{2}\right) \to 0$ при $n \to \infty$, маємо $\|x_n - x\|_E \to 0$ при $n \to \infty$ [90].

Норму $\|\cdot\|$ на лінійному просторі E називають локально рівномірно опуклою [90], якщо для довільних $\varepsilon > 0$ і $x \in E$, $\|x\| = 1$ виконується нерівність

$$\inf\left\{1 - \left\|\frac{y+x}{2}\right\| : \ y \in E, \ \|y\| = 1, \ \|x-y\| \geq \varepsilon\right\} > 0.$$

Слід відмітити, що локально рівномірно опукла норма через властивість однорідності не буде локально рівномірно опуклим функціоналом у розумінні означення 4.2.

Нехай A опукла підмножина банахова простору $(E, \|\cdot\|_E)$. Точку $x' \in A$ називають строго виставленою точкою множини A, якщо існує $x^* \in E^*$ такий, що $\langle x^*, x'\rangle_{E^*,E} = \sup_{x\in A}\langle x^*, x\rangle_{E^*,E}$, та для послідовності $x_n \in A$ із $\langle x^*, x_n\rangle_{E^*,E} \to \langle x^*, x'\rangle_{E^*,E}$ випливає $\|x_n - x'\|_E \to 0$ [90].

Лема 4.5. *Нехай $f : E \to \mathbb{R}$ локально рівномірно опуклий функціонал, що задовольняє умову Ліпшиця на обмежених множинах та має обмежені лебегові множини $\{f \leq c\}$; $A \subseteq E$ — обмежена опукла множина,* $\mathrm{int}A \neq \emptyset$. *Якщо функціонал f досягає в точці $x' \in A$ свого максимуму на множині A, то $x' \in A$ — строго виставлена точка множини A.*

Доведення. Нехай функціонал f досягає свого максимуму на множині A у точці $x' \in A$. Розглянемо множину $B = \{x \in E : \ f(x) \leq f(x')\}$. Множина B опукла, обмежена та $A \subseteq B$.

Покажемо, що $x' \in \mathrm{fr}B$, тобто, x' належить межі множини B. Візьмемо точку $y \in E$. Припустимо, що $f(x'+y) \leq f(x')$ та $f(x'-y) \leq f(x')$. Тоді з

нерівності

$$f(x') \le \frac{1}{2} f(x' + y) + \frac{1}{2} f(x' - y) \le f(x')$$

випливає, що $f(x') = f(x' + y) = f(x' - y)$. Останнє суперечить строгій опуклості функціонала f. Отже, маємо $f(x' + y) > f(x')$ або $f(x' - y) > f(x')$, тобто, $x' + y \notin B$ або $x' - y \notin B$. Тоді, $x' \in \mathrm{fr} B$.

Візьмемо функціонал $x^* \in E^* \setminus \{0\}$ такий, що $\langle x^*, x' \rangle_{E^*,E} = \sup_{x \in B} \langle x^*, x \rangle_{E^*,E}$. Існування $x^* \in E^*$ випливає з класичної теореми про віддільність [53, 123].

Оскільки $\langle x^*, x' \rangle_{E^*,E} = \sup_{x \in B} \langle x^*, x \rangle_{E^*,E}$ і $x' \in A \subseteq B$, то

$$\langle x^*, x' \rangle_{E^*,E} = \sup_{x \in A} \langle x^*, x \rangle_{E^*,E}.$$

Розглянемо для $\varepsilon > 0$ множину $B_\varepsilon = \{x \in E : \ f(x) < f(x') - \varepsilon\}$. Ясно, що $B_\varepsilon \subseteq B$ та $\sup\limits_{x \in B_\varepsilon} \langle x^*, x \rangle_{E^*,E} \le \sup\limits_{x \in B} \langle x^*, x \rangle_{E^*,E} = \langle x^*, x' \rangle_{E^*,E}$.

Покажемо, що насправді $\forall \varepsilon > 0$:

$$\sup_{x \in B_\varepsilon} \langle x^*, x \rangle_{E^*,E} < \langle x^*, x' \rangle_{E^*,E}. \tag{4.21}$$

Міркуємо від супротивного. Нехай для деякого $\varepsilon > 0$

$$\sup_{x \in B_\varepsilon} \langle x^*, x \rangle_{E^*,E} = \langle x^*, x' \rangle_{E^*,E}.$$

Тоді існує послідовність (x_n) така, що $\langle x^*, x_n \rangle_{E^*,E} \to \langle x^*, x' \rangle_{E^*,E}$, $f(x_n) < f(x') - \varepsilon$. Існує число $L > \varepsilon$ таке, що функціонал f задовольняє на множині $B + B_1(E)$ умову Ліпшиця з константою L.

Візьмемо точку $y \in S_1(E)$ таку, що $\langle x^*, y \rangle_{E^*,E} > 0$. Із ліпшицевості f на $B + B_1(E)$ випливає, що

$$f(x_n) - \frac{\varepsilon}{2} \le f\left(x_n + \frac{\varepsilon}{2L} y\right) \le f(x_n) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отже, $x_n + \frac{\varepsilon}{2L} y \in B$.

Оскільки

$$\left\langle x^*, x_n + \frac{\varepsilon}{2L} y \right\rangle_{E^*,E} \to \langle x^*, x' \rangle_{E^*,E} + \frac{\varepsilon}{2L} \langle x^*, y \rangle_{E^*,E} > \langle x^*, x' \rangle_{E^*,E},$$

то $\sup_{x \in B} \langle x^*, x \rangle_{E^*,E} > \langle x^*, x' \rangle_{E^*,E}$. Отримали протиріччя. Отже, має місце (4.21).

Розглянемо тепер послідовність $x_n \in A$ таку, що $\langle x^*, x_n \rangle_{E^*,E} \to \langle x^*, x' \rangle_{E^*,E}$. Тоді, урахувавши (4.21), отримаємо

$$f(x_n) \to f(x') \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{4.22}$$

Аналогічно, з $\left\langle x^*, \frac{x_n+x'}{2}\right\rangle_{E^*,E} \to \langle x^*, x'\rangle_{E^*,E}$ випливає, що

$$f\left(\frac{x_n+x'}{2}\right) \to f(x') \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{4.23}$$

Із (4.22) і (4.23) робимо висновок, що

$$\frac{1}{2}f(x_n) + \frac{1}{2}f(x') - f\left(\frac{x_n+x'}{2}\right) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Оскільки функціонал f локально рівномірно опуклий, то $\|x_n - x'\|_E \to 0$ при $n \to \infty$. Отже, $x' \in A$ — строго виставлена точка множини A. □

Наведемо необхідні нам відомості, пов'язані з властивістю Радона–Нікодима.

Нехай $(E, \|\cdot\|_E)$ — банахів простір. Підмножину $A \subseteq E$ називають гострою, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує точка $x_\varepsilon \in A$ така, що $x_\varepsilon \notin \overline{\text{conv}}\{A\backslash B_\varepsilon(x_\varepsilon)\}$. Відносно слабко компактні підмножини банахових просторів є гострими [90]. Точку $x \in A$ називають гострою, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ $x \notin \overline{\text{conv}}\{A\backslash B_\varepsilon(x)\}$.

Покажемо, що строго виставлена точка $x' \in A$ є гострою. Дійсно, якщо припустити протилежне, то $\exists \varepsilon > 0$: $x' \in \overline{\text{conv}}\{A\backslash B_\varepsilon(x')\}$. Оскільки $x' \in A$ строго виставлена, то

$$\text{diam} S(x^*, \delta, A) \to 0 \quad \text{при} \quad \delta \to +0,$$

де $S(x^*, \delta, A) = \{x \in A : \langle x^*, x\rangle_{E^*,E} \geq \langle x^*, x'\rangle_{E^*,E} - \delta\}$ — зрізка множини A, $x^* \in E^*$ — такий функціонал, що $\langle x^*, x'\rangle_{E^*,E} = \sup_{x\in A}\langle x^*, x\rangle_{E^*,E}$. Отже, $\exists \delta > 0$: $\text{diam} S(x^*, \delta, A) < \frac{\varepsilon}{2}$. Зрозуміло, що тоді маємо

$$B_\varepsilon(x') \supseteq S(x^*, \delta, A).$$

Звідки

$$\overline{\text{conv}}\{A\backslash B_\varepsilon(x')\} \subseteq \overline{\text{conv}}\{A\backslash S(x^*, \delta, A)\}.$$

Нарешті, $x' \in \overline{\text{conv}}\{A\backslash S(x^*, \delta, A)\}$, що тягне за собою нерівність $\langle x^*, x'\rangle_{E^*,E} \leq \langle x^*, x'\rangle_{E^*,E} - \delta$. Отримали протиріччя.

Кажуть, що банахів простір $(E, \|\cdot\|_E)$ має властивість Радона–Нікодима, якщо кожна непорожня обмежена множина з E є гострою.

У роботі [124] (див. також [90]) доведено, що коли банахів простір $(E, \|\cdot\|_E)$ не має властивості Радона–Нікодима, то існує еквівалентна норма $|||\cdot|||$ на E така, що нова одинична куля $B(|||\cdot|||) = \{x \in E : |||x||| \leq 1\}$ не є гострою. Куля $B(|||\cdot|||)$ не містить гострих, а отже, строго виставлених точок.

Нагадаємо, що банахів простір $(E, \|\cdot\|_E)$ називають слабко компактно поро-

дженим простором (WCG-простором), якщо існує слабко компактна множина $K \subseteq E$, лінійна оболонка якої щільна в E. Найбільш простим прикладом банахових WCG-просторів є рефлексивні простори. Кожен сепарабельний банахів простір є слабко компактно породженим (навіть компактно породженим).

Відмітимо, що усі спряжені WCG-простори (зокрема, усі рефлексивні банахові простори) мають властивість Радона–Нікодима. А, наприклад, простори c_0, $C([0,1])$ і $L_1(0,1)$ не мають властивості Радона–Нікодима.

Важливу роль у міркуваннях цього пункту грає наступна теорема С. Л. Троянського про еквівалентне перенормування банахових слабко компактно породжених просторів [90].

Теорема 4.5. *Кожен банахів WCG-простір має еквівалентну локально рівномірно опуклу норму.*

Тепер сформулюємо основний результат.

Теорема 4.6. *Нехай* $(E, \|\cdot\|_E)$ *— банахів WCG-простір, що не має властивості Радона–Нікодима. Тоді існують такі лінійно гомеоморфна одиничній кулі* $B_1(E)$ *множина* $X \subseteq E$ *і опуклий функціонал* $f : E \to \mathbb{R}$*, який задовольняє умову Ліпшиця на* X*, що для довільного* $x^* \in E^*$ *функціонал* $f + x^*$ *не досягає супремуму на множині* X*.*

Доведення. Оскільки простір $(E, \|\cdot\|_E)$ не має властивості Радона–Нікодима, то, за згаданим результатом Девіса і Фелпса [124], на E можна задати еквівалентну норму $|||\cdot|||$ таку, що куля $\{x \in E : |||x||| \le 1\}$ не є гострою. Покладемо $X = \{x \in E : |||x||| \le 1\}$.

За теоремою С. Л.Троянського (див. теорему 4.5) на E можна задати еквівалентну локально рівномірну норму $\|\cdot\|_*$. Покладемо $f(x) = \|x\|_*^2$, $x \in E$. Ясно, що $\forall x^* \in E^*$ функціонал $f + x^*$ є ліпшицевим на обмежених множинах та має обмежені лебегові множини $\{f + x^* \le c\}$.

Елементарні, але дещо громіздкі, викладки показують, що функціонал $f + x^*$ локально рівномірно опуклий.

Дійсно, достатньо лише довести локально рівномірну опуклість функціонала f, тобто показати, що для довільних $\varepsilon > 0$ і $x \in E$ існує $\delta = \delta(x, \varepsilon) > 0$ таке, що виконується нерівність

$$\frac{1}{2}f(y) + \frac{1}{2}f(x) - \delta \ge f\left(\frac{y+x}{2}\right) \quad \forall y \in E : \quad \|x - y\|_* \ge \varepsilon\,. \tag{4.24}$$

Норма $\|\cdot\|_*$ локально рівномірно опукла, тобто для довільних $\varepsilon' > 0$ і $x \in E\backslash\{0\}$ існує $\delta' = \delta'(x, \varepsilon') > 0$ таке, що виконується нерівність

$$1 - \delta' \ge \frac{1}{2}\left\| y + \frac{x}{\|x\|_*} \right\|_* \quad \forall y \in E : \quad \|y\|_* = 1\,, \quad \left\| \frac{x}{\|x\|_*} - y \right\|_* \ge \varepsilon'\,.$$

Нехай $x = 0$. Тоді $\forall y \in E$: $\|y\|_* \geq \varepsilon$

$$f\left(\frac{y+x}{2}\right) = \left\|\frac{y+x}{2}\right\|_*^2 = \left\|\frac{y}{2}\right\|_*^2 \leq \frac{\|y\|_*^2}{2} - \frac{\varepsilon^2}{4} = \frac{1}{2}f(y) - \frac{\varepsilon^2}{4}.$$

Отже, покладемо в (4.24) $\delta = \delta(0, \varepsilon) = \varepsilon^2/4$.

Нехай $x \in E\backslash\{0\}$. Оберемо $\varepsilon > 0$ і довільний елемент $y \in E$ такий, що $\|x - y\|_* \geq \varepsilon$. Можливі варіанти:

$$\|y\|_* \geq \|x\|_* \quad \text{або} \quad \|y\|_* < \|x\|_*.$$

Розглянемо спочатку перший, тобто припустимо, що $\|y\|_* \geq \|x\|_*$. Має місце нерівність

$$\begin{aligned}\varepsilon \leq \|x - y\|_* &\leq \left\|x - \frac{\|x\|_*}{\|y\|_*}y\right\|_* + \left\|\frac{\|x\|_*}{\|y\|_*}y - y\right\|_* = \\ &= \left\|x - \frac{\|x\|_*}{\|y\|_*}y\right\|_* + |\|x\|_* - \|y\|_*| = \left\|x - \frac{\|x\|_*}{\|y\|_*}y\right\|_* + \|y\|_* - \|x\|_*.\end{aligned}$$

Звідси випливає, що

$$\frac{\varepsilon}{2} \leq \left\|x - \frac{\|x\|_*}{\|y\|_*}y\right\|_* \quad \text{або} \quad \frac{\varepsilon}{2} \leq \|y\|_* - \|x\|_*.$$

Припустимо, що

$$\frac{\varepsilon}{2} \leq \left\|x - \frac{\|x\|_*}{\|y\|_*}y\right\|_*.$$

Оцінимо зверху $f\left(\frac{y+x}{2}\right)$. Маємо

$$\begin{aligned}f\left(\frac{y+x}{2}\right) = \left\|\frac{y+x}{2}\right\|_*^2 &= \left\|\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\|x\|_*}{\|y\|_*}\right)y + \frac{1}{2}\left(x + \frac{\|x\|_*}{\|y\|_*}y\right)\right\|_*^2 \leq \\ &\leq \left(\frac{\|y\|_* - \|x\|_*}{2} + \frac{1}{2}\left\|x + \frac{\|x\|_*}{\|y\|_*}y\right\|_*\right)^2 = \\ = \left(\frac{\|y\|_* - \|x\|_*}{2}\right)^2 &+ \frac{\|y\|_* - \|x\|_*}{2}\left\|x + \frac{\|x\|_*}{\|y\|_*}y\right\|_* + \frac{1}{4}\left\|x + \frac{\|x\|_*}{\|y\|_*}y\right\|_*^2 \leq \\ &\leq \left(\frac{\|y\|_* - \|x\|_*}{2}\right)^2 + (\|y\|_* - \|x\|_*)\|x\|_* + \frac{1}{4}\left\|x + \frac{\|x\|_*}{\|y\|_*}y\right\|_*^2 \leq \\ &\leq \left(\frac{\|y\|_* - \|x\|_*}{2}\right)^2 + (\|y\|_* - \|x\|_*)\|x\|_* + \frac{1}{4}\left\|x + \frac{\|x\|_*}{\|y\|_*}y\right\|_*^2 \leq\end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{2}\left(\|y\|_* - \|x\|_*\right)^2 + \left(\|y\|_* - \|x\|_*\right)\|x\|_* + \frac{1}{4}\left\|x + \frac{\|x\|_*}{\|y\|_*}y\right\|_*^2 =$$

$$= \frac{\|y\|_*^2 - \|x\|_*^2}{2} + \frac{1}{4}\left\|x + \frac{\|x\|_*}{\|y\|_*}y\right\|_*^2. \quad (4.25)$$

Таким чином, урахувавши (4.25), маємо

$$\frac{1}{2}f(y)+\frac{1}{2}f(x)-f\left(\frac{y+x}{2}\right) = \frac{\|y\|_*^2 + \|x\|_*^2}{2} - \left\|\frac{y+x}{2}\right\|_*^2 \geq \|x\|_*^2 - \frac{1}{4}\left\|x + \frac{\|x\|_*}{\|y\|_*}y\right\|_*^2.$$

Розглянемо $\left\|x + \frac{\|x\|_*}{\|y\|_*}y\right\|_*$. Візьмемо $\varepsilon' > 0$ так, щоб $\|x\|_*\varepsilon' \leq \varepsilon/2$. Маємо

$$\frac{1}{2}\left\|x + \frac{\|x\|_*}{\|y\|_*}y\right\|_* = \frac{\|x\|_*}{2}\left\|\frac{x}{\|x\|_*} + \frac{y}{\|y\|_*}\right\|_* \leq \|x\|_*\left(1 - \delta'(x,\varepsilon')\right),$$

оскільки

$$\left\|\frac{x}{\|x\|_*} - \frac{y}{\|y\|_*}\right\|_* = \frac{1}{\|x\|_*}\left\|x - \frac{\|x\|_*}{\|y\|_*}y\right\|_* \geq \frac{\varepsilon}{2\|x\|_*} \geq \varepsilon'.$$

Звідси отримаємо

$$\frac{1}{4}\left\|x + \frac{\|x\|_*}{\|y\|_*}y\right\|_*^2 \leq \|x\|_*^2\left(1 - \delta'(x,\varepsilon')\right)^2 = \|x\|_*^2 - 2\|x\|_*^2\delta'(x,\varepsilon') +$$

$$+ \|x\|_*^2\left(\delta'(x,\varepsilon')\right)^2 \leq \|x\|_*^2 - \|x\|_*^2\left(\delta'(x,\varepsilon')\right)^2.$$

Отже,

$$\frac{1}{2}f(y) + \frac{1}{2}f(x) - f\left(\frac{y+x}{2}\right) \geq$$

$$\geq \|x\|_*^2 - \frac{1}{4}\left\|x + \frac{\|x\|_*}{\|y\|_*}y\right\|_*^2 \geq \|x\|_*^2\left(\delta'(x,\varepsilon')\right)^2. \quad (4.26)$$

Якщо $\varepsilon/2 \leq \|y\|_* - \|x\|_*$, то

$$\frac{1}{2}f(y) + \frac{1}{2}f(x) - f\left(\frac{y+x}{2}\right) = \frac{\|y\|_*^2 + \|x\|_*^2}{2} - \frac{\|y+x\|_*^2}{4} \geq$$

$$\geq \frac{\|y\|_*^2 + \|x\|_*^2}{2} - \frac{\left(\|y\|_* + \|x\|_*\right)^2}{4} = \frac{\left(\|y\|_* - \|x\|_*\right)^2}{4} \geq \frac{\varepsilon^2}{16}. \quad (4.27)$$

Припустимо тепер, що $\|y\|_* < \|x\|_*$. Має місце нерівність

$$\varepsilon \le \|x-y\|_* \le \left\|x - \frac{\|y\|_*}{\|x\|_*}x\right\|_* + \left\|\frac{\|y\|_*}{\|x\|_*}x - y\right\|_* =$$
$$= |\|x\|_* - \|y\|_*| + \left\|\frac{\|y\|_*}{\|x\|_*}x - y\right\|_* = \|x\|_* - \|y\|_* + \left\|\frac{\|y\|_*}{\|x\|_*}x - y\right\|_*.$$

Покладемо $\varepsilon' = \min\left\{\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2\|x\|_*}, \frac{\|x\|_*}{2}\right\}$.

Якщо $\varepsilon' > \|x\|_* - \|y\|_*$, то

$$\left\|\frac{\|y\|_*}{\|x\|_*}x - y\right\|_* \ge \varepsilon - (\|x\|_* - \|y\|_*) > \varepsilon - \varepsilon' \ge \frac{\varepsilon}{2} \ge \|x\|_*\varepsilon' > \|y\|_*\varepsilon'.$$

Розглянемо $\left\|y + \frac{\|y\|_*}{\|x\|_*}x\right\|_*$. Візьмемо $\varepsilon' > 0$ так, щоб $\|x\|_*\varepsilon' \le \varepsilon/2$. Маємо

$$\frac{1}{2}\left\|y + \frac{\|y\|_*}{\|x\|_*}x\right\|_* = \frac{\|y\|_*}{2}\left\|\frac{y}{\|y\|_*} + \frac{x}{\|x\|_*}\right\|_* \le \|y\|_*\left(1 - \delta'(x,\varepsilon')\right),$$

оскільки

$$\left\|\frac{y}{\|y\|_*} - \frac{x}{\|x\|_*}\right\|_* = \frac{1}{\|y\|_*}\left\|y - \frac{\|y\|_*}{\|x\|_*}x\right\|_* \ge \frac{\varepsilon}{2\|y\|_*} > \frac{\varepsilon}{2\|x\|_*} \ge \varepsilon'.$$

Звідси отримаємо

$$\frac{1}{4}\left\|y + \frac{\|y\|_*}{\|x\|_*}x\right\|_*^2 \le \|y\|_*^2\left(1 - \delta'(x,\varepsilon')\right)^2 \le \|y\|_*^2 - \|y\|_*^2\left(\delta'(x,\varepsilon')\right)^2.$$

Знову оцінимо зверху $f\left(\frac{y+x}{2}\right)$. Маємо

$$f\left(\frac{y+x}{2}\right) = \left\|\frac{y+x}{2}\right\|_*^2 = \left\|\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\|y\|_*}{\|x\|_*}\right)x + \frac{1}{2}\left(y + \frac{\|y\|_*}{\|x\|_*}x\right)\right\|_*^2 \le$$
$$\le \left(\frac{\|x\|_* - \|y\|_*}{2} + \frac{1}{2}\left\|y + \frac{\|y\|_*}{\|x\|_*}x\right\|_*\right)^2 =$$
$$= \left(\frac{\|x\|_* - \|y\|_*}{2}\right)^2 + \frac{\|x\|_* - \|y\|_*}{2}\left\|y + \frac{\|y\|_*}{\|x\|_*}x\right\|_* + \frac{1}{4}\left\|y + \frac{\|y\|_*}{\|x\|_*}x\right\|_*^2 \le$$
$$\le \left(\frac{\|x\|_* - \|y\|_*}{2}\right)^2 + (\|x\|_* - \|y\|_*)\|y\|_* + \frac{1}{4}\left\|y + \frac{\|y\|_*}{\|x\|_*}x\right\|_*^2 \le$$

$$\leq \frac{1}{2}\left(\|x\|_* - \|y\|_*\right)^2 + \left(\|x\|_* - \|y\|_*\right)\|y\|_* + \frac{1}{4}\left\|y + \frac{\|y\|_*}{\|x\|_*}x\right\|_*^2 =$$
$$= \frac{\|x\|_*^2 - \|y\|_*^2}{2} + \frac{1}{4}\left\|y + \frac{\|y\|_*}{\|x\|_*}x\right\|_*^2.$$

Звідси:

$$\frac{1}{2}f(y) + \frac{1}{2}f(x) - f\left(\frac{y+x}{2}\right) = \frac{\|y\|_*^2 + \|x\|_*^2}{2} - \left\|\frac{y+x}{2}\right\|_*^2 \geq$$
$$\geq \|y\|_*^2 - \frac{1}{4}\left\|y + \frac{\|y\|_*}{\|x\|_*}x\right\|_*^2 \geq \|y\|_*^2\left(\delta'(x,\varepsilon')\right)^2 \geq \frac{\|x\|_*^2}{4}\left(\delta'(x,\varepsilon')\right)^2. \quad (4.28)$$

Якщо $\varepsilon' \leq \|x\|_* - \|y\|_*$, то, аналогічно (4.27), маємо

$$\frac{1}{2}f(y) + \frac{1}{2}f(x) - f\left(\frac{y+x}{2}\right) = \frac{\|y\|_*^2 + \|x\|_*^2}{2} - \frac{\|y+x\|_*^2}{4} \geq$$
$$\geq \frac{\|y\|_*^2 + \|x\|_*^2}{2} - \frac{\left(\|y\|_* + \|x\|_*\right)^2}{4} = \frac{\left(\|y\|_* - \|x\|_*\right)^2}{4} \geq \frac{\varepsilon'^2}{4}. \quad (4.29)$$

Проаналізувавши процес отримання нерівностей (4.26)–(4.29), приходимо до висновку, що для виконання (4.24) достатньо покласти

$$\delta = \delta(x,\varepsilon) = \min\left\{\frac{\|x\|_*^2}{4}\left(\delta'(x,\varepsilon')\right)^2, \frac{\varepsilon'^2}{4}\right\},$$

де $\varepsilon' = \min\left\{\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2\|x\|_*}, \frac{\|x\|_*}{2}\right\}$.

Якщо припустити існування функціоналу $x^* \in E^*$ такого, що задача

$$f + x^* \to \sup_X$$

має розв'язок $x' \in X$, то, за лемою 4.5, точка x' є строго виставленою точкою множини X. Але, за побудовою, множина X не містить строго виставлених точок. Прийшли до протиріччя. □

4.3 Опукла максимізація і властивість α Шахермайєра

Як було відмічено вище, компактність множини X у топології $\sigma(E, E^*)$ мала важливе значення у міркуваннях доведення теорем 4.1, 4.2. Нижче при деяких геометричних припущеннях ми доведемо «некомпактний» аналог згаданої теореми.

При дослідженні щільності множини лінійних операторів, що досягають

норми, В. Шахермайєр ввів до розгляду клас банахових просторів із геометрією, близькою до геометрії простору ℓ_1 із стандартною нормою [116].

Означення 4.3. Банахів простір $(E, \|\cdot\|_E)$ має властивість α, якщо існує число $\lambda \in [0, 1)$ і сім'я $\{(e_\alpha, e_\alpha^*)\}_{\alpha\in\mathfrak{A}} \subseteq E \times E^*$ такі, що:

1) $\|e_\alpha\|_E = \|e_\alpha^*\|_{E^*} = \langle e_\alpha^*, e_\alpha\rangle_{E^*,E} = 1 \ \forall \alpha \in \mathfrak{A}$;

2) $\left|\langle e_\alpha^*, e_\beta\rangle_{E^*,E}\right| \le \lambda$ при $\alpha \ne \beta$;

3) $B_1(E) = \overline{\operatorname{conv}}\{\pm e_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$.

Будова одиничної кулі простору, що має властивість α подібна до будови одиничної кулі простору ℓ_1 (для ℓ_1: $\mathfrak{A} = \mathbb{N}$, $\lambda = 0$, $\{e_n\}$ — стандартний базис Шаудера простору ℓ_1, $\{e_n^*\} \subseteq \ell_\infty$ — відповідні біортогональні функціонали).

Дослідимо задачу максимізації опуклого функціоналу на замкненій кулі простору $(E, \|\cdot\|_E)$ із властивістю α.

Нехай функціонал f опуклий і обмежений зверху на $B_1(E)$. Розглянемо задачу

$$f \to \sup_{B_1(E)}. \tag{4.30}$$

Звичайно, (4.30) має розв'язки далеко не завжди. Але геометрична властивість α забезпечує нам можливість як завгодно малими лінійними збуреннями $x^* \in E^*$ отримати з (4.30) розв'язну задачу

$$f + x^* \to \sup_{B_1(E)}.$$

Теорема 4.7. *Нехай банахів простір $(E, \|\cdot\|_E)$ має властивість α, $f : E \to \mathbb{R}$ — опуклий функціонал, обмежений зверху на одиничній кулі $B_1(E)$. Тоді для довільного $\varepsilon > 0$ існує $x^* \in E^*$ такий, що $\|x^*\|_{E^*} < \varepsilon$ і функціонал $f + x^*$ досягає супремуму на $B_1(E)$.*

Доведення. Нехай $\varepsilon > 0$. Оскільки $\sup_{x\in B_1(E)} f(x) = \sup_{x\in\{\pm e_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}} f(x)$, то можемо обрати $\alpha \in \mathfrak{A}$ так, що

$$f(e_\alpha) > \sup_{x\in B_1(E)} f(x) - \varepsilon\frac{1-\lambda}{2},$$

або

$$f(-e_\alpha) > \sup_{x\in B_1(E)} f(x) - \varepsilon\frac{1-\lambda}{2}.$$

Розглянемо випадок, коли обрано e_α (для $-e_\alpha$ усі міркування аналогічні).

Визначаємо функціонал $x^* \in E^*$ так: $x^* = \frac{\varepsilon}{2}e_\alpha^*$. Ясно, що $\|x^*\|_{E^*} < \varepsilon$. Покажемо, що функціонал $f + x^*$ досягає свого максимуму на $B_1(E)$ у точці e_α.

Маємо

$$f(e_\alpha) + \langle x^*, e_\alpha\rangle_{E^*,E} > \sup_{x\in B_1(E)} f(x) - \varepsilon\frac{1-\lambda}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \sup_{x\in B_1(E)} f(x) + \frac{\varepsilon\lambda}{2}.$$

Далі

$$f(-e_\alpha) + \langle x^*, -e_\alpha\rangle_{E^*,E} \le \sup_{x\in B_1(E)} f(x) - \frac{\varepsilon}{2} <$$

$$< \sup_{x\in B_1(E)} f(x) + \frac{\varepsilon\lambda}{2} < f(e_\alpha) + \langle x^*, e_\alpha\rangle_{E^*,E}$$

та для $\beta \neq \alpha$

$$f(\pm e_\beta) + \langle x^*, \pm e_\beta\rangle_{E^*,E} \le \sup_{x\in B_1(E)} f(x) + \frac{\varepsilon}{2}\langle e^*_\alpha, \pm e_\beta\rangle_{E^*,E} \le$$

$$\le \sup_{x\in B_1(E)} f(x) + \frac{\varepsilon\lambda}{2} < f(e_\alpha) + \langle x^*, e_\alpha\rangle_{E^*,E}.$$

Отже, отримали

$$f(e_\alpha) + \langle x^*, e_\alpha\rangle_{E^*,E} = \sup_{\beta\in\mathfrak{A}}\left\{f(e_\beta) + \langle x^*, e_\beta\rangle_{E^*,E}\right\} = \sup_{x\in B_1(E)}\{f(x) + \langle x^*, x\rangle_{E^*,E}\},$$

що і треба було довести. □

Має місце такий результат про еквівалентне перенормування банахових слабко компактно породжених просторів [116].

Теорема 4.8. *Нехай* $(E, \|\cdot\|_E)$ *— банахів WCG-простір. Тоді для кожного* $\varepsilon > 0$ *на* E *існує норма* $|||\cdot|||$ *така, що* $B_1(E) \subseteq B(|||\cdot|||) \subseteq B_{3+\varepsilon}(E)$ *і простір* $(E, |||\cdot|||)$ *має властивість* α.

Із теорем 4.7 і 4.8 безпосередньо випливає наступний факт.

Теорема 4.9. *На банаховому WCG-просторі* $(E, \|\cdot\|_E)$ *можна задати таку еквівалентну норму* $|||\cdot|||$, *що для довільних обмеженого зверху опуклого функціоналу* f, *заданого на новій одиничній кулі* $B(|||\cdot|||)$, *і* $\varepsilon > 0$ *існує* $x^* \in E^*$ *такий, що* $\|x^*\|_{E^*} < \varepsilon$ *і функціонал* $f + x^*$ *досягає супремуму на* $B(|||\cdot|||)$.

Зауваження 4.3. У статті [116] В. Шахермайєр довів, крім згаданого (теорема 4.8), ще ряд цікавих тверджень про еквівалентне перенормування просторів:

1) якщо банахів простір $(E, \|\cdot\|_E)$ суперрефлексивний[1], то $\forall\ \varepsilon > 0$ на E

[1]Банахів простір називають суперрефлексивним, якщо він має еквівалентну рівномірно опуклу норму.

існує норма $|||\cdot|||$ така, що $B(|||\cdot|||) \subseteq B_1(E) \subseteq (1+\varepsilon) B(|||\cdot|||)$ і простір $(E, |||\cdot|||)$ має властивість α;

2) $\forall\ \varepsilon > 0$ на c_0 існує норма $|||\cdot|||$ така, що $B_1(c_0) \subseteq B(|||\cdot|||) \subseteq B_{1+\varepsilon}(c_0)$ і простір $(c_0, |||\cdot|||)$ має властивість α;

3) $\forall\ \varepsilon > 0$ на ℓ_∞ існує норма $|||\cdot|||$ така, що $B_1(\ell_\infty) \subseteq B(|||\cdot|||) \subseteq B_{2+\varepsilon}(\ell_\infty)$ і простір $(\ell_\infty, |||\cdot|||)$ має властивість α.

Нехай $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ — банахові простори; $A \in L(E, F)$ — лінійний неперервний оператор, що діє з E в F; $f : F \to \mathbb{R}$ — неперервна на F напівнорма. Розглянемо наступну екстремальну задачу

$$f(Ax) \to \sup_{x \in B_1(E)}. \tag{4.31}$$

Зауваження 4.4. Якщо в (4.31) $f(\cdot) = \|\cdot\|_F$, то отримаємо задачу обчислення норми $\|\cdot\|_{L(E,F)}$ оператора $A \in L(E, F)$ (див. [114–118]).

Застосуємо до задачі (4.31) теорему 4.7.

Теорема 4.10. *Нехай банахів простір $(E, \|\cdot\|_E)$ рефлексивний або має властивість α. Тоді для довільного $\varepsilon > 0$ існує оператор $B \in L(E, F)$ такий, що $\|B\|_{L(E,F)} < \varepsilon$, $\dim R(B) = 1$, задача*

$$f(Ax + Bx) \to \sup_{x \in B_1(E)}$$

має розв'язки.

Доведення. Нехай $\sup_{x \in B_1(E)} p(x) = \sup_{x \in B_1(E)} f(Ax) = M > 0$ і $\varepsilon > 0$. Якщо банахів простір $(E, \|\cdot\|_E)$ рефлексивний, то за теоремою 4 роботи [104], інакше за теоремою 4.7, існує функціонал $x^* \in E^*$ такий, що

$$\|x^*\|_{E^*} < \min\left\{\frac{M}{4}, \frac{3M\varepsilon}{4\|A\|_{L(E,F)}}\right\}$$

та $p + x^*$ досягає супремуму на $B_1(E)$ у точці $x_0 \in B_1(E)$.

Оскільки $\forall x \in B_1(E)$: $p(x) + \langle x^*, x\rangle_{E^*,E} \le p(x_0) + \langle x^*, x_0\rangle_{E^*,E}$, то симетричність p і $B_1(E)$ забезпечує виконання $\forall x \in B_1(E)$ нерівностей

$$p(-x) - \langle x^*, -x\rangle_{E^*,E} = p(x) + \langle x^*, x\rangle_{E^*,E} \le$$
$$\le p(x_0) + \langle x^*, x_0\rangle_{E^*,E} = p(-x_0) - \langle x^*, -x_0\rangle_{E^*,E},$$

тобто, $p - x^*$ досягає супремуму на $B_1(E)$ у точці $-x_0 \in B_1(E)$. Отже, функціонал $p + \alpha x^*$ ($\alpha \in \{-1, 1\}$) досягає супремуму на $B_1(E)$ у точці $\bar{x} \in \{-x_0, x_0\}$.

Візьмемо число $\alpha \in \{-1, 1\}$:

$$\sup_{x \in B_1(E)} \{f(Ax) + \alpha \langle x^*, x \rangle_{E^*,E}\} = \sup_{x \in B_1(E)} \{f(Ax) + |\langle x^*, x \rangle_{E^*,E}|\}.$$

Отже,

$$f(A\bar{x}) + \alpha \langle x^*, \bar{x} \rangle_{E^*,E} = \sup_{x \in B_1(E)} \{f(Ax) + \alpha \langle x^*, x \rangle_{E^*,E}\} = \\ = \sup_{x \in B_1(E)} \{f(Ax) + |\langle x^*, x \rangle_{E^*,E}|\}.$$

Має місце нерівність

$$\sup_{x \in B_1(E)} \{f(Ax) + \alpha \langle x^*, x \rangle_{E^*,E}\} = \sup_{x \in B_1(E)} \{f(Ax) + |\langle x^*, x \rangle_{E^*,E}|\} \geq \\ \geq \sup_{x \in B_1(E)} f(Ax) = M > 0.$$

Звідси

$$f(A\bar{x}) = f(A\bar{x}) + \alpha \langle x^*, \bar{x} \rangle_{E^*,E} - \alpha \langle x^*, \bar{x} \rangle_{E^*,E} = \\ = \sup_{x \in B_1(E)} \{f(Ax) + |\langle x^*, x \rangle_{E^*,E}|\} - \alpha \langle x^*, \bar{x} \rangle_{E^*,E} \geq \\ \geq M - \|x^*\|_{E^*} > \tfrac{3}{4} M > 0.$$

Оцінимо відношення $|\langle x^*, \bar{x} \rangle_{E^*,E}| / f(A\bar{x})$. Маємо

$$0 \leq \frac{|\langle x^*, \bar{x} \rangle_{E^*,E}|}{f(A\bar{x})} \leq \frac{M/4}{3M/4} = \frac{1}{3}.$$

Розглянемо наступний оператор

$$E \xrightarrow{B} F: \quad E \ni x \to Bx = \alpha \langle x^*, x \rangle_{E^*,E} \frac{A\bar{x}}{f(A\bar{x})} \in F.$$

Зрозуміло, що $B \in L(E, F)$, $\dim R(B) = 1$ та $\|B\|_{L(E,F)} < \varepsilon$. Для $x \in B_1(E)$ маємо

$$f(Ax + Bx) \leq f(Ax) + f(Bx) = f(Ax) + |\langle x^*, x \rangle_{E^*,E}| \leq \\ \leq \sup_{x \in B_1(E)} \{f(Ax) + |\langle x^*, x \rangle_{E^*,E}|\} = f(A\bar{x}) + \alpha \langle x^*, \bar{x} \rangle_{E^*,E}. \quad (4.32)$$

З іншого боку, маємо

$$f(A\bar{x} + B\bar{x}) = f\left(A\bar{x} + \alpha \langle x^*, \bar{x} \rangle_{E^*,E} \frac{A\bar{x}}{f(A\bar{x})}\right) =$$

$$= f(A\bar{x}) \left| 1 + \alpha \langle x^*, \bar{x} \rangle_{E^*,E} \frac{1}{f(A\bar{x})} \right| = f(A\bar{x}) \left(1 + \alpha \langle x^*, \bar{x} \rangle_{E^*,E} \frac{1}{f(A\bar{x})} \right) =$$

$$= f(A\bar{x}) + \alpha \langle x^*, \bar{x} \rangle_{E^*,E}. \tag{4.33}$$

Об'єднавши (4.32) і (4.33), отримаємо

$$f(A\bar{x} + B\bar{x}) = \sup_{x \in B_1(E)} f(Ax + Bx),$$

що і доводить теорему 4.10. □

4.4 Задачі максимізації і умова Лінденштраусса

Нехай $(E, \|\cdot\|_E)$ — банахів простір. У роботі [114] введено таке поняття.

Означення 4.4. Сім'ю $\{e_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}} \subseteq S_1(E)$ називають рівномірно строго виставленою, якщо існує сім'я функціоналів $\{e_\alpha^*\}_{\alpha \in \mathfrak{A}} \subseteq S_1(E^*)$ така, що:

1) $\langle e_\alpha^*, e_\alpha \rangle_{E^*,E} = 1 \ \forall \alpha \in \mathfrak{A}$;

2) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$: $\forall \alpha \in \mathfrak{A} \ \forall x \in B_1(E) \ \langle e_\alpha^*, x \rangle_{E^*,E} > 1 - \delta \Rightarrow \|x - e_\alpha\|_E < \varepsilon$.

Зауважимо, що кожна точка e_α — строго виставлена точка кулі $B_1(E)$. «Рівномірно» в означенні 4.4 означає те, що δ залежить лише від ε. Якщо банахів простір $(E, \|\cdot\|_E)$ має властивість α Шахермайєра і $\{(e_\alpha, e_\alpha^*)\}_{\alpha \in \mathfrak{A}} \subseteq E \times E^*$ — відповідна сім'я з означення 4.3, то можна показати, що $\{e_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ — рівномірно строго виставлена сім'я, причому $\delta = \frac{1}{2}\varepsilon(1 - \lambda)$ [116]. Також у рівномірно опуклому банаховому просторі множина $S_1(E)$ рівномірно строго виставлена.

Означення 4.5. Банахів простір $(E, \|\cdot\|_E)$ задовольняє умову Лінденштраусса, якщо існує рівномірно строго виставлена сім'я $\{e_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}} \subseteq S_1(E)$ така, що $B_1(E) = \overline{\operatorname{conv}}\{\pm e_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$.

Нехай $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ — банахові простори; $f : B_1(E) \to F$ — неперервне і обмежене відображення. Розглянемо екстремальну задачу:

$$\|f(x)\|_F \to \sup_{x \in B_1(E)}. \tag{4.34}$$

Припустимо, що банахів простір $(E, \|\cdot\|_E)$ задовольняє умову Лінденштраусса.

Означення 4.6. Кажемо, що неперервне та обмежене відображення $f : B_1(E) \to F$ має властивість T, якщо існує $\varepsilon > 0$ таке, що для кожного $A \in L(E, F)$ з нормою $\|A\|_{L(E,F)} < \varepsilon$: $\sup_{B_1(E)} \|f + A\|_F = \sup_{\{\pm e_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}} \|f + A\|_F$.

Доведемо для відображень із властивістю T існування як завгодно малих лінійних неперервних та ядерних збурень задачі (4.34), які забезпечують існування розв'язків.

Теорема 4.11. *Нехай банахів простір* E *задовольняє умову Лінденштрауса,* $f : B_1(E) \to F$ *— неперервне і обмежене відображення, що має властивість T. Тоді для довільного* $\varepsilon > 0$ *існує ядерний оператор* $N \in L(E, F)$ *такий, що* $\|N\|_{L(E,F)} < \varepsilon$ *і задача*

$$\|f(x) + Nx\|_F \to \sup_{x \in B_1(E)}$$

має розв'язки.

Доведення. Оскільки простір $(E, \|\cdot\|_E)$ задовольняє умову Лінденштрауса, то існує рівномірно строго виставлена сім'я $\{e_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}} \subseteq S_1(E)$ така, що $B_1(E) = \overline{\operatorname{conv}}\{\pm e_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ ($\{e^*_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}} \subseteq S_1(E^*)$ — відповідна сім'я функціоналів).

Нехай $\sup_{B_1(E)} \|f\|_F = 1$. Візьмемо число $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{3}\right)$ і таку спадну послідовність (ε_n) додатних чисел, що виконуються нерівності

$$2\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < \varepsilon,\ 2\sum_{n=k+1}^{\infty} \varepsilon_n < \varepsilon_k^2,\ \varepsilon_k < \tfrac{1}{10k},\ k \in \mathbb{N}. \tag{4.35}$$

Нехай $f_1 = f$. Оберемо e_{α_1} так, що $\|f_1(e_{\alpha_1})\|_F \geq \sup_{B_1(E)} \|f_1\|_F - \varepsilon_1^2$.

Беремо функціонал $e^*_{\alpha_1}$ і будуємо відображення f_2

$$f_2(x) = f_1(x) + \varepsilon_1 \left\langle e^*_{\alpha_1}, x\right\rangle_{E^*,E} f_1\left(e_{\alpha_1}\right).$$

Тепер візьмемо елемент e_{α_2} так, що $\|f_2(e_{\alpha_2})\|_F \geq \sup_{B_1(E)} \|f_2\|_F - \varepsilon_2^2$, функціонал $e^*_{\alpha_2}$, і будуємо відображення f_3:

$$f_3(x) = f_2(x) + \varepsilon_2 \left\langle e^*_{\alpha_2}, x\right\rangle_{E^*,E} f_2\left(e_{\alpha_2}\right).$$

Виконавши аналогічні побудови, отримаємо послідовності (f_n), (e_{α_n}) такі, що

$$\|f_n(e_{\alpha_n})\|_F \geq \sup_{B_1(E)} \|f_n\|_F - \varepsilon_n^2, \tag{4.36}$$

$$f_{n+1}(x) = f_n(x) + \varepsilon_n \left\langle e^*_{\alpha_n}, x\right\rangle_{E^*,E} f_n\left(e_{\alpha_n}\right). \tag{4.37}$$

Методом математичної індукції легко показати, що $\sup_{B_1(E)} \|f_n\|_F \leq \frac{4}{3}$ для $n \geq 2$, тому маємо

$$\sup_{B_1(E)} \|f_n - f_k\|_F \leq 2\sum_{i=k}^{n-1} \varepsilon_i < \varepsilon_{k-1}^2,\ n > k. \tag{4.38}$$

Із (4.36) і (4.37) для $n \geq 1$ отримаємо

$$\sup_{B_1(E)} \|f_{n+1}\|_F \geq \|f_{n+1}(e_{\alpha_n})\|_F =$$

$$= \left\|f_n(e_{\alpha_n}) + \varepsilon_n \left\langle e^*_{\alpha_n}, e_{\alpha_n}\right\rangle_{E^*,E} f_n(e_{\alpha_n})\right\|_F =$$

$$= \|f_n(e_{\alpha_n})\|_F (1+\varepsilon_n) \geq \left(\sup_{B_1(E)} \|f_n\|_F - \varepsilon_n^2\right)(1+\varepsilon_n) \geq$$

$$\geq \sup_{B_1(E)} \|f_n\|_F + \varepsilon_n \sup_{B_1(E)} \|f_n\|_F - 2\varepsilon_n^2.$$

Із отриманої нерівності випливає, що для $n \geq 1$ виконується

$$\sup_{B_1(E)} \|f_{n+1}\|_F \geq \sup_{B_1(E)} \|f_n\|_F .$$

Далі, якщо $n > k$ маємо

$$\|f_{k+1}(e_{\alpha_n})\|_F \geq \|f_n(e_{\alpha_n})\|_F - \sup_{B_1(E)} \|f_n - f_{k+1}\|_F \geq$$

$$\geq \sup_{B_1(E)} \|f_n\|_F - \varepsilon_n^2 - 2\sum_{i=k+1}^{n-1} \varepsilon_i > \sup_{B_1(E)} \|f_n\|_F - \varepsilon_n^2 - \varepsilon_{k+1}^2 >$$

$$> \sup_{B_1(E)} \|f_{k+1}\|_F - 2\varepsilon_k^2.$$

Отже, для $n > k$ виконується співвідношення

$$\sup_{B_1(E)} \|f_k\|_F + \varepsilon_k \left|\left\langle e^*_{\alpha_k}, e_{\alpha_n}\right\rangle_{E^*,E}\right| \sup_{B_1(E)} \|f_k\|_F \geq$$

$$\geq \left\|f_k(e_{\alpha_n}) + \varepsilon_k \left\langle e^*_{\alpha_k}, e_{\alpha_n}\right\rangle_{E^*,E} f_k(e_{\alpha_n})\right\|_F = \|f_{k+1}(e_{\alpha_n})\|_F >$$

$$> \sup_{B_1(E)} \|f_{k+1}\|_F - 2\varepsilon_k^2 \geq \sup_{B_1(E)} \|f_k\|_F + \varepsilon_k \sup_{B_1(E)} \|f_k\|_F - 4\varepsilon_k^2.$$

Скоротивши, отримаємо нерівність

$$\left|\left\langle e^*_{\alpha_k}, e_{\alpha_n}\right\rangle_{E^*,E}\right| > 1 - 4\varepsilon_k > 1 - \frac{1}{k+1}, \quad n > k. \tag{4.39}$$

Послідовність відображень (f_n) є рівномірно фундаментальною на кулі $B_1(E)$. Нехай $\bar{f} = \lim_{n\to\infty} f_n$. Тоді з (4.38) і (4.35) для ядерного оператора

$$Nx = \bar{f}(x) - f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k f_k(e_{\alpha_k}) \left\langle e^*_{\alpha_k}, x\right\rangle_{E^*,E} \quad (x \in E)$$

маємо $\|N\|_{L(E,F)} < \varepsilon$.

Покажемо, що з (4.39) випливає існування у послідовності (e_{α_n}) сильно збіжної підпослідовності. Розглянемо числові послідовності $y_n = \left(y_1^{(n)}, ..., y_k^{(n)}, ...\right)$ $(n \in \mathbb{N})$: $y_k^{(n)} = \left\langle e_{\alpha_k}^*, e_{\alpha_n} \right\rangle_{E^*,E}$ $\forall k \in \mathbb{N}$. Оскільки $\{e_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}} \subseteq S_1(E)$ і $\{e_\alpha^*\}_{\alpha\in\mathfrak{A}} \subseteq S_1(E^*)$, то для всіх $n \in \mathbb{N}$ маємо $y_n \in B_1(\ell_\infty)$. Одинична куля $B_1(\ell_\infty)$ компактна в топології $\sigma(\ell_\infty, \ell_1)$, а топологія, що індукована топологією $\sigma(\ell_\infty, \ell_1)$ на $B_1(\ell_\infty)$, є метризованою [123]. Отже, можна з (y_n) виділити збіжну в топології $\sigma(\ell_\infty, \ell_1)$ підпослідовність, яку теж позначатимемо через (y_n). Зокрема, $\forall k \in \mathbb{N}$ числова послідовність $y_k^{(n)} = \left\langle e_{\alpha_k}^*, e_{\alpha_n} \right\rangle_{E^*,E}$ збігається при $n \to \infty$ до числа $\bar{y}_k \in \mathbb{R}$. Перейшовши в нерівності

$$1 \geq \left|y_k^{(n)}\right| = \left|\left\langle e_{\alpha_k}^*, e_{\alpha_n} \right\rangle_{E^*,E}\right| > 1 - \frac{1}{k+1}, \;\; n > k,$$

до границі при $n \to \infty$, отримаємо $1 \geq |\bar{y}_k| \geq 1 - \frac{1}{k+1}$. З останньої нерівності випливає, що $|\bar{y}_k| \to 1$ при $k \to \infty$. Перейшовши, якщо треба, до підпослідовності, можна досягти збіжності $(\bar{y}_k)$ до одного з двох чисел – 1 або -1, яке позначимо y.

Покажемо, що отримана підпослідовність (e_{α_k}) сильно збіжна у просторі E. Використаємо означення рівномірно строгої виставленості сім'ї $\{e_{\alpha_k}\}$. Візьмемо довільне $\varepsilon > 0$ і зафіксуємо. Для обраного $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що

$$\forall k \in \mathbb{N} \;\; \forall x \in B_1(E) \;\; \left\langle e_{\alpha_k}^*, x \right\rangle_{E^*,E} > 1 - \delta \;\Rightarrow\; \|x - e_{\alpha_k}\|_E < \varepsilon.$$

Оскільки $\bar{y}_k \to y$, то існує $k_0 \in \mathbb{N}$ таке, що для $k \geq k_0$ виконується нерівність

$$|\bar{y}_k - y| < \frac{\delta}{2}.$$

Візьмемо два довільних числа $k' \geq k_0$ і $k'' \geq k_0$. Використовуючи збіжності

$$y_{k'}^{(n)} = \left\langle e_{\alpha_{k'}}^*, e_{\alpha_n} \right\rangle_{E^*,E} \to \bar{y}_{k'} \quad \text{і} \quad y_{k''}^{(n)} = \left\langle e_{\alpha_{k''}}^*, e_{\alpha_n} \right\rangle_{E^*,E} \to \bar{y}_{k''} \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

можемо записати

$$\left|\left\langle e_{\alpha_{k'}}^*, e_{\alpha_n} \right\rangle_{E^*,E} - y\right| \leq \left|\left\langle e_{\alpha_{k'}}^*, e_{\alpha_n} \right\rangle_{E^*,E} - \bar{y}_{k'}\right| + |\bar{y}_k - y| < \delta,$$

$$\left|\left\langle e_{\alpha_{k''}}^*, e_{\alpha_n} \right\rangle_{E^*,E} - y\right| \leq \left|\left\langle e_{\alpha_{k''}}^*, e_{\alpha_n} \right\rangle_{E^*,E} - \bar{y}_{k''}\right| + |\bar{y}_k - y| < \delta.$$

Звідки отримуємо $\left\langle e_{\alpha_{k'}}^*, \frac{e_{\alpha_n}}{y} \right\rangle_{E^*,E} > 1 - \delta$ і $\left\langle e_{\alpha_{k''}}^*, \frac{e_{\alpha_n}}{y} \right\rangle_{E^*,E} > 1 - \delta$. Із цих нерівностей випливає, що $\left\|\frac{e_{\alpha_n}}{y} - e_{\alpha_{k'}}\right\|_E < \varepsilon$ і $\left\|\frac{e_{\alpha_n}}{y} - e_{\alpha_{k''}}\right\|_E < \varepsilon$. Отже,

$$\left\|e_{\alpha_{k'}} - e_{\alpha_{k''}}\right\|_E \leq \left\|e_{\alpha_{k'}} - \frac{e_{\alpha_n}}{y}\right\|_E + \left\|\frac{e_{\alpha_n}}{y} - e_{\alpha_{k''}}\right\|_E < 2\varepsilon,$$

тобто, послідовність (e_{α_k}) фундаментальна у банаховому просторі $(E, \|\cdot\|_E)$.

Нехай $\bar{x} = \lim_{i\to\infty} e_{\alpha_n} \in B_1(E)$. Із нерівності (4.36) випливає, що

$$\sup_{B_1(E)} \|f + N\|_F = \lim_{n\to\infty} \sup_{B_1(E)} \|f_n\|_F = \lim_{n\to\infty} \|f_n(e_{\alpha_n})\|_F = \|f(\bar{x}) + N\bar{x}\|_F .$$

Тоді, задача

$$\|f(x) + Nx\|_F \to \sup_{x\in B_1(E)}$$

має розв'язок $\bar{x} \in B_1(E)$. □

Нехай (X, ρ) — повний метричний простір, $(E, \|\cdot\|_E)$ — банахів простір. Розглянемо банахів простір $BC(X, E)$ обмежених неперервних відображень X в E з рівномірною нормою $\|f\|_{BC(X,E)} = \sup_{x\in X} \|f(x)\|_E$.

Зафіксуємо в $BC(X, E)$ деякий лінійний підпростір B — клас «допустимих» моделей. Будемо вивчати екстремальні задачі

$$\|f(x)\|_E \to \sup_{x\in X}, \tag{4.40}$$

де $f \in B \subseteq BC(X, E)$.

Мета — перенести на задачі (4.40) техніку попередніх пунктів та отримати результат про існування малих збурень, що лежать у підпросторі B та забезпечують існування розв'язків.

Означення 4.7. Множину $N \subseteq X$ називаємо нормуючою для лінійного підпростору $B \subseteq BC(X, E)$, якщо для кожного $f \in B$:

$$\|f\|_{BC(X,E)} = \sup_{x\in N} \|f(x)\|_E .$$

Нехай E, F — банахові простори. Будемо розглядати $L(E, F)$ як підпростір простору $BC(B_1(E), F)$. Тоді, якщо E має властивість α (або задовольняє умову Лінденштраусса), множина $\{e_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ із відповідного означення є нормуючою для $L(E, F)$, що не співпадає з $S_1(E)$.

Означення 4.8. Кажемо, що функція $g \in BC(X, \mathbb{R})$ строго виставляє точку $x \in X$, якщо $|g(x)| = 1$, x — точка строгого максимуму функції $|g|$ на просторі X.

Наприклад, функція $g(y) = \max\{1 - 2\rho(x, y), 0\}$ строго виставляє точку $x \in X$, причому, $\operatorname{supp} g = \left\{y \in X : \ \rho(x, y) \le \frac{1}{2}\right\}$.

Відмітимо, що коли $g \in BC(X, \mathbb{R})$ строго виставляє точку $x \in X$, то для кожного $\varepsilon > 0$ існує $n \in \mathbb{N}$ таке, що з нерівності $|g(y)|^n > 1 - \varepsilon$ випливає $\rho(x, y) < \varepsilon$.

Означення 4.9. Лінійний підпростір $B \subseteq BC(X, E)$ називаємо правильним, якщо для B існують такі нормуюча множина $N \subseteq X$ та множина дійсних функцій

$$G = \{g_x \text{ строго виставляє } x : x \in N\},$$

що

$$\left\{ \sum_{k=1}^{n} g_{x_k}^{n_k} e_k : \ g_{x_k} \in G, \ n_k \in \mathbb{N}, \ e_k \in E, \ n \in \mathbb{N} \right\} \subseteq B.$$

Теорема 4.12. *Нехай B — правильний замкнений лінійний підпростір простору $BC(X, E)$. Тоді для довільних $f \in B$ і $\varepsilon > 0$ існує відображення $g \in B$ таке, що $\|g\|_{BC(X,E)} \leq \varepsilon$ і задача*

$$\|f(x) + g(x)\|_E \to \sup_{x \in X}$$

має розв'язки.

Доведення. Нехай $f \in B \subseteq BC(X, E)$ і $\|f\|_{BC(X,E)} = 1$. Візьмемо число $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{3}\right)$ і таку спадну послідовність (ε_n) додатних чисел, що виконуються нерівності

$$2\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < \varepsilon, \ 2\sum_{n=k+1}^{\infty} \varepsilon_n < \varepsilon_k^2, \ \varepsilon_k < \tfrac{1}{10k}, \ k \in \mathbb{N}. \tag{4.41}$$

Нехай $f_1 = f$. Оберемо $x_1 \in N$ так, що $\|f_1(x_1)\|_E \geq \sup_X \|f_1\|_E - \varepsilon_1^2$. Беремо функцію $g_1 = g_{x_1} \in G$, яка строго виставляє точку $x_1 \in N$, і будуємо відображення f_2

$$f_2(x) = f_1(x) + \varepsilon_1 g_1^{m_1}(x) f_1(x_1),$$

де $m_1 \in \mathbb{N}$ обрано так, що з нерівності $|g(x)|^{m_1} > 1 - \frac{1}{2}$ випливає $\rho(x, x_1) < \frac{1}{2}$.

Тепер візьмемо $x_2 \in N$ так, що $\|f_2(x_2)\|_E \geq \sup_X \|f_2\|_E - \varepsilon_2^2$, і функцію $g_2 = g_{x_2} \in G$, яка строго виставляє точку x_2, і будуємо відображення f_3

$$f_3(x) = f_2(x) + \varepsilon_2 g_2^{m_2}(x) f_2(x_2),$$

де $m_2 \in \mathbb{N}$ обрано так, що з нерівності $|g(x)|^{m_2} > 1 - \frac{1}{3}$ випливає $\rho(x, x_2) < \frac{1}{3}$.

Виконавши аналогічні побудови, отримаємо послідовності (f_n), (x_n) такі, що

$$\|f_n(x_n)\|_E \geq \sup_X \|f_n\|_E - \varepsilon_n^2, \tag{4.42}$$

$$f_{n+1}(x) = f_n(x) + \varepsilon_n g_n^{m_n}(x) f_n(x_n), \tag{4.43}$$

де $m_n \in \mathbb{N}$ обрано так, що з нерівності $|g(x)|^{m_n} > 1 - \frac{1}{n+1}$ випливає

$$\rho(x, x_n) < \tfrac{1}{n+1}.$$

Методом математичної індукції легко показати, що $\|f_n\|_{BC(X,E)} \leq \frac{4}{3}$ для $n \geq 2$. Тому маємо

$$\|f_n - f_k\|_{BC(X,E)} \leq 2\sum_{i=k}^{n-1} \varepsilon_i < \varepsilon_{k-1}^2, \;\; n > k. \tag{4.44}$$

Із (4.42) і (4.43) для $n \geq 1$ отримаємо

$$\sup_X \|f_{n+1}\|_E \geq \|f_{n+1}(x_n)\|_E = \|f_n(x_n) + \varepsilon_n g_n^{m_n}(x_n) f_n(x_n)\|_E =$$
$$= \|f_n(x_n)\|_E (1+\varepsilon_n) \geq \left(\sup_X \|f_n\|_E - \varepsilon_n^2\right)(1+\varepsilon_n) \geq$$
$$\geq \sup_X \|f_n\|_E + \varepsilon_n \sup_X \|f_n\|_E - 2\varepsilon_n^2.$$

З отриманої нерівності випливає, що для $n \geq 1$ виконується

$$\sup_X \|f_{n+1}\|_E \geq \sup_X \|f_n\|_E .$$

Далі, якщо $n > k$, маємо

$$\|f_{k+1}(x_n)\|_E \geq \|f_n(x_n)\|_E - \|f_n - f_{k+1}\|_{BC(X,E)} \geq$$
$$\geq \sup_X \|f_n\|_E - \varepsilon_n^2 - 2\sum_{i=k+1}^{n-1} \varepsilon_i >$$
$$> \sup_X \|f_n\|_E - \varepsilon_n^2 - \varepsilon_{k+1}^2 > \sup_X \|f_{k+1}\|_E - 2\varepsilon_k^2.$$

Отже, для $n > k$ виконується співвідношення

$$\sup_X \|f_k\|_E + \varepsilon_k |g_k^{m_k}(x_n)| \sup_X \|f_k\|_E \geq$$
$$\geq \|f_k(x_n) + \varepsilon_k g_k^{m_k}(x_n) f_k(x_k)\|_E = \|f_{k+1}(x_n)\|_E >$$
$$> \sup_X \|f_{k+1}\|_E - 2\varepsilon_k^2 \geq \sup_X \|f_k\|_E + \varepsilon_k \sup_X \|f_k\|_E - 4\varepsilon_k^2.$$

Скоротивши, отримаємо нерівність

$$|g_k^{m_k}(x_n)| > 1 - 4\varepsilon_k > 1 - \frac{1}{k+1}. \tag{4.45}$$

За побудовою (f_n) є фундаментальною послідовністю елементів замкненого підпростору $B \subseteq BC(X,E)$. Нехай $\bar{f} = \lim_{n\to\infty} f_n \in B \subseteq BC(X,E)$. Тоді з (4.44) і (4.41) для $g = \bar{f} - f = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k f_k(x_k)\, g_k^{m_k} \in B$ маємо $\|g\|_{BC(X,E)} \leq \varepsilon$. Із (4.45) робимо висновок, що послідовність (x_n) є фундаментальною. Дійсно,

для довільного $\delta > 0$ при $n > k > \frac{1}{\delta} - 1$ маємо $\rho(x_n, x_k) < \delta$. Отже, існує границя $\bar{x} = \lim_{n\to\infty} x_n \in X$. Із (4.42) випливає, що

$$\sup_X \|f + g\|_E = \sup_X \left\|\bar{f}\right\|_E = \lim_{n\to\infty} \|f_n\|_{BC(X,E)} = \\ = \lim_{n\to\infty} \|f_n(x_n)\|_E = \left\|\bar{f}(\bar{x})\right\|_E = \|f(\bar{x}) + g(\bar{x})\|_E .$$

Отже, задача

$$\|f(x) + g(x)\|_E \to \sup_{x\in X}$$

має розв'язок $\bar{x} \in X$. □

4.5 Мінімізація на передопуклих множинах: існування розв'язків

Ряд важливих задач теорії керування та дослідження операцій породжують екстремальні задачі з так званими передопуклими обмеженнями [125].

Означення 4.10. Нехай E — лінійний простір. Множину $M \subseteq E$ назвемо передопуклою, якщо існують опуклі множини F_0, F_1, ..., F_m такі, що

$$M = F_0 \setminus \cup_{k=1}^{m} F_k.$$

Наприклад, множина $M = \left\{x \in E : f_k(x) \le 0,\ k = \overline{0,m}\right\}$ є передопуклою, якщо виконано умови: f_0 — опуклий в E функціонал; f_k, $k = \overline{1,m}$ — угнуті в E функціонали. Тут $F_0 = \{x \in E : f_0(x) \le 0\}$, $F_k = \{x \in E : f_k(x) > 0\}$, $k = \overline{1,m}$.

Множина $M = \{x \in E : g(x) = 0\}$, де g — опуклий функціонал, також є передопуклою, причому $F_0 = \{x \in E : g(x) \le 0\}$, $F_1 = \{x \in E : g(x) < 0\}$.

Клас передопуклих множин, що представляються у вигляді теоретико-множинної різниці двох опуклих множин, було введено у роботі [126]. Ми зберігаємо стару назву для більш широкого класу неопуклих множин.

Нехай f — дійсний функціонал, заданий на просторі E. Розглянемо екстремальну задачу

$$f(x) \to \inf_{x\in X}, \tag{4.46}$$

де множина $X \subseteq E$ має наступну структуру:

$$X = F_0 \setminus \cup_{k=1}^{m} F_k,$$

де F_k ($k = \overline{0,m}$) — опуклі підмножини простору E, тобто, $X \subseteq E$ — передопукла множина.

Метою є встановлення достатніх умов існування оптимальних розв'язків задачі (4.46).

Нехай $(E, \|\cdot\|_E)$ — банахів простір. Має місце

Теорема 4.13. *Нехай виконано умови:*

1) функціонал $f : E \to \mathbb{R}$ — $\sigma(E, E^*)$*-напівнеперервний знизу;*

2) множина $F_0 \subseteq E$ — *непорожня опукла і* $\sigma(E, E^*)$*-компактна;*

3) множини $F_k \subseteq E$ $(k = \overline{1, m})$ *опуклі та* $\sigma(E, E^*)$*-відкриті.*

Тоді задача

$$f(x) \to \inf_{x \in X}, \quad X = F_0 \setminus \cup_{k=1}^{m} F_k,$$

має розв'язок. Причому множина розв'язків є $\sigma(E, E^*)$*-компактною.*

Доведення. Доведення. Нехай (x_n) – мінімізуюча послідовність, тобто

$$x_n \in X, f(x_n) \to \inf_{x \in X} f(x) \geq -\infty.$$

Із компактності множини F_0 у топології $\sigma(E, E^*)$ випливає існування у (x_n) такої підпослідовності $\left(x_{n_p}\right)$, що збігається у топології $\sigma(E, E^*)$ до елемента $\bar{x}$, який належить F_0. Множини $F_k \subseteq E$ $(k = \overline{1, m})$ слабко відкриті та $x_{n_p} \notin F_k$ для всіх $p \in \mathbb{N}$, $k = \overline{1, m}$. Тому маємо $\bar{x} \notin F_k$ $(k = \overline{1, m})$. Отже, $\bar{x} \in X$. Із $\sigma(E, E^*)$-напівнеперервності знизу функціоналу $f : E \to \mathbb{R}$ випливає $-\infty < f(\bar{x}) \leq \liminf_{p \to \infty} f\left(x_{n_p}\right) = \inf_{x \in X} f(x)$. Тобто, $\bar{x} \in X$ – розв'язок задачі (4.46).

Нехай тепер $x'_n \in X^* = \{x' \in X : f(x') = \inf_{x \in X} f(x)\}$. Із послідовності (x'_n) можна виділити підпослідовність $\left(x'_{n_p}\right)$ таку, що $x'_{n_p} \to x' \in X$ у топології $\sigma(E, E^*)$. Слабка напівнеперервність знизу $f : E \to \mathbb{R}$ забезпечує виконання нерівності $f(x') \leq \liminf_{p \to \infty} f\left(x'_{n_p}\right) = \inf_{x \in X} f(x)$, тобто $x' \in X^*$. □

Зауваження 4.5. Нехай

$$X = S_1(\ell_2) = \left\{x \in \ell_2 : \ \|x\|_{\ell_2} = 1\right\} = B_1(\ell_2) \setminus O_1(\ell_2).$$

Розглянемо задачу $(x = (\xi_n) \in \ell_2)$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \xi_n^2 \to \inf_{x \in X}.$$

Опукла множина $O_1(\ell_2)$ не є слабко відкритою і задача не має оптимального розв'язку у просторі ℓ_2.

Використовуючи прості міркування двоїстості, встановимо критерій слабкої відкритості відкритої опуклої підмножини лінійного нормованого простору.

Теорема 4.14. *Відкрита опукла підмножина* C *лінійного нормованого простору* E *слабко відкрита тоді і тільки тоді, коли лінійна оболонка її поляри* $C^0 \subseteq E^*$ *скінченновимірна.*

Доведення. Припустимо, що відкрита опукла множина $C \subseteq E$ слабко відкрита. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що $0 \in C$. Дійсно, покажемо, що для довільного $x \in C$ має місце рівність $\lin\left(C^0\right) = \lin\left((C-x)^0\right)$, де через $\lin(A)$ позначено лінійну оболонку множини $A \subseteq E$. Нехай $x^* \in C^0$. Тоді,

$$\forall y \in C: \ \langle x^*, y\rangle_{E^*,E} = \langle x^*, y-x\rangle_{E^*,E} + \langle x^*, x\rangle_{E^*,E} \le 1.$$

Якщо $\langle x^*, x\rangle_{E^*,E} \ge 0$, то $\forall y \in C$: $\langle x^*, y-x\rangle_{E^*,E} \le 1$, тобто, $x^* \in (C-x)^0$. Якщо $\langle x^*, x\rangle_{E^*,E} < 0$, то

$$\forall y \in C: \quad \left\langle \frac{x^*}{1-\langle x^*, x\rangle_{E^*,E}}, y-x \right\rangle_{E^*,E} \le 1,$$

тобто,

$$\frac{x^*}{1-\langle x^*, x\rangle_{E^*,E}} \in (C-x)^0.$$

Отже, $x^* \in \lin\left((C-x)^0\right)$. Звідси

$$C^0 \subseteq \lin\left((C-x)^0\right) \quad \text{та} \quad \lin\left(C^0\right) \subseteq \lin\left((C-x)^0\right).$$

Аналогічно отримуємо

$$\lin\left(C^0\right) \supseteq \lin\left((C-x)^0\right).$$

Оскільки C є слабким околом нуля, то за означенням існують функціонали $x_1^*, \ldots, x_n^*$ з E^* такі, що

$$C \supseteq \{x \in E: \ \langle x_1^*, x\rangle_{E^*,E} \le 1, \ \ldots, \ \langle x_n^*, x\rangle_{E^*,E} \le 1\}.$$

Звідси, маємо

$$C^0 \subseteq \{x \in E: \ \langle x_1^*, x\rangle_{E^*,E} \le 1, \ \ldots, \ \langle x_n^*, x\rangle_{E^*,E} \le 1\}^0 = \left\{ \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k^* \in E^*: \ \sum_{k=1}^n \alpha_k \le 1, \ \alpha_1 \ge 0, \ldots, \alpha_n \ge 0 \right\}.$$

Отже, $\lin\left(C^0\right) \subseteq \lin\left(\{x_1^*, \ldots, x_n^*\}\right)$.

Припустимо тепер, що лінійна оболонка множини $C^0 \subseteq E^*$ скінченновимірна.

Оскільки для довільного $x \in C$ множина $C - x \subseteq E$ поглинаюча, то мно-

жина $(C-x)^0$ обмежена. Поляра $(C-x)^0$ лежить у скінченновимірному підпросторі E^*, тому існують функціонали $x_1^*, \ldots, x_n^*$ з E^* такі, що

$$(C-x)^0 \subseteq \operatorname{conv}(\{x_1^*, ..., x_n^*\}).$$

Маємо

$$(\operatorname{conv}(\{x_1^*, ..., x_n^*\}))^0 = \{x \in E:\ \langle x_1^*, x\rangle_{E^*,E} \le 1,\ ...,\ \langle x_n^*, x\rangle_{E^*,E} \le 1\} \subseteq (C-x)^{00}.$$

Біполяра $(C-x)^{00}$ є замиканням опуклої відкритої множини $C-x$, що містить нуль. Тому

$$\{x \in E:\ \langle x_1^*, x\rangle_{E^*,E} < 1,\ ...,\ \langle x_n^*, x\rangle_{E^*,E} < 1\} \subseteq C-x.$$

Ми показали, для довільного $x \in C$ множина $C-x$ є слабким околом нуля. Отже, множина $C \subseteq E$ слабко відкрита. □

Із теорем 4.13 і 4.14 безпосередньо випливає такий результат.

Теорема 4.15. *Нехай* $(E, \|\cdot\|_E)$ *— рефлексивний банахів простір і виконано умови:*

1) функціонал $f: E \to \mathbb{R}$ *—* $\sigma(E, E^*)$*-напівнеперервний знизу;*

2) непорожня множина $F_0 \subseteq E$ *— опукла, замкнена і обмежена або опукла замкнена і функціонал* f *коерцитивний на* F_0*, тобто*

$$f(x) \to +\infty \quad \textit{при} \quad x \in F_0,\ \|x\|_E \to +\infty;$$

3) множини $F_k \subseteq E$ *— відкриті опуклі та* $\dim \operatorname{lin}\left(F_k^0\right) < +\infty$ *(*$k = \overline{1,m}$*).*

Тоді задача

$$f(x) \to \inf_{x \in X},\ \ X = F_0 \setminus \cup_{k=1}^{m} F_k,$$

має розв'язок. Причому множина розв'язків є $\sigma(E, E^*)$*-компактною.*

4.6 Опуклі функціонали, що досягають максимуму на кожній обмеженій, замкненій та опуклій множині

Поставимо задачу: охарактеризувати клас заданих у рефлексивному банаховому просторі E напівнеперервних знизу опуклих функціоналів, що досягають свого супремуму на довільній обмеженій замкненій й опуклій підмножині простору E. Такі приклади, як

$$x \mapsto \|x\|_E;\ \ x \mapsto \langle x^*, x\rangle_{E^*,E},\ \ x^* \in E^*,$$

указують, що, можливо, властивість секвенційної неперервності у топології $\sigma(E, E^*)$ і є характеристичною. У наступних двох твердженнях ми даємо на поставлене питання вичерпну відповідь.

Відмітимо, що наступна теорема та її доведення є результатом осмислення прикладів обмежених замкнених та опуклих підмножин гільбертового простору, що не мають елементів з максимальною нормою. Такою множиною є, наприклад, замкнена опукла оболонка системи векторів $\frac{n}{n+1}e_n$ $(n \in \mathbb{N})$, де $\{e_n\}$ — стандартний ортонормований базис простору ℓ_2.

Нехай E, F — два лінійних простори, що приведені у двоїстість білінійним функціоналом $E \times F \ni (x, y) \mapsto \langle x, y\rangle \in \mathbb{R}$, $\sigma = \sigma(E, F)$ — найслабша локально опукла топологія на E, узгоджена з двоїстістю між E і F, а $\tau = \tau(E, F)$ — топологія Маккі на E. Будемо розглядати двоїсті пари (E, F), що задовольняють умову

(S): τ-замикання кожної опуклої обмеженої підмножини E співпадає з її секвненційним τ-замиканням.

Має місце

Теорема 4.16. *Нехай двоїста пара (E, F) задовольняє умову (S), секвенційно τ-напівнеперервний знизу опуклий функціонал f не є секвенційно σ-неперервним. Тоді існує обмежена, замкнена та опукла множина*[2] *$X \subseteq E$, на якій функціонал f не досягає свого супремуму.*

Доведення. Нехай $x^* \in E$ — точка, у якій функціонал f не є секвенційно неперервним у топології σ, тобто, існують число $\varepsilon > 0$ і послідовність $x_n \in E$ такі, що $x_n \to x^*$ у топології σ; $\forall\, n \in \mathbb{N}$: $|f(x_n) - f(x^*)| \geq \varepsilon$. Можна вважати, що $f(x^*) = 0$.

Відмітимо існування $n^* \in \mathbb{N}$ такого, що $\forall\ n \geq n^*$: $f(x_n) \geq \varepsilon$. Дійсно, інакше існує підпослідовність (x_{n_k}) така, що $f(x_{n_k}) < -\varepsilon$ і, відповідно, $\liminf_{n\to\infty} f(x_n) \leq -\varepsilon$. А це суперечить секвенційній τ-напівнеперервності знизу функціоналу f.

Для $n \geq n^*$ існує така точка

$$y_n \in [x_n, x^*] = \{\alpha x_n + (1-\alpha)\, x^* :\ 0 \leq \alpha \leq 1\},$$

що $f(y_n) = \alpha_n \varepsilon$, де (α_n) — послідовність дійсних чисел з інтервала $(0, 1)$, що монотонно збігається до 1. Зрозуміло, що $y_n \to x^*$ у топології σ. Позначимо через X замикання в топології τ множини $\operatorname{conv}\{y_n : n \geq n^*\}$. Ясно що X — τ-замкнена опукла та обмежена множина. Із опуклості та τ-напівнеперервності f випливає, що $X \subseteq \{x \in X :\ f(x) \leq \varepsilon\}$.

[2]Клас обмежених замкнених та опуклих множин однаковий для всіх локально опуклих топологій, узгоджених з двоїстістю.

Покажемо від супротивного, що f не досягає супремуму на X. Нехай існує $\bar{x} \in X$: $f(\bar{x}) = \sup_{x \in X} f(x)$. Зокрема, $\forall\, n \geq n^*$: $f(\bar{x}) \geq f(y_n) = \alpha_n \varepsilon$. Звідки

$$f(\bar{x}) \geq \sup_{n \geq n^*} \alpha_n \varepsilon = \varepsilon. \tag{4.47}$$

Розглянемо таку послідовність (z_p), що $z_p \in \operatorname{conv}\{y_n : n \geq n^*\}$, $z_p \to \bar{x}$ у топології τ. Із τ-напівнеперервності f та (4.47) маємо $f(\bar{x}) \leq \liminf_{p \to \infty} f(z_p)$ та $\varepsilon \leq \liminf_{p \to \infty} f(z_p)$.

Якщо ми доведемо, що $z_p \to x^*$ у топології σ, то отримаємо $\bar{x} = x^*$ і абсурдну нерівність $f(x^*) = 0 < \varepsilon \leq f(\bar{x}) = 0$.

Для довільного $p \in \mathbb{N}$ вектор z_p має вигляд

$$z_p = \sum_{n=n^*}^{\infty} \lambda_{p,n} y_n,$$

де $\lambda_{p,n} \in [0,1]$, $\sum_{n=n^*}^{\infty} \lambda_{p,n} = 1$ і $\lambda_{p,n} = 0$ при фіксованому p, починаючи з деякого n.

Доведемо, що $\forall n \geq n^*$: $\lambda_{p,n} \to 0$ при $p \to \infty$. Із опуклості функціоналу f $\forall m \geq n^*$ випливає нерівність

$$f(z_p) = f\left(\sum_{n=n^*}^{\infty} \lambda_{p,n} y_n\right) \leq \sum_{n=n^*}^{\infty} \lambda_{p,n} f(y_n) = \sum_{n=n^*}^{\infty} \lambda_{p,n} \alpha_n \varepsilon \leq \lambda_{p,m} \alpha_m \varepsilon +$$
$$+ \sum_{n=n^*, n \neq m}^{\infty} \lambda_{p,n} \varepsilon = \left(\sum_{n=n^*}^{\infty} \lambda_{p,n} + (\alpha_m - 1)\lambda_{p,m}\right) \varepsilon = (1 + (\alpha_m - 1)\lambda_{p,m})\, \varepsilon.$$

Перейдемо до нижньої границі по p, фіксуючи $m \geq n^*$

$$\liminf_{p \to \infty} f(z_p) \leq \liminf_{p \to \infty} (1 + (\alpha_m - 1)\lambda_{p,m})\, \varepsilon = \left(1 + (\alpha_m - 1)\, \overline{\lim_{p \to \infty}}\, \lambda_{p,m}\right) \varepsilon.$$

Звідки $\limsup_{p \to \infty} \lambda_{p,m} \leq 0$ та, урахувавши невід'ємність $\lambda_{p,m}$, отримуємо

$$\lim_{p \to \infty} \lambda_{p,m} = 0. \tag{4.48}$$

Візьмемо $l \in F$ і позначимо $C = \sup_{x \in X} |\langle x, l \rangle|$. Отже, $|\langle x^*, l \rangle| \leq C$, $|\langle y_n, l \rangle| \leq C$ $\forall n \geq n^*$. Із σ-збіжності послідовності (y_n) до x^* випливає, що $\forall \varepsilon' > 0$ $\exists n' \geq n^*$: $|\langle y_n - x^*, l \rangle| < \frac{\varepsilon'}{2}$ $\forall n \geq n'$. Маємо $\forall p \in \mathbb{N}$:

$$\left|\sum_{n=n'}^{\infty} \lambda_{p,n} \langle y_n - x^*, l \rangle\right| \leq \sum_{n=n'}^{\infty} \lambda_{p,n} |\langle y_n - x^*, l \rangle| < \left(\sum_{n=n'}^{\infty} \lambda_{p,n}\right) \frac{\varepsilon'}{2} \leq \frac{\varepsilon'}{2}.$$

Урахувавши (4.48), робимо висновок, що $\exists p' \in \mathbb{N}$: $0 \leq \lambda_{p,n} < \frac{\varepsilon'}{4Cn'}$ $\forall p \geq p'$,

$n^* \le n < n'$. Отже, $\forall p \ge p'$:

$$|\langle z_p - x^*, l\rangle| = \left|\sum_{n=n^*}^{\infty} \lambda_{p,n} \langle y_n - x^*, l\rangle\right| \le$$

$$\le \sum_{n=n^*}^{n'-1} \lambda_{p,n} |\langle y_n - x^*, l\rangle| + \sum_{n=n'}^{\infty} \lambda_{p,n} |\langle y_n - x^*, l\rangle| < \sum_{n=n^*}^{n'-1} \frac{\varepsilon'}{4Cn'} 2C + \frac{\varepsilon'}{2} < \varepsilon'.$$

Тим самим ми довели, що $z_p \to x^*$ у топології σ. □

Сформулюємо основний результат.

Теорема 4.17. *Нехай* $(E, \|\cdot\|_E)$ *— рефлексивний банахів простір,* $f : E \to \mathbb{R}$ *— напівнеперервний знизу опуклий функціонал. Тоді наступні умови рівносильні:*

1) функціонал f *досягає супремуму на довільній обмеженій замкненій опуклій множині* $X \subseteq E$*;*

2) функціонал f *секвенційно неперервний у топології* $\sigma(E, E^*)$*.*

Доведення. Імплікація 1) $\Rightarrow$ 2) випливає з теореми 4.16, а зворотне твердження — класичний результат, що випливає з теорем Вейєрштрасса, Мазура та рефлексивності простору E. □

У світлі отриманих тверджень природно виникає проблема знаходження конструктивних необхідних та достатніх умов слабкої секвенційної неперервності опуклих функціоналів.

Має місце проста достатня умова слабкої секвенційної неперервності.

Теорема 4.18. *Нехай* E *— банахів простір,* $f : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *— власний напівнеперервний знизу опуклий функціонал. Якщо для довільної обмеженої множини* $X \subseteq \operatorname{dom}(f)$ *множина* $\partial f(X) = \cup_{x \in X} \partial f(x)$ *відносно компактна у сильній топології простору* E^**, то функціонал* $f\big|_{\operatorname{dom}(f)}$ *секвенційно неперервний у топології* $\sigma(E, E^*)$*.*

Доведення. Міркуємо від супротивного. Нехай $x_0 \in \operatorname{dom}(f)$ — точка, у якій функціонал f не є секвенційно неперервним у топології $\sigma(E, E^*)$, тобто, існують таке число $\varepsilon > 0$ і послідовність $x_n \in \operatorname{dom}(f)$, що

$$x_n \to x_0 \ \text{ у топології } \ \sigma(E, E^*); \ \ \forall n \in \mathbb{N} : \ |f(x_n) - f(x_0)| \ge \varepsilon. \qquad (4.49)$$

Із означення субдиференціалу $\partial f(\cdot)$ випливає, що

$$\langle y_0, x_n - x_0\rangle_{E^*,E} \le f(x_n) - f(x_0) \le \langle y_n, x_n - x_0\rangle_{E^*,E},$$

де $y_0 \in \partial f(x_0)$, $y_n \in \partial f(x_n)$.

Множина $X = \{x_n : n \in \{0\} \cup \mathbb{N}\} \subseteq \mathrm{dom}\ (f)$ обмежена, тобто, за умовою існує така підпослідовність (y_{n_k}) і точка $y \in E^*$, що $\|y_{n_k} - y\|_{E^*} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$. Отже,

$$\begin{aligned}\langle y_0, x_{n_k} - x_0\rangle_{E^*,E} &\le f(x_{n_k}) - f(x_0) \le \\ &\le \langle y_{n_k} - y, x_{n_k} - x_0\rangle_{E^*,E} + \langle y, x_{n_k} - x_0\rangle_{E^*,E} \le \\ &\le 2K\|y_{n_k} - y\|_{E^*} + \langle y, x_{n_k} - x_0\rangle_{E^*,E}, \quad (4.50)\end{aligned}$$

де $K = \sup_{n\ge 0}\|x_n\|_E < +\infty$. Зліва та справа у нерівності (4.50) стоять нескінченно малі, отже, $f(x_{n_k}) \to f(x_0)$ при $k \to \infty$, що суперечить нерівності з (4.49). □

Зауваження 4.6. Наведена теорема 4.18 є частковим узагальненням теореми 8.2 з [127] на недиференційовний випадок.

Нагадаємо, що спряжений до $f : E \to \mathbb{R}$ функціонал визначається так

$$f^*(x^*) = \sup_{x\in E}\{\langle x^*, x\rangle_{E^*,E} - f(x)\}.$$

Відмітимо, що для довільного f функціонал f^* є опуклим напівнеперервним знизу функціоналом, що приймає значення в розширеній прямій $\overline{\mathbb{R}}$ [53].

Із теореми 4.14 випливає критерій слабкої неперервності неперервного опуклого функціоналу.

Теорема 4.19. *Неперервний опуклий функціонал $f : E \to \mathbb{R}$ є неперервним у топології $\sigma(E, E^*)$ тоді і тільки тоді, коли лінійна оболонка ефективної області* $\mathrm{dom}\,(f^*) \subseteq E^*$ *скінченновимірна.*

Доведення. Слабка неперервність опуклого неперервного функціоналу f рівносильна $\sigma(E \oplus \mathbb{R}, E^* \oplus \mathbb{R})$-відкритості множини

$$M = \{(x, \alpha) \in E \oplus \mathbb{R} :\ f(x) < \alpha\}.$$

Множина $M \subseteq E \oplus \mathbb{R}$ опукла і відкрита. Отже, за теоремою 4.14 вона відкрита у топології $\sigma(E \oplus \mathbb{R}, E^* \oplus \mathbb{R})$ тоді і лише тоді, коли лінійна оболонка поляри $M^0 \subseteq E^* \oplus \mathbb{R}$ скінченновимірна.

Розглянемо структуру множини M^0. За означенням поляри маємо

$$M^0 = \left\{(x^*, \alpha^*) \in E^* \oplus \mathbb{R} : \sup_{(x,\alpha)\in M}\{\langle x^*, x\rangle_{E^*,E} + \alpha^*\alpha\} \le 1\right\}.$$

Ясно, що $(0, 0) \in M^0$. Оскільки $\forall x \in E$ із $(x, \alpha) \in M$ випливає, що $(x, \alpha') \in M$ для всіх $\alpha' \ge \alpha$, то другі координати елементів множини M^0 не можуть бути

додатними. Нехай $(x^*, 0) \in M^0$. Тоді

$$\sup_{(x,\alpha)\in M} \langle x^*, x\rangle_{E^*,E} = \sup_{x\in E} \langle x^*, x\rangle_{E^*,E} \le 1,$$

що можливо лише коли $x^* = 0$. Тобто, якщо $(x^*, 0) \in M^0$, то $x^* = 0$.

Розглянемо множину

$$M^0\setminus\{(0,0)\} = \left\{(x^*, \alpha^*) \in E^* \oplus \mathbb{R} : \sup_{(x,\alpha)\in M} \{\langle x^*, x\rangle_{E^*,E} + \alpha^*\alpha\} \le 1\ ,\ \alpha^* < 0\right\}.$$

Має місце ланцюжок рівностей

$$\begin{aligned} M^0\setminus\{(0,0)\} &= \\ &= \left\{(x^*, -\alpha^*) \in E^* \oplus \mathbb{R} : \sup_{(x,\alpha)\in M} \{\langle x^*, x\rangle_{E^*,E} - \alpha^*\alpha\} \le 1\ ,\ \alpha^* > 0\right\} = \\ &= \left\{(x^*, -\alpha^*) \in E^* \oplus \mathbb{R} : \sup_{x\in E} \{\langle x^*, x\rangle_{E^*,E} - \alpha^* f(x)\} \le 1\ ,\ \alpha^* > 0\right\} = \\ &= \left\{(x^*, -\alpha^*) \in E^* \oplus \mathbb{R} : \ \alpha^* f^*\left(\frac{x^*}{\alpha^*}\right) \le 1\ ,\ \alpha^* > 0\right\}. \end{aligned}$$

Не зменшуючи загальності, можна вважати, що $f^*(x^*) > 0$ для всіх $x^* \in E^*$. Дійсно, $\forall A \in \mathbb{R}$ маємо $(f - A)^* = f^* + A$ і $\operatorname{dom}(f^*) = \operatorname{dom}((f - A)^*)$. Візьмемо таке число A, що $f(0) - A < 0$. Тоді для всіх $x^* \in E^*$

$$(f - A)^*(x^*) = \sup_{x\in E} \{\langle x^*, x\rangle_{E^*,E} - f(x) + A\} \ge -f(0) + A > 0.$$

Ураховуючи додатність f^*, приходимо до рівності

$$\begin{aligned} M^0 &= \left\{\left(\frac{z^*}{\beta^*}, -\frac{1}{\beta^*}\right) : \ f^*(z^*) \le \beta^*\right\} \cup \{(0,0)\} = \\ &= \left\{\left(\frac{z^*}{\beta^*}, -\frac{1}{\beta^*}\right) : \ (z^*, \beta^*) \in \operatorname{epi}(f^*)\right\} \cup \{(0,0)\}. \end{aligned}$$

Звідси випливає, що M^0 лежить у скінченновимірному підпросторі простору $E^* \oplus \mathbb{R}$ тоді і лише тоді, коли надграфік $\operatorname{epi}(f^*)$ лежить у скінченновимірному підпросторі простору $E^* \oplus \mathbb{R}$. Звичайно, остання умова рівносильна скінченновимірності лінійної оболонки ефективної області $\operatorname{dom}(f^*) \subseteq E^*$. □

Розділ 5

Чисельні методи узагальненої оптимізації лінійних систем

У розділі увагу приділено обґрунтовуванню чисельних методів оптимізації лінійних розподілених систем з узагальненим керуванням. Ми припускали, що оператор, який описує модель, задовольняє апріорні оцінки в негативних нормах[1]. Досліджено гладкість функціоналу якості задач узагальненої оптимізації лінійних систем з розподіленими параметрами. Для задач керування з опуклими та неопуклими допустимими множинами доведено збіжність декількох алгоритмів першого та другого порядків із похибками в ітераційних підзадачах. Проведено дослідження можливої асимптотичної поведінки мінімізуючих послідовностей допустимих керувань. Отримано новий варіаційний принцип, що дозволив довести існування мінімізуючих послідовностей, які задовольняють секвенційний аналог необхідних умов оптимальності другого порядку. Для абстрактної задачі оптимального керування встановлено умови глобальної оптимальності.

Основний матеріал розділу був раніше опублікований у статтях [136–143].

5.1 Постановка задач. Гладкість функціонала якості

При дослідженні задач узагальненого оптимального керування системами з розподіленими параметрами будемо використовувати підхід робіт [130, 139].

Нехай $\mathcal{L}$ — лінійний диференціальний оператор з частинними похідними, який діє у просторі $L_2(Q)$ ($Q = (0,T) \times \Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ — регулярна область) з областю визначення $D(\mathcal{L})$, що складається з гладких в $\bar{Q}$ функцій, які задовольняють граничні умови (гр). Формально спряжений оператор позначимо

[1] З використанням теорії оснащених гільбертових просторів та методу апріорних оцінок в негативних нормах розглядати задачі імпульсного керування лінійними системами з розподіленими параметрами запропонував С. І. Ляшко [128]. Це дозволило створити загальну теорію сингулярного (узагальненого) оптимального керування лінійними системами [129, 130] та розв'язати чимало питань щодо існування оптимальних керувань, керованості [131, 132], побудови необхідних умов оптимальності та чисельних методів оптимізації [133–135].

$\mathcal{L}^+$, а його область визначення — $D(\mathcal{L}^+)$ — множина гладких в $\bar{Q}$ функцій, які задовольняють спряжені граничні умови (гр$^+$). Припускаємо, що $D(\mathcal{L})$ і $D(\mathcal{L}^+)$ щільні в $L_2(Q)$.

Нехай відносно $L_2(Q)$ побудовано ланцюжки гільбертових оснащень [144]

$$W \subseteq H \subseteq L_2(Q) \subseteq H^- \subseteq W^-, \;\; W_+ \subseteq H_+ \subseteq L_2(Q) \subseteq H_+^- \subseteq W_+^-,$$

де W, H (W_+, H_+) — поповнення $D(\mathcal{L})$ ($D(\mathcal{L}^+)$) за позитивними нормами $\|\cdot\|_W$, $\|\cdot\|_H$ ($\|\cdot\|_{W_+}$, $\|\cdot\|_{H_+}$) (як правило, це норми відповідних просторів С. Л. Соболєва); W^-, H^- (W_+^-, H_+^-) — відповідні негативні простори.

Припустимо, що для $\mathcal{L}$ і $\mathcal{L}^+$ справедливі апріорні оцінки в негативних нормах

$$c_1 \|y\|_H \le \|\mathcal{L}y\|_{W_+^-} \le c_2 \|y\|_W \quad \forall y \in D(\mathcal{L}),$$
$$c_1 \|p\|_{H_+} \le \left\|\mathcal{L}^+ p\right\|_{W^-} \le c_2 \|p\|_{W_+} \quad \forall p \in D\left(\mathcal{L}^+\right),$$

де c_1, c_2 — додатні константи, що не залежать від функцій y, p.

Із правих частин оцінок випливає, що $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}^+$ можна розширити за неперервністю до неперервно діючих $W \to W_+^-$, $W_+ \to W^-$ операторів. Для розширених операторів збережемо старі позначення. Далі, говорячи про оператори $\mathcal{L}$ і $\mathcal{L}^+$, будемо розуміти їх розширення. Оцінки в негативних нормах залишаються справедливими при довільних $y \in W$, $p \in W_+$. Для $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}^+$ виконується тотожність $\langle \mathcal{L}y, p\rangle_+ = \langle y, \mathcal{L}^+ p\rangle$, де $\langle\cdot,\cdot\rangle_+$, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — канонічні білінійні форми, побудовані на просторах W_+^-, W_+ і W, W^-. За допомогою оцінок

$$c_1 \|y\|_H \le \|\mathcal{L}y\|_{W_+^-} \;\; \forall y \in W, \;\; c_1 \|p\|_{H_+} \le \left\|\mathcal{L}^+ p\right\|_{W^-} \;\; \forall p \in W_+,$$

доводиться існування та єдиність розв'язків з просторів W, W_+ рівнянь

$$\mathcal{L}y = f, \;\; f \in H_+^-, \tag{5.1}$$

$$\mathcal{L}^+ p = g, \;\; g \in H^-, \tag{5.2}$$

причому справедливі оцінки

$$\|y\|_W \le c\,\|f\|_{H_+^-}, \;\; \|p\|_{W_+} \le c\,\|g\|_{H^-}.$$

Будемо також розглядати розв'язки з більш широких класів. Узагальнений розв'язок у наведеному нижче розумінні співпадає з поняттям ультра слабкого розв'язку методу Ж.-Л. Ліонса «транспонування ізоморфізму» [145].

Узагальненим розв'язком рівняння (5.1) з $f \in W_+^-$ називаємо елемент $y \in H$ такий, що $[y, \mathcal{L}^+ p] = \langle f, p\rangle_+$ $\forall p \in W_+$: $\mathcal{L}^+ v \in H^-$, де $[\cdot,\cdot]$ — канонічна білінійна форма, побудована на просторах H, H^-.

Аналогічно, узагальненим розв'язком спряженого рівняння (5.2) із правою частиною $g \in W^-$ називаємо елемент $p \in H_+$ такий, що $[\mathcal{L}y, p]_+ = \langle y, g\rangle$ $\forall y \in W$: $\mathcal{L}y \in H_+^-$, де $[\cdot\,,\cdot]_+ \colon H_+^- \times H_+ \to \mathbb{R}$ — канонічна білінійна форма.

Відомо, що для довільних елементів $f \in W_+^-$ і $g \in W^-$ існують єдині узагальнені розв'язки рівняння (5.1) і спряженого рівняння (5.2), причому справедливі оцінки

$$\|y\|_H \le c\,\|f\|_{W_+^-}, \quad \|p\|_{H_+} \le c\,\|g\|_{W^-}.$$

Зауваження 5.1. Нехай $y \in H \cap W$ — узагальнений розв'язок (5.1) із правою частиною $f \in W_+^-$, тоді y — розв'язок рівняння $\mathcal{L}y = f$. Для $f \in R(\mathcal{L})$ узагальнений розв'язок y також задовольняє рівнянню $\mathcal{L}y = f$.

Нехай $(V, \|\cdot\|_V)$ — банахів простір керувань, $F : V \to W_+^-$ – оператор, що задає вплив на систему. Для керування $u \in V$ стан $y = y(u) \in H$ системи визначається як узагальнений розв'язок рівняння $\mathcal{L}y = F(u)$. Нехай $\Phi : H \times V \to \mathbb{R}$ — заданий функціонал. Розглянемо задачу оптимального керування

$$J(u) = \Phi(y(u), u) \to \inf_{u \in U}, \tag{5.3}$$

$$\mathcal{L}y(u) = F(u), \;\; u \in U, \tag{5.4}$$

де U — підмножина допустимих керувань із простору керувань V.

Використовуючи результати про узагальнену розв'язність (5.1), міркування компактності–неперервності, легко довести, що задача (5.3), (5.4) має непорожню $\sigma(V, V^*)$-компактну множину розв'язків при виконанні умов:

1) функціонал $\Phi : H \times V \to \mathbb{R}$ секвенційно напівнеперервний знизу у слабких топологіях просторів H та V;

2) оператор $F : V \to W_+^-$ секвенційно слабко неперервний;

3) множина $U \subseteq D(F)$ компактна в топології $\sigma(V, V^*)$.

Зауваження 5.2. Сформульованим умовам задовольняють: функціонали вигляду $\Phi(y, u) = \alpha_0 \|y\|_H^{\beta_0} + \alpha_1 \|u\|_V^{\beta_1}$ ($\alpha_0,\ \alpha_1,\ \beta_0,\ \beta_1 > 0$); замкнені опуклі та обмежені підмножини U рефлексивних банахових просторів $(V, \|\cdot\|_V)$; імпульсні, точкові, рухомі та інші узагальнені керуючі впливи $F(\cdot)$ [130].

Зауваження 5.3. Якщо $J(\cdot)$ задовольняє умову коерцитивності: $J(u_k) \to +\infty$ при $\|u_k\|_V \to +\infty$, то $\sigma(V, V^*)$-компактна множина оптимальних керувань існує при необмеженій $\sigma(V, V^*)$-замкненій множині U рефлексивного простору $(V, \|\cdot\|_V)$.

Зауваження 5.4. Ураховуючи нелінійність оператора $F : V \to W_+^-$, функціонал якості $J(\cdot)$ може бути неопуклим і при квадратичному або лінійному функціоналі $\Phi : H \times V \to \mathbb{R}$, а (5.3), (5.4) — багатоекстремальною задачею.

Приділимо увагу диференціальним властивостям функціонала якості $J(\cdot)$.

Теорема 5.1. *Нехай оператор* $F : V \to W_+^-$ *у точці* $u \in V$ *має похідну Фреше* $F'(u) \in L\left(V, W_+^-\right)$*; функціонал* $\Phi : H \times V \to \mathbb{R}$ *має у точці* $(y(u), u) \in H \times V$ *похідну Фреше (*$\Phi_1'(y(u), u) \in H^-$, $\Phi_2'(y(u), u) \in V^*$ *— відповідні частинні похідні Фреше). Тоді функціонал якості* $J : V \to \mathbb{R}$ *диференційовний за Фреше у точці* $u \in V$ *і його похідна обчислюється за формулою*

$$\langle J'(u), h\rangle_{V^*,V} = \left\langle (F'(u))^* p + \Phi_2'(y(u), u), h\right\rangle_{V^*,V} \quad \forall h \in V, \tag{5.5}$$

де $p = p(u) \in W_+$ *— спряжений стан — розв'язок рівняння*

$$\mathcal{L}^+ p = \Phi_1'(y(u), u).$$

Доведення. Знайдемо в $u \in V$ лінійну частину приросту $\Delta J(u; h) = J(u+h) - J(u)$ функціонала якості. Маємо

$$\begin{aligned}\Delta J(u;h) = \Phi(y(u+h), u+h) - \Phi(y(u), u) = \\ = [y(u+h) - y(u), \Phi_1'(y(u), u)] + \\ + \langle \Phi_2'(y(u), u), h\rangle_{V^*,V} + o(\|y(u+h) - y(u)\|_H) + o(\|h\|_V).\end{aligned}$$

Введемо спряжений стан $p = p(u) \in W_+$ як розв'язок рівняння

$$\mathcal{L}^+ p = \Phi_1'(y(u), u).$$

Тоді можемо записати

$$\begin{aligned}[y(u+h) - y(u), \Phi_1'(y(u), u)] = \\ = \left[y(u+h) - y(u), \mathcal{L}^+ p\right] = \langle F(u+h) - F(u), p\rangle_+ = \\ = \langle F'(u)h, p\rangle_+ + o(\|h\|_V) = \left\langle (F'(u))^* p, h\right\rangle_{V^*,V} + o(\|h\|_V).\end{aligned}$$

Оскільки

$$\|y(u+h) - y(u)\|_H \le c\|F(u+h) - F(u)\|_{W_+^-} = O(\|h\|_V),$$

то

$$\Delta J(u;h) = \left\langle (F'(u))^* p, h\right\rangle_{V^*,V} + \langle \Phi_2'(y(u), u), h\rangle_{V^*,V} + o(\|h\|_V).$$

Функціонал $J : V \to \mathbb{R}$ диференційовний за Фреше в точці $u \in V$ і має місце зображення (5.5). □

Теорема 5.2. *Нехай на обмеженій опуклій множині* $U \subseteq V$ *оператор* $u \mapsto F'(u)$ *задовольняє умову Гельдера з показником* $\gamma \in (0, 1]$*; оператори*

$(y,u) \mapsto \Phi_1'(y,u)$ *і* $(y,u) \mapsto \Phi_2'(y,u)$ *задовольняють на обмежених підмножинах простору* $H \times V$ *умову Гельдера з показником* $\gamma \in (0,1]$. *Тоді похідна Фреше* $J'(\cdot)$ *задовольняє на множині* U *умову Гельдера з показником* γ.

Доведення. Нехай u_1, u_2 — довільні точки з множини U. Розглянемо

$$\begin{aligned}
&\|J'(h_1) - J'(h_2)\|_{V^*} = \\
&\quad = \left\|(F'(u_1))^* p_1 + \Phi_2'(y(u_1),u_1) - (F'(u_2))^* p_2 - \Phi_2'(y(u_2),u_2)\right\|_{V^*} \le \\
&\qquad \le \|F'(u_1)\|\,\|p_1 - p_2\|_{W_+} + \|F'(u_1) - F'(u_2)\|\,\|p_2\|_{W_+} + \\
&\qquad\qquad + \|\Phi_2'(y(u_1),u_1) - \Phi_2'(y(u_2),u_2)\|_{V^*},
\end{aligned}$$

де $p_1 \in W_+$, $p_2 \in W_+$ — розв'язки рівнянь

$$\mathcal{L}^+ p_1 = \Phi_1'(y(u_1),u_1), \quad \mathcal{L}^+ p_2 = \Phi_1'(y(u_2),u_2).$$

Оскільки оператор $u \mapsto F'(u)$ задовольняє умову Гельдера на обмеженій опуклій множині, то він і оператор $u \mapsto F(u)$ є обмеженими. Робимо висновок, що множина $\{y(u) \in H : u \in U\}$ обмежена у просторі H і оператори Φ_1', Φ_2' — гельдерові на множині $\{(y(u),u) : u \in U\} \subseteq H \times V$. Отже, маємо

$$\begin{aligned}
\|J'(h_1) - J'(h_2)\|_{V^*} &\le C_0 \|\Phi_1'(y(u_1),u_1) - \Phi_1'(y(u_2),u_2)\|_{H^-} + \\
&\quad + C_1 \|u_1 - u_2\|_V^\gamma \|\Phi_1'(y(u_2),u_2)\|_{H^-} + \\
&\quad + C_3 (\|y(u_1) - y(u_2)\|_H + \|u_1 - u_2\|_V)^\gamma \le \\
&\quad \le C_4 \|u_1 - u_2\|_V^\gamma + C_5 (\|y(u_1) - y(u_2)\|_H + \|u_1 - u_2\|_V)^\gamma.
\end{aligned}$$

Залишилось скористатись нерівністю

$$\begin{aligned}
\|y(u_1) - y(u_2)\|_H &\le c \|F(u_1) - F(u_2)\|_{W_+^-} \le \\
&\le c \sup_{\theta \in [0,1]} \|F'(u_1 + \theta(u_2 - u_1))\|\,\|u_1 - u_2\|_V \le C_6 \|u_1 - u_2\|_V.
\end{aligned}$$

□

Для отримання умов оптимальності другого порядку та побудови методів другого порядку слід вміти обчислювати другу похідну функціонала $J(\cdot)$.

Теорема 5.3. *Нехай: оператор* $F : V \to W_+^-$ *у точці* $u \in V$ *має другу похідну Фреше* $F''(u) \in L\left(V, V; W_+^-\right)$[2]; *функціонал* $\Phi : H \times V \to \mathbb{R}$ *має у точці* $(y(u),u) \in H \times V$ *другу похідну Фреше. Тоді функціонал* $J : V \to \mathbb{R}$ *двічі диференційовний за Фреше у точці* $u \in V$ *та його друга похідна*

[2]Нехай E, F, G — лінійні нормовані простори. Через $L(E,F;G)$ позначаємо множину всіх білінійних обмежених відображень $E \times F \to G$.

обчислюється за формулою ($h_1,\ h_2 \in V$)

$$J''(u)(h_1,h_2) = \langle F''(u)(h_1,h_2), p\rangle_+ + \Phi''_{11}(y(u),u)(z_1,z_2) + \\ + \Phi''_{12}(y(u),u)(z_1,h_2) + \Phi''_{12}(y(u),u)(z_2,h_1) + \Phi''_{22}(y(u),u)(h_1,h_2),$$

де $\Phi''_{11}(y(u),u) \in L(H,H;\mathbb{R})$, $\Phi''_{12}(y(u),u) = \Phi''_{21}(y(u),u) \in L(H,V;\mathbb{R})$, $\Phi''_{22}(y(u),u) \in L(V,V;\mathbb{R})$ — *відповідні частинні похідні Фреше другого порядку;* $p = p(u) \in W_+$ — *спряжений стан — розв'язок операторного рівняння* $\mathcal{L}^+ p = \Phi'_1(y(u),u)$*;* $z_1 \in H$, $z_2 \in H$ — *узагальнені розв'язки операторних рівнянь* $\mathcal{L}z_1 = F'(u)h_1$, $\mathcal{L}z_2 = F'(u)h_2$.

Доведення. Розглянемо першу похідну функціонала якості

$$\langle J'(u), h_1\rangle_{V^*,V} = \langle F'(u)h_1, p(u)\rangle_+ + \langle \Phi'_2(y(u),u), h_1\rangle_{V^*,V} \quad \forall h_1 \in V,$$

де $p(u) \in W_+$ — спряжений стан — розв'язок рівняння $\mathcal{L}^+ p = \Phi'_1(y(u),u)$. Використовуючи наслідок з ланцюгового правила обчислення похідної композиції відображень [146], отримуємо ($h_1,\ h_2 \in V$)

$$J''(u)(h_1,h_2) = \langle F''(u)(h_1,h_2), p(u)\rangle_+ + \langle F'(u)h_1, p'(u)h_2\rangle_+ + \\ + \Phi''_{21}(y(u),u)(y'(u)h_2,h_1) + \Phi''_{22}(y(u),u)(h_1,h_2), \quad (5.6)$$

де $y'(u) \in L(V,H)$ — похідна Фреше оператора $u \mapsto y(u)$, $p'(u) \in L\left(V, W_+^-\right)$ — похідна Фреше оператора $u \mapsto p(u)$. Вказані похідні обчислюються за формулами ($h \in V$):

$$y'(u)h = z_h \in H,$$

де $z_h \in H$ — узагальнений розв'язок рівняння $\mathcal{L}z_h = F'(u)h$;

$$p'(u)h = q_h \in W_+^-,$$

де $q_h \in W_+^-$ — розв'язок рівняння $\mathcal{L}^+ q_h = \Phi''_{11}(y(u),u)z_h + \Phi''_{12}(y(u),u)h$.

Зауважимо, що похідні $\Phi''_{11}(y(u),u)$ і $\Phi''_{12}(y(u),u)$ зараз розуміються як елементи просторів $L(H,H^-)$ і $L(V,H^-)$, відповідно.

Позначимо $z_k = z_{h_k}$, $q_k = q_{h_k}$ ($k = 1,2$). Має місце рівність

$$\langle F'(u)h_1, p'(u)h_2\rangle_+ = \langle F'(u)h_1, q_2\rangle_+ = \left[z_1, \mathcal{L}^+ q_2\right] = \\ = [z_1, \Phi''_{11}(y(u),u)z_2] + [z_1, \Phi''_{12}(y(u),u)h_2]. \quad (5.7)$$

Підставивши рівність (5.7) в (5.6), канонічно ототожнивши $L(H,H^-)$ із простором $L(H,H;\mathbb{R})$ і $L(V,H^-)$ із простором $L(H,V;\mathbb{R})$, згадавши про рівність $\Phi''_{12} = \Phi''_{21}$, отримаємо шукану формулу. □

Із гельдеровості похідних 2-го порядку відображень $F : V \to W_+^-$ і $\Phi : H \times$

$V \to \mathbb{R}$ випливає гельдеровість 2-ї похідної функціонала якості (однакового степеня).

Зауваження 5.5. Нехай $g \in H$, $\Phi(y,u) = \frac{1}{2}\|y-g\|_H^2 + \frac{1}{2}\|u\|_V^2$, $(V, \|\cdot\|_V)$ — простір Гільберта. Тоді друга похідна Фреше функціонала $J(\cdot)$ має простий вигляд

$$J''(u)(h_1,h_2) = \langle F''(u)(h_1,h_2), p\rangle_+ + (z_1,z_2)_H + (h_1,h_2)_V \quad (h_1,h_2 \in V),$$

де $F''(u) \in L\left(V,V;W_+^-\right)$ — друга похідна Фреше оператора $F: V \to W_+^-$; $p = p(u) \in W_+$ — спряжений стан — розв'язок рівняння $\mathcal{L}^+ p = D(y(u)-g)$, $D: H \to H^-$ — канонічна ізометрія, що діє з позитивного в негативний простір ланцюжка $H \subseteq L_2(Q) \subseteq H^-$; $z_1 \in H$, $z_2 \in H$ — узагальнені розв'язки рівнянь $\mathcal{L}z_1 = F'(u)h_1$, $\mathcal{L}z_2 = F'(u)h_2$.

Зауваження 5.6. Розглянемо задачу оптимального керування

$$J(u) = \frac{1}{2}\|y(u)-g\|_H^2 + \frac{1}{2}\|u\|_V^2 \to \inf_{u\in U},\ \ \mathcal{L}y(u) = F(u),\ \ u \in U,$$

де відображення $F: V \to W_+^-$ двічі диференційовне за Фреше на опуклій множині $U \subseteq V$. Функціонал $J(\cdot)$ буде опуклим на U при виконанні умови

$$\|F''(u)(h,h)\|_{W_+^-} \le \frac{\|h\|_V^2}{c_1c_2\|F(u)\|_{W_+^-} + c_1\|g\|_H} \ \ \forall u \in U\ \ \forall h \in V,$$

де c_1, c_2 — додатні константи з апріорних оцінок $\|p\|_{W_+} \le c_1\|l\|_{H^-}$, $\|y\|_H \le c_2\|\varphi\|_{W_+^-}$ для розв'язків рівнянь $\mathcal{L}^+p = l$, $\mathcal{L}y = \varphi$, відповідно.

5.2 Збіжність моделей алгоритмів узагальненої оптимізації лінійних систем

Перейдемо до дослідження алгоритмів наближеного розв'язання описаних вище задач узагальненого оптимального керування лінійними системами з розподіленими параметрами.

Розглянемо задачу оптимального керування

$$J(u) = \Phi(y(u),u) \to \inf_{u\in U}, \tag{5.8}$$

$$\mathcal{L}y(u) = F(u),\ \ u \in U, \tag{5.9}$$

де $F: V \to W_+^-$, U — множина допустимих керувань із гільбертового простору керувань V. Припускається, що

множина U — компактна в сильній топології та опукла.

У задачах оптимального керування системами з розподіленими параметрами сильна компактність, як правило, відсутня, але за рахунок параметризації чи регуляризації керування [130] задачу можна апроксимувати так, щоб мала місце сильна компактність.

Далі, якщо не вказано інше, будемо вважати, що виконані такі припущення про гладкість даних задачі (5.8), (5.9):

1) на множині $U \subseteq V$ оператор $u \mapsto F'(u)$ задовольняє умову Гельдера з показником $\gamma \in (0, 1]$;

2) оператори $(y, u) \mapsto \Phi_1'(y, u)$ і $(y, u) \mapsto \Phi_2'(y, u)$ задовольняють на обмежених підмножинах простору $H \times V$ умову Гельдера з показником $\gamma \in (0, 1]$.

Із теореми 5.2 випливає, що тоді похідна Фреше $J'(\cdot)$ задовольняє на U умову Гельдера з показником γ.

Структура алгоритмів, які вивчаються в підрозділі, наступна: будується послідовність керувань $u_{n+1} = u_n + \rho_n(\bar{u}_n - u_n)$, що задовольняють умову $u_n \in U$, а керування $\bar{u}_n$ є наближеним розв'язком деякої допоміжної екстремальної задачі.

Ефективні на практиці алгоритми часто мають напівемпіричний характер. Деякі з них містять не до кінця формалізовані етапи, що часто робить неможливим доведення їх збіжності у тому виді, в якому вони сформульовані. Внаслідок цього можна стверджувати, що, як правило, математики в даній галузі займаються побудовою та дослідженням моделей ітераційних алгоритмів оптимізації — більш простих алгоритмів, що зберігають основні риси методів практичних розрахунків (див. [27, 147–153]).

Для доведення збіжності алгоритмів будемо використовувати метод, розвинутий у роботах київської школи негладкої та стохастичної оптимізації [149,154,155]. Ця методика у певній мірі є незалежною від конкретної структури алгоритму та складається з перевірки набору стандартних умов, виконання яких для певного алгоритму гарантує його збіжність. Цей підхід дозволяє для цілого класу алгоритмів провести значну частину доведення збіжності в рамках доведення загальних теорем збіжності, завдяки чому викладення результатів спрощується.

Розглянемо наступну абстрактну задачу:

задано підмножину X^* *повного метричного простору* (X, ρ);
знайти точку підмножини X^*.

У задачах оптимізації для опису множини X^*, як правило, використовують необхідні умови оптимальності.

Під ітераційним алгоритмом розв'язання абстрактної задачі розуміємо певне правило побудови послідовності точок (x_n) метричного простору X. Алгоритм вважаємо збіжним, якщо всі граничні точки послідовності (x_n) належать множині X^*.

Теорема 5.4. *Припустимо, що:*

1) існує компакт $K \subseteq X$*:* $x_n \in K \ \forall\, n \in \mathbb{N}$*;*

2) для довільної збіжної підпослідовності (x_{n_k}) *виконано умови:*

a) якщо $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x' \in X^*$*, то* $\rho(x_{n_k+1}, x_{n_k}) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$*;*

b) якщо $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x'' \notin X^*$*, то* $\exists\, \delta_0 > 0$*:* $\forall\, \delta \in (0, \delta_0]$ $\tau_k < +\infty$*, де*

$$\tau_k = \min_{n > n_k} \{n : \rho(x_n, x_{n_k}) > \delta\};$$

3) існує неперервна на множині граничних точок послідовності (x_n) *функція* $W : X \to \mathbb{R}$ *така, що для довільної підпослідовності з 2 b)*

$$\limsup_{k\to\infty} W(x_{\tau_k}) < \lim_{k\to\infty} W(x_{n_k});$$

4) множина $W^* = W(X^*) = \{W(x) : x \in X^*\} \subseteq \mathbb{R}$ *має скрізь щільне доповнення.*

Тоді послідовність $(W(x_n))$ *має границю та всі граничні точки послідовності* (x_n) *утворюють зв'язну компактну підмножину* X^**.*

Зауваження 5.7. Якщо опустити умови 2 a) і 4, то можна стверджувати лише, що існуть граничні точки послідовності (x_n), які належать множині X^*. Відмітимо, що у формулюванні наведеної теореми відтворено схему доведення збіжності алгоритму від супротивного, тому деякі умови теореми без контексту доведення від супротивного є психологічно незручними.

У цьому розділі при формулюванні алгоритмів будемо вважати, що із заданою (в окремих випадках довільною) точністю може бути розв'язана задача

$$\langle u^*, u\rangle_{V^*,V} \to \inf_{u\in U},\ \ u^* \in V^*,$$

або задача

$$\langle u^*, u\rangle_{V^*,V} + \tfrac{1}{2}\|u\|_V^2 \to \inf_{u\in U},\ \ u^* \in V^*.$$

Множини U, що мають такі властивості, можна назвати множинами простої структури [153]. Звичайно «простота» залежить і від наявних обчислювальних ресурсів. Якщо U — множина простої структури, то розглянуті нижче

алгоритми безпосередньо можна застосувати для розв'язання задачі керування. Інакше, вони лише моделі деяких чисельних методів, про поведінку яких ми маємо тільки приблизну якісну картину.

5.2.1 Варіант методу лінеаризації

Нехай $f : X \to \mathbb{R}$ і $\varepsilon > 0$. Записом $f(x) \to \varepsilon - \inf_{x \in X}$ будемо позначати задачу пошуку точок $x' \in X$ таких, що $f(x') \le \inf_{x \in X} f(x) + \varepsilon$.

Розглянемо задачу оптимального керування (5.8), (5.9) та наведений нижче ітераційний процес її розв'язання.

Алгоритм 5.1. Метод лінеаризації.

1. Обираємо початкове наближення $u_0 \in U$. Покладаємо $n = 0$.
2. Знаходимо $y_n \in H$ — узагальнений розв'язок рівняння: $\mathcal{L} y_n = F(u_n)$.
3. Знаходимо спряжений стан $p_n \in W_+$ — розв'язок рівняння
$$\mathcal{L}^+ p_n = \Phi_1'(y_n, u_n).$$
4. Знаходимо $\bar{u}_n \in U$ — розв'язок екстремальної задачі
$$\left((F'(u_n))^* p_n + \Phi_2'(y_n, u_n), u - u_n \right)_V \to \varepsilon_n - \inf_{u \in U}.$$
5. Покладаємо $u_{n+1} = u_n + \rho_n(\bar{u}_n - u_n)$, де $\rho_n \in (0, 1]$ — кроковий множник, $n := n + 1$ і переходимо на крок 2.

Теорема 5.5. *Нехай*

$$\rho_n \in (0, 1], \ \rho_n \to 0, \ \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n = +\infty, \ \varepsilon_n \ge 0, \ \varepsilon_n \to 0.$$

Якщо функціонал J приймає на множині

$$U^* = \{u^* \in U : (J'(u^*), u - u^*)_V \ge 0 \ \forall u \in U\}$$

не більш ніж зліченну кількість значень, то всі граничні точки (які обов'язково існують) послідовності (u_n) утворюють компактну зв'язну підмножину в U^*, а числова послідовність $(J(u_n))$ має границю.

Зауваження 5.8. Нехай $\varepsilon_n \searrow 0$, $\delta_n' \searrow 0$ і $\delta_n'' \searrow 0$. Аналогічне теоремі 5.5 твердження про збіжність справджується для наступної моделі алгоритму.

1. Обираємо початкове наближення $u_0 \in U$. Покладаємо $n = 0$.

2. Знаходимо $\tilde{y}_n \in H$: $\|\tilde{y}_n - y_n\|_H \le \delta'_n$, де $y_n \in H$ — узагальнений розв'язок рівняння $\mathcal{L}y_n = F(u_n)$.

3. Знаходимо $\tilde{p}_n \in W_+$: $\|\tilde{p}_n - p'_n\|_{W_+} \le \delta''_n$, де $p'_n \in W_+$ — розв'язок рівняння
$$\mathcal{L}^+ p'_n = \Phi'_1(\tilde{y}_n, u_n).$$

4. Знаходимо $\bar{u}_n \in U$ — розв'язок екстремальної задачі
$$\left((F'(u_n))^* \tilde{p}_n + \Phi'_2(\tilde{y}_n, u_n), u - u_n\right)_V \to \varepsilon_n - \inf_{u \in U}.$$

5. Покладаємо $u_{n+1} = u_n + \rho_n(\bar{u}_n - u_n)$, де $\rho_n \in (0,1]$, $n := n+1$ і переходимо на крок 2.

Доведення теореми 5.5. Перевіримо виконання умов теореми про достатні умови збіжності ітераційних алгоритмів оптимізації. Покладемо $W = J$. Функціонал W неперервний на U, множина $W^* = \{W(u) : u \in U^*\}$ має скрізь щільне доповнення. Крім того, функціонал J диференційовний за Фреше, та похідна J' задовольняє на U умову Гельдера з показником $\gamma \in (0,1]$. За побудовою всі члени послідовності (u_n) належать компакту U.

Розглянемо підпослідовність (u_{n_k}) таку, що $u_{n_k} \to u^* \in U^*$ при $k \to \infty$. Маємо

$$\|u_{n_k+1} - u_{n_k}\|_V = \rho_{n_k} \|\bar{u}_{n_k} - u_{n_k}\|_V \le \rho_{n_k} \operatorname{diam}(U) \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Нехай (u_{n_k}) — підпослідовність, що збігається до керування $u' \notin U^*$. Покажемо, що існує $\delta_0 > 0$ таке, що для всіх k та $\delta \in (0, \delta_0]$:

$$\tau_k = \min_{n > n_k} \{n : \|u_n - u_{n_k}\|_V > \delta\} < +\infty.$$

Припустимо протилежне. Нехай для всіх $\delta_0 > 0$ існує таке $k_0 = k_0(\delta_0) \in \mathbb{N}$, що $\left\|u_n - u_{n_{k_0}}\right\|_V \le \delta_0$ для всіх $n > n_{k_0}$. Тоді з нерівності трикутника маємо

$$u_n \in B_{\delta_0}(u_{n_{k_0}}) \Rightarrow u_{n_k} \in B_{\delta_0}(u_{n_{k_0}}) \text{ для } k > k_0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow u' \in B_{\delta_0}(u_{n_{k_0}}) \Rightarrow u_n \in B_{2\delta_0}(u')$$

для всіх $n > n_{k_0}$.

Оскільки $u' \notin U^*$, то існують $\lambda > 0$ і $\bar{u}' \in U$ такі, що

$$(J'(u'), \bar{u}' - u')_V \le -\lambda. \tag{5.10}$$

Розглянемо приріст

$$W(u_n) - W(u_{n_k}) = J(u_n) - J(u') - J(u_{n_k}) + J(u') =$$

$$= (J'(u' + \theta'(u_n - u')), u_n - u')_V - \\ - (J'(u' + \theta''(u_{n_k} - u')), u_{n_k} - u')_V = \\ = (J'(u'), u_n - u')_V + (J'(u' + \theta'(u_n - u')) - J'(u'), u_n - u')_V - \\ - (J'(u'), u_{n_k} - u')_V + (J'(u') - J'(u' + \theta''(u_{n_k} - u')), u_{n_k} - u')_V \le \\ \le (J'(u'), u_n - u_{n_k})_V + 2^{2+\gamma} C \delta_0^{1+\gamma} = \\ = \sum_{p=n_k}^{n-1} \rho_p (J'(u'), \bar{u}_p - u_p)_V + 2^{2+\gamma} C \delta_0^{1+\gamma}, \quad (5.11)$$

де $n > n_k$, $k > k_0$ та $\{\theta', \theta''\} \subset [0, 1]$.

У нерівності (5.11) оцінимо зверху величину $(J'(u'), \bar{u}_p - u_p)_V$. Маємо

$$(J'(u'), \bar{u}_p - u_p)_V = \\ = (J'(u') - J'(u_p), \bar{u}_p - u_p)_V + (J'(u_p), \bar{u}_p - u_p)_V \le \\ \le (J'(u') - J'(u_p), \bar{u}_p - u_p)_V + (J'(u_p), \bar{u}' - u_p)_V + \varepsilon_p.$$

Але

$$(J'(u_p), \bar{u}' - u_p)_V = (J'(u_p) - J'(u'), \bar{u}' - u_p)_V + \\ + (J'(u'), \bar{u}' - u')_V + (J'(u'), u' - u_p)_V.$$

Отже,

$$(J'(u'), \bar{u}_p - u_p)_V \le (J'(u_p) - J'(u'), \bar{u}' - \bar{u}_p)_V + \\ + (J'(u'), \bar{u}' - u')_V + (J'(u'), u' - u_p)_V + \varepsilon_p.$$

Урахувавши (5.10), отримаємо оцінку

$$(J'(u'), \bar{u}_p - u_p)_V \le \\ \le -\lambda + \operatorname{diam}(U) \|J'(u_p) - J'(u')\|_V + 2 \|J'(u')\|_V \delta_0 + \varepsilon_p \le \\ \le -\lambda + \varepsilon_p + \operatorname{diam}(U) C 2^\gamma \delta_0^\gamma + 2 \|J'(u')\|_V \delta_0.$$

Обираючи достатньо мале $\delta_0 > 0$ та велике k_0, отримуємо $(p > n_{k_0})$

$$0 < \varepsilon_p + \operatorname{diam}(U) C 2^\gamma \delta_0^\gamma + 2 \|J'(u')\|_V \delta_0 < \frac{\lambda}{2}.$$

Звідки $(J'(u'), \bar{u}_p - u_p)_V \le -\frac{\lambda}{2}$, $p > n_{k_0}$.

Отже, остаточно отримуємо

$$W(u_n) - W(u_{n_k}) \le -\frac{\lambda}{2} \sum_{p=n_k}^{n-1} \rho_p + 2^{2+\gamma} C \delta_0^{1+\gamma}, n > n_k \ge n_{k_0}. \quad (5.12)$$

Здійснивши граничний перехід в нерівності (5.12) при $n \to \infty$ та врахувавши $\sum_{p=n_k}^{\infty} \rho_p = +\infty$, отримаємо протиріччя з обмеженістю знизу на компактній множині U неперервного функціонала W.

Отже, існує $\delta_0 > 0$ таке, що для всіх k і $\delta \in (0, \delta_0]$: $\tau_k = \min\limits_{n>n_k} \{n : \|u_n - u_{n_k}\|_V > \delta\} < +\infty$.

Але, обираючи достатньо мале $\delta_0 > 0$ та велике k_0, можна повторити доведення оцінки (5.12) для $n_k \le n \le \tau_k$. З іншого боку,

$$\delta_0 < \|u_{\tau_k} - u_{n_k}\|_V \le \sum_{p=n_k}^{\tau_k - 1} \|u_{p+1} - u_p\|_V \le \operatorname{diam}(U) \sum_{p=n_k}^{\tau_k - 1} \rho_p.$$

Тому $\sum_{p=n_k}^{\tau_k-1} \rho_p > \frac{\delta_0}{\operatorname{diam}(U)}$. Ураховуючи останню нерівність в (5.12), отримуємо

$$W(u_{\tau_k}) < W(u_{n_k}) - \frac{\lambda \delta_0}{2\operatorname{diam}(U)} + 2^{2+\gamma} C \delta_0^{1+\gamma}.$$

Звідки

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} W(u_{\tau_k}) < \lim_{k\to\infty} W(u_{n_k}).$$

Умови теореми про збіжність виконуються, а отже, граничні точки послідовності (u_n) утворюють компактну зв'язну підмножину U^* і числова послідовність $(J(u_n))$ має границю. □

Зауваження 5.9. Доведемо аналогічний теоремі 5.5 факт для моделі алгоритму із зауваження 5.8. Покажемо лише, що для підпослідовності (u_{n_k}), що збігається до керування $u' \notin U^*$, існує $\delta_0 > 0$ таке, що для всіх k та $\delta \in (0, \delta_0]$

$$\tau_k = \min_{n>n_k} \{n : \|u_n - u_{n_k}\|_V > \delta\} < +\infty.$$

Міркуємо від супротивного. Нехай для всіх $\delta_0 > 0$ існує $k_0 = k_0(\delta_0)$ таке, що $\|u_n - u_{n_{k_0}}\|_V \le \delta_0$ для всіх $n > n_{k_0}$. Тоді $u_n \in B_{2\delta_0}(u')$ для всіх $n > n_{k_0}$.

Оскільки $u' \notin U^*$, то існує число $\lambda > 0$ таке, що

$$\min_{u\in U} (J'(u'), u - u')_V \le -2\lambda < 0.$$

Розглянемо приріст $J(u_{n+1}) - J(u_n)$ для $m > n_k > n_{k_0}$

$$\begin{aligned} J(u_m) - J(u_{n_k}) &= J(u_m) - J(u') - J(u_{n_k}) + J(u') = \\ &= (J'(u' + \theta'(u_m - u')), u_m - u')_V - \\ &\quad - (J'(u' + \theta''(u_{n_k} - u')), u_{n_k} - u')_V = \\ &= (J'(u'), u_m - u')_V + (J'(u' + \theta'(u_m - u')) - J'(u'), u_m - u')_V - \end{aligned}$$

$$-\left(J'(u'), u_{n_k} - u'\right)_V + \left(J'(u') - J'(u' + \theta''(u_{n_k} - u')), u_{n_k} - u'\right)_V \le$$
$$\le \sum_{n=n_k}^{m-1} \rho_n \left(J'(u'), \bar{u}_n - u_n\right)_V + C_0 \delta_0^{1+\gamma},$$

де $\{\theta', \theta''\} \subset [0, 1]$.

Оцінимо зверху $\left(J'(u'), \bar{u}_n - u_n\right)_V$. Позначимо через $\bar{u}' \in U$ розв'язок задачі мінімізації $\left(J'(u'), u - u'\right)_V \to \inf_{u \in U}$. Маємо

$$\left(J'(u'), \bar{u}_n - u_n\right)_V = \left(J'(u') - \widetilde{J'(u_n)}, \bar{u}_n - u_n\right)_V +$$
$$+\left(\widetilde{J'(u_n)}, \bar{u}_n - u_n\right)_V \le \left(J'(u') - \widetilde{J'(u_n)}, \bar{u}_n - u_n\right)_V + \left(\widetilde{J'(u_n)}, \bar{u}' - u_n\right)_V + \varepsilon_n,$$

де $\widetilde{J'(u_n)} = \left(F'(u_n)\right)^* \tilde{p}_n + \Phi_2'(\tilde{y}_n, u_n)$. Але

$$\left(\widetilde{J'(u_n)}, \bar{u}' - u_n\right)_V = \left(\widetilde{J'(u_n)} - J'(u'), \bar{u}' - u_n\right)_V +$$
$$+ \left(J'(u'), \bar{u}' - u'\right)_V + \left(J'(u'), u' - u_n\right)_V \le$$
$$- 2\lambda + \left(\widetilde{J'(u_n)} - J'(u'), \bar{u}' - u_n\right)_V + \left(J'(u'), u' - u_n\right)_V.$$

Звідки

$$\left(J'(u'), \bar{u}_n - u_n\right)_V \le$$
$$\le -2\lambda + \left(\widetilde{J'(u_n)} - J'(u'), \bar{u}' - \bar{u}_n\right)_V + \left(J'(u'), u' - u_n\right)_V + \varepsilon_n.$$

Нарешті отримаємо нерівність

$$\left(J'(u'), \bar{u}_n - u_n\right)_V \le$$
$$\le -2\lambda + \operatorname{diam}(U) \left\|\widetilde{J'(u_n)} - J'(u')\right\|_V + 2\left\|J'(u')\right\|_V \delta_0 + \varepsilon_n.$$

Оцінимо $\left\|\widetilde{J'(u_u)} - J'(u')\right\|_V$. Маємо

$$\left\|\widetilde{J'(u_n)} - J'(u')\right\|_V \le \left\|\widetilde{J'(u_n)} - J'(u_n)\right\|_V + \left\|J'(u_n) - J'(u')\right\|_V \le$$
$$\le \left\|\widetilde{J'(u_n)} - J'(u_n)\right\|_V + C_1 \left\|u_n - u'\right\|_V^{\gamma}.$$

Далі

$$\left\|\widetilde{J'(u_n)} - J'(u_n)\right\|_V \le$$
$$\le \left\|\left(F'(u_n)\right)^* \tilde{p}_n + \Phi_2'(\tilde{y}_n, u_n) - \left(F'(u_n)\right)^* p_n - \Phi_2'(y_n, u_n)\right\|_V \le$$

$$\leq \|F'(u_n)\| \, \|\tilde{p}_n - p_n\|_{W_+} + \|\Phi_2'(\tilde{y}_n, u_n) - \Phi_2'(y_n, u_n)\|_V \leq$$
$$\leq C_1 \|\tilde{p}_n - p_n'\|_{W_+} + C_1 \|p_n' - p_n\|_{W_+} + C_2 \|\tilde{y}_n - y_n\|_H^\gamma \leq$$
$$\leq C_1\delta_n'' + C_2 (\delta_n')^\gamma + C_3 \|\Phi_1'(\tilde{y}_n, u_n) - \Phi_1'(y_n, u_n)\|_{H^-} \leq C_1\delta_n'' + C_4 (\delta_n')^\gamma,$$

де $p_n \in W_+$ — розв'язок спряженої задачі $\mathcal{L}^+ p_n = \Phi_1'(y_n, u_n)$.

Отже,

$$(J'(u'), \bar{u}_n - u_n)_V \leq -2\lambda + \operatorname{diam}(U) \left(C_1\delta_n'' + C_4 (\delta_n')^\gamma\right) + 2 \|J'(u')\|_V \delta_0 + \varepsilon_n.$$

Обираючи достатньо мале $\delta_0 > 0$ та велике k_0, отримуємо $(n > n_{k_0})$

$$0 < \operatorname{diam}(U) \left(C_1\delta_n'' + C_4 (\delta_n')^\gamma\right) + 2 \|J'(u')\|_V \delta_0 + \varepsilon_n < \lambda.$$

Звідки $(J'(u'), \bar{u}_n - u_n)_V \leq -\lambda$, $n > n_{k_0}$.

Остаточно отримуємо

$$J(u_m) - J(u_{n_k}) \leq -\lambda \sum_{n=n_k}^{m-1} \rho_n + C_0\delta_0^{1+\gamma}, \;\; m > n_k \geq n_{k_0}.$$

Після граничного переходу в нерівності при $m \to \infty$ ($\sum_{n=n_k}^{\infty} \rho_n = +\infty$) маємо протиріччя з обмеженістю знизу на множині U функціонала J.

Розглянемо тепер більш реалістичну ситуацію, коли точність ε_n розв'язання допоміжної задачі мінімізації лінійної форми не прямує до нуля.

Теорема 5.6. *Нехай*

$$\rho_n \in (0, 1], \;\; \rho_n \to 0, \;\; \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n = +\infty, \;\; \varepsilon_n \in [0, \bar{\varepsilon}], \;\; \bar{\varepsilon} \geq 0.$$

Якщо функціонал J приймає на множині

$$U_{\bar{\varepsilon}}^* = \{u^* \in U : (J'(u^*), \, u - u^*)_V \geq -\bar{\varepsilon}, \; \forall u \in U\}$$

не більш ніж зліченну кількість значень, то всі граничні точки (які обов'язково існують) послідовності (u_n), що генерується алгоритмом 5.1, утворюють компактну зв'язну підмножину в $U_{\bar{\varepsilon}}^*$, а числова послідовність $(J(u_n))$ має границю.

Доведення. Перевіримо виконання умов теореми про достатні умови збіжності ітераційних алгоритмів оптимізації. Покладемо $W = J$. Функціонал W неперервний на множині U, множина $W^* = \{W(u) : u \in U_{\bar{\varepsilon}}^*\}$ має скрізь щільне доповнення. Члени послідовності (u_n) лежать в компакті U. Розглянемо

підпослідовність (u_{n_k}) таку, що $u_{n_k} \to u^* \in U^*_{\bar{\varepsilon}}$ при $k \to \infty$. Маємо

$$\|u_{n_k+1} - u_{n_k}\|_V = \rho_{n_k} \|\bar{u}_{n_k} - u_{n_k}\|_V \leq \rho_{n_k} \mathrm{diam}\,(U) \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Нехай (u_{n_k}) — підпослідовність, що збігається до керування $u' \notin U^*_{\bar{\varepsilon}}$. Покажемо, що існує таке $\delta_0 > 0$, що для всіх k та $\delta \in (0, \delta_0]$

$$\tau_k = \min_{n > n_k} \{n : \|u_n - u_{n_k}\|_V > \delta\} < +\infty.$$

Від супротивного. Нехай для всіх $\delta_0 > 0$ існує таке $k_0 = k_0(\delta_0)$, що $\left\|u_n - u_{n_{k_0}}\right\|_V \leq \delta_0$ для всіх $n > n_{k_0}$. Тоді з нерівностей

$$\|u_n - u_{n_{k_0}}\|_V \leq \delta_0, \ \|u_{n_k} - u_{n_{k_0}}\|_V \leq \delta_0 \ \forall k > k_0 \ \Rightarrow \ \|u' - u_{n_{k_0}}\|_V \leq \delta_0$$

випливає, що $u_n \in B_{2\delta_0}(u')$ для всіх $n > n_{k_0}$.

Оскільки $u' \notin U^*_{\bar{\varepsilon}}$, то існують $\lambda > 0$ і $\bar{u}' \in U$ такі, що

$$(J'(u'), \bar{u}' - u')_V \leq -\lambda - \bar{\varepsilon}. \tag{5.13}$$

Розглянемо приріст

$$\begin{aligned} W(u_n) - W(u_{n_k}) &= J(u_n) - J(u') - J(u_{n_k}) + J(u') = \\ &= (J'(u' + \theta'(u_n - u')), u_n - u')_V - \\ &- (J'(u' + \theta''(u_{n_k} - u')), u_{n_k} - u')_V = \\ &= (J'(u'), u_n - u')_V + (J'(u' + \theta'(u_n - u')) - J'(u'), u_n - u')_V - \\ &- (J'(u'), u_{n_k} - u')_V + (J'(u') - J'(u' + \theta''(u_{n_k} - u')), u_{n_k} - u')_V \leq \\ &\leq (J'(u'), u_n - u_{n_k})_V + 2^{2+\gamma} C \delta_0^{1+\gamma} = \\ &= \sum_{p=n_k}^{n-1} \rho_p (J'(u'), \bar{u}_p - u_p)_V + 2^{2+\gamma} C \delta_0^{1+\gamma}, \end{aligned} \tag{5.14}$$

де $n > n_k$, $k > k_0$, $\{\theta', \theta''\} \subset [0, 1]$.

У нерівності (5.14) оцінимо зверху величину $(J'(u'), \bar{u}_p - u_p)_V$. Маємо

$$\begin{aligned} &(J'(u'), \bar{u}_p - u_p)_V = \\ &\quad = (J'(u') - J'(u_p), \bar{u}_p - u_p)_V + (J'(u_p), \bar{u}_p - u_p)_V \leq \\ &\quad \leq (J'(u') - J'(u_p), \bar{u}_p - u_p)_V + (J'(u_p), \bar{u}' - u_p)_V + \varepsilon_p. \end{aligned}$$

Але

$$\begin{aligned} (J'(u_p), \bar{u}' - u_p)_V &= (J'(u_p) - J'(u'), \bar{u}' - u_p)_V + \\ &+ (J'(u'), \bar{u}' - u')_V + (J'(u'), u' - u_p)_V. \end{aligned}$$

Отже,

$$(J'(u'), \bar{u}_p - u_p)_V \le (J'(u_p) - J'(u'), \bar{u}' - \bar{u}_p)_V + \\ + (J'(u'), \bar{u}' - u')_V + (J'(u'), u' - u_p)_V + \varepsilon_p.$$

Урахувавши (5.13), отримаємо оцінку

$$(J'(u'), \bar{u}_p - u_p)_V \le \\ \le -\lambda - \bar{\varepsilon} + \operatorname{diam}(U) \|J'(u_p) - J'(u')\|_V + 2\|J'(u')\|_V \delta_0 + \varepsilon_p \le \\ \le -\lambda - \bar{\varepsilon} + \varepsilon_p + \operatorname{diam}(U) C 2^\gamma \delta_0^\gamma + 2\|J'(u')\|_V \delta_0.$$

Обираючи достатньо мале $\delta_0 > 0$ та велике k_0, отримуємо

$$-\bar{\varepsilon} + \varepsilon_p + \operatorname{diam}(U) C 2^\gamma \delta_0^\gamma + 2\|J'(u')\|_V \delta_0 \le \\ \le \operatorname{diam}(U) C 2^\gamma \delta_0^\gamma + 2\|J'(u')\|_V \delta_0 < \frac{\lambda}{2}.$$

Звідки $(J'(u'), \bar{u}_p - u_p)_V \le -\frac{\lambda}{2}$, $p > n_{k_0}$.

Остаточно маємо

$$W(u_n) - W(u_{n_k}) \le -\frac{\lambda}{2} \sum_{p=n_k}^{n-1} \rho_p + 2^{2+\gamma} C \delta_0^{1+\gamma}, \ \ n > n_k \ge n_{k_0}. \qquad (5.15)$$

Здійснивши граничний перехід в (5.15) при $n \to \infty$ та врахувавши $\sum_{p=n_k}^{\infty} \rho_p = +\infty$, отримаємо протиріччя з обмеженістю на компактній множині U неперервного функціонала W.

Отже, існує $\delta_0 > 0$ таке, що для всіх k і $\delta \in (0, \delta_0]$: $\tau_k = \min\limits_{n > n_k} \{n : \|u_n - u_{n_k}\|_V > \delta\} < +\infty$.

Але, обираючи достатньо мале $\delta_0 > 0$ та велике k_0, можна повторити доведення нерівності (5.15) для $n_k \le n \le \tau_k$. З іншого боку,

$$\delta_0 < \|u_{\tau_k} - u_{n_k}\|_V \le \sum_{p=n_k}^{\tau_k - 1} \|u_{p+1} - u_p\|_V \le \operatorname{diam}(U) \sum_{p=n_k}^{\tau_k - 1} \rho_p.$$

Тому $\sum_{p=n_k}^{\tau_k - 1} \rho_p > \frac{\delta_0}{\operatorname{diam}(U)}$. Підставивши останню оцінку в (5.15), одержуємо

$$W(u_{\tau_k}) - W(u_{n_k}) < -\frac{\lambda \delta_0}{2 \operatorname{diam}(U)} + 2^{2+\gamma} C \delta_0^{1+\gamma}.$$

Звідки

$$\limsup_{k \to \infty} W(u_{\tau_k}) < \lim_{k \to \infty} W(u_{n_k}).$$

Таким чином, умови абстрактної теореми про збіжність виконуються. □

Зауваження 5.10. В алгоритмі 5.1 на 3-му кроці можна розглянути таку допоміжну задачу мінімізації

$$(Q_n, u - u_n)_V \to \varepsilon_n - \inf_{u \in U},$$

де $Q_n = (1 - \alpha_n) Q_{n-1} + \alpha_n \{(F'(u_n))^* p_n + \Phi_2'(y_n, u_n)\}$. Якщо коефіцієнти усереднення α_n обирати з дотриманням умов $\alpha_n \in (0, 1)$, $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = +\infty$, $\frac{\rho_n^\gamma}{\alpha_n} \to 0$ при $n \to \infty$, то для цієї модифікації будуть справедливі аналоги теорем 5.5 і 5.6.

5.2.2 Варіант методу проекції градієнта

Розглянемо ітераційний процес розв'язання задачі оптимального керування (5.8), (5.9) з наближеною мінімізацією деякого квадратичного функціоналу на кожному кроці.

Алгоритм 5.2. Метод проекції градієнта.

1. Обираємо початкове наближення $u_0 \in U$. Покладаємо $n = 0$.
2. Знаходимо $y_n \in H$ — узагальнений розв'язок рівняння $\mathcal{L} y_n = F(u_n)$.
3. Знаходимо спряжений стан $p_n \in W_+$ — розв'язок рівняння
$$\mathcal{L}^+ p_n = \Phi_1'(y_n, u_n).$$
4. Знаходимо $\bar{u}_n \in U$ — розв'язок екстремальної задачі
$$\left((F'(u_n))^* p_n + \Phi_2'(y_n, u_n), u - u_n\right)_V + \frac{1}{2\alpha_n} \|u - u_n\|_V^2 \to \varepsilon_n - \inf_{u \in U}.$$
5. Покладаємо $u_{n+1} = u_n + \rho_n (\bar{u}_n - u_n)$, де $\rho_n \in (0, 1]$ — кроковий множник, $n := n + 1$ і переходимо на крок 2.

Зауваження 5.11. Алгоритм 5.2 — один з варіантів відомого методу проекції градієнта. Дійсно, при $\varepsilon_n = 0$ задача кроку 4 рівносильна задачі мінімізації на множині U функціонала

$$\frac{\alpha_n^2}{2} \left\|(F'(u_n))^* p_n + \Phi_2'(y_n, u_n)\right\|_V^2 + \\ + \alpha_n \left((F'(u_n))^* p_n + \Phi_2'(y_n, u_n), u - u_n\right)_V + \frac{1}{2} \|u - u_n\|_V^2 = \\ = \frac{1}{2} \left\|u - \left(u_n - \alpha_n (F'(u_n))^* p_n + \alpha_n \Phi_2'(y_n, u_n)\right)\right\|_V^2,$$

тобто, знаходженню ортогональної проекції вектора $u_n - \alpha_n J'(u_n)$ на множину U.

Теорема 5.7. *Нехай* $\rho_n \in [\underline{\rho}, \bar{\rho}] \subseteq (0,1]$, $\alpha_n \to 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = +\infty$, $\varepsilon_n > 0$, $\frac{\varepsilon_n}{\alpha_n} \to 0$. *Якщо функціонал* J *приймає на множині* $U^* = \{u^* \in U : (J'(u^*), u - u^*)_V \geq 0, \ \forall u \in U\}$ *не більш ніж зліченну кількість значень, то всі граничні точки (які обов'язково існують) послідовності* (u_n) *утворюють компактну зв'язну підмножину в* U^*, *а числова послідовність* $(J(u_n))$ *має границю.*

Доведення. Перевіримо виконання умов теореми про достатні умови збіжності ітераційних алгоритмів оптимізації. За побудовою усі члени послідовності (u_n) належать компакту U. Покладемо $W = J$.

Розглянемо підпослідовність (u_{n_k}) таку, що $u_{n_k} \to u^* \in U^*$ при $k \to \infty$. Оцінимо $\|u_{n_k+1} - u_{n_k}\|_V$. Функціонал

$$u \mapsto R_{n_k}(u) = \left((F'(u_{n_k}))^* p_{n_k} + \Phi_2'(y_{n_k}, u_{n_k}), u - u_{n_k}\right)_V + \frac{1}{2\alpha_{n_k}} \|u - u_{n_k}\|_V^2$$

сильно опуклий ($\frac{1}{2\alpha_{n_k}} > 0$ — стала сильної опуклості). Покладемо

$$\tilde{u}_{n_k} = \arg\min_{u \in U} R_{n_k}(u) = \Pi_U\left(u_{n_k} - \alpha_{n_k} J'(u_{n_k})\right),$$

де $\Pi_U(\cdot)$ — оператор проектування на множину U. Маємо

$$\frac{1}{2\alpha_{n_k}} \|\bar{u}_{n_k} - \tilde{u}_{n_k}\|_V^2 \leq R(\bar{u}_{n_k}) - R(\tilde{u}_{n_k}) \leq \varepsilon_{n_k}.$$

Отже,

$$\begin{aligned}
\|u_{n_k+1} - u_{n_k}\|_V = \rho_{n_k} \|\bar{u}_{n_k} - u_{n_k}\|_V \leq \bar{\rho} \|\bar{u}_{n_k} - u_{n_k}\|_V \leq \\
\leq \|\bar{u}_{n_k} - \tilde{u}_{n_k}\|_V + \|\tilde{u}_{n_k} - u_{n_k}\|_V \leq \\
\leq \sqrt{2\alpha_{n_k}\varepsilon_{n_k}} + \|u_{n_k} - \alpha_{n_k} J'(u_{n_k}) - u_{n_k}\|_V \leq \\
\leq \sqrt{2\alpha_{n_k}\varepsilon_{n_k}} + C_0 \alpha_{n_k} \to 0 \ \text{ при } \ k \to \infty,
\end{aligned}$$

де $C_0 = \sup_{u \in U} \|J'(u)\|_V < +\infty$.

Нехай (u_{n_k}) — підпослідовність, що збігається до керування $u' \notin U^*$. Покажемо, що існує таке $\delta_0 > 0$, що для всіх k і $\delta \in (0, \delta_0]$: $\tau_k = \min\limits_{n > n_k} \{n : \|u_n - u_{n_k}\|_V > \delta\} < +\infty$. Від супротивного. Нехай для всіх $\delta_0 > 0$ існує $k_0 = k_0(\delta_0)$ таке, що $\left\|u_n - u_{n_{k_0}}\right\|_V \leq \delta_0$ для всіх $n > n_{k_0}$. Тоді з нерівностей

$$\|u_n - u_{n_{k_0}}\|_V \leq \delta_0, \ \|u_{n_k} - u_{n_{k_0}}\|_V \leq \delta_0 \ \forall k > k_0 \ \Rightarrow \ \|u' - u_{n_{k_0}}\|_V \leq \delta_0$$

випливає, що $u_n \in B_{2\delta_0}(u')$ для всіх $n > n_{k_0}$.

Використовуючи нерівність $J(v) - J(u) - (J'(u), v-u)_V \le \frac{C_1}{\gamma+1}\|v-u\|_V^{\gamma+1}$, де $C_1 \ge 0$ — константа з умови Гельдера для похідної $J'(\cdot)$, оцінимо приріст $W(u_{n+1}) - W(u_n)$. Маємо

$$\begin{aligned} W(u_{n+1}) - W(u_n) &= J(u_{n+1}) - J(u_n) \le \\ &\le (J'(u_n), u_{n+1} - u_n)_V + \frac{C_1}{\gamma+1}\|u_{n+1} - u_n\|_V^{\gamma+1} = \\ &= \rho_n (J'(u_n), \bar{u}_n - u_n)_V + \frac{C_1}{\gamma+1}\rho_n^{\gamma+1}\|\bar{u}_n - u_n\|_V^{\gamma+1} = \\ &= \rho_n \left\{ (J'(u_n), \bar{u}_n - u_n)_V + \frac{1}{2\alpha_n}\|\bar{u}_n - u_n\|_V^2 \right\} + \\ &+ \frac{C_1}{\gamma+1}\rho_n^{\gamma+1}\|\bar{u}_n - u_n\|_V^{\gamma+1} - \frac{\rho_n}{2\alpha_n}\|\bar{u}_n - u_n\|_V^2 \le \\ &\le \rho_n \left\{ \varepsilon_n + \min_{u\in U} R_n(u) \right\} + \frac{C_1}{\gamma+1}\rho_n^{\gamma+1}\|\bar{u}_n - u_n\|_V^{\gamma+1}. \quad (5.16) \end{aligned}$$

Оскільки $u' \notin U^*$, то існує таке $\lambda > 0$, що

$$\min_{u\in U}(J'(u'), u - u')_V \le -2\lambda < 0.$$

Далі, існує $\delta > 0$ таке, що для довільної точки $u'' \in O_\delta(u')$ виконується нерівність

$$\min_{u\in U}(J'(u''), u - u'')_V \le -\lambda < 0.$$

Візьмемо $2\delta_0 < \delta$, тоді $u_n \in B_{2\delta_0}(u') \subseteq O_\delta(u')$. Позначимо через $\bar{\bar{u}}_n \in U$ розв'язок задачі мінімізації

$$(J'(u_n), u - u_n)_V \to \inf_{u\in U}.$$

Для $\bar{\bar{u}}_n \in U$ виконується нерівність

$$-\|J'(u_n)\|_V \|\bar{\bar{u}}_n - u_n\|_V \le (J'(u_n), \bar{\bar{u}}_n - u_n)_V \le -\lambda < 0,$$

тобто,

$$\frac{1}{\|\bar{\bar{u}}_n - u_n\|_V} \le \frac{\|J'(u_n)\|_V}{\lambda} \le \frac{C_0}{\lambda}.$$

Обираючи достатньо велике k_0, ми можемо досягти для всіх $n > n_{k_0}$ виконання нерівності $\alpha_n \le \frac{\lambda}{C_0^2}$. Розглянемо точку $u_n'' = u_n + \mu_n(\bar{\bar{u}}_n - u_n)$, де $\mu_n = \frac{\lambda\alpha_n}{\|\bar{\bar{u}}_n - u_n\|_V^2} \in (0, 1]$. Очевидно, що $u_n'' \in U$. Підставимо точку $u_n'' \in U$ у

праву частину оцінки (5.16). Отримаємо ланцюжок нерівностей

$$
\begin{aligned}
W(u_{n+1}) - W(u_n) \leq \\
&\leq \rho_n \left\{ \varepsilon_n + (J'(u_n), u_n'' - u_n)_V + \frac{1}{2\alpha_n} \|u_n'' - u_n\|_V^2 \right\} + \\
&\quad + \frac{C_1}{\gamma+1} \rho_n^{\gamma+1} \|\bar{u}_n - u_n\|_V^{\gamma+1} = \\
&= \rho_n \left\{ \varepsilon_n + \mu_n (J'(u_n), \bar{\bar{u}}_n - u_n)_V + \frac{\mu_n^2}{2\alpha_n} \|\bar{\bar{u}}_n - u_n\|_V^2 \right\} + \\
&\quad + \frac{C_1}{\gamma+1} \rho_n^{\gamma+1} \|\bar{u}_n - u_n\|_V^{\gamma+1} \leq \\
&\leq \rho_n \left\{ \varepsilon_n - \mu_n \lambda + \frac{\mu_n^2}{2\alpha_n} \|\bar{\bar{u}}_n - u_n\|_V^2 \right\} + \frac{C_1}{\gamma+1} \left(\alpha_n \sqrt{\frac{2\varepsilon_n}{\alpha_n}} + C_0 \alpha_n \right)^{\gamma+1} = \\
&= \rho_n \left\{ \varepsilon_n - \frac{\lambda^2 \alpha_n}{2 \|\bar{\bar{u}}_n - u_n\|_V^2} \right\} + \frac{C_1}{\gamma+1} \left(\alpha_n \sqrt{\frac{2\varepsilon_n}{\alpha_n}} + C_0 \alpha_n \right)^{\gamma+1} \leq \\
&\leq -\frac{\rho}{2} \left(\frac{\lambda}{\operatorname{diam}(U)} \right)^2 \alpha_n + \varepsilon_n + \frac{C_1}{\gamma+1} \alpha_n^{\gamma+1} \left(\sqrt{\frac{2\varepsilon_n}{\alpha_n}} + C_0 \right)^{\gamma+1}.
\end{aligned}
$$

Оскільки $\alpha_n \to 0$, $\varepsilon_n \to 0$ і $\varepsilon_n \alpha_n^{-1} \to 0$, то, обираючи достатньо мале $\delta_0 > 0$ та велике k_0, отримуємо

$$
W(u_{n+1}) - W(u_n) \leq -\frac{\rho}{4} \left(\frac{\lambda}{\operatorname{diam}(U)} \right)^2 \alpha_n, \quad n > n_{k_0}.
$$

Остаточно маємо

$$
W(u_n) - W(u_{n_k}) \leq -\frac{\rho}{4} \left(\frac{\lambda}{\operatorname{diam}(U)} \right)^2 \sum_{p=n_k}^{n-1} \alpha_p, \quad n > n_k > n_{k_0}. \tag{5.17}
$$

Здійснивши граничний перехід в нерівності (5.17) при $n \to \infty$ і врахувавши $\sum_{p=n_k}^{\infty} \alpha_p = +\infty$, отримаємо протиріччя з обмеженістю на компакті U функціонала W.

Отже, існує $\delta_0 > 0$ таке, що для всіх k і $\delta \in (0, \delta_0]$: $\tau_k = \min\limits_{n > n_k} \{n : \|u_n - u_{n_k}\|_V > \delta\} < +\infty$.

Але обираючи достатньо мале $\delta_0 > 0$ та велике k_0, можна повторити доведення оцінки (5.17) для $n_k \leq n \leq \tau_k$. З іншого боку

$$
\delta_0 < \|u_{\tau_k} - u_{n_k}\|_V \leq \sum_{p=n_k}^{\tau_k - 1} \|u_{p+1} - u_p\|_V \leq \sum_{p=n_k}^{\tau_k - 1} \left(\sqrt{2\alpha_p \varepsilon_p} + C_0 \alpha_p \right) \leq C_2 \sum_{p=n_k}^{\tau_k - 1} \alpha_p.
$$

Тому $\sum_{p=n_k}^{\tau_k-1} \alpha_p > \frac{\delta_0}{C_2} > 0$. Враховуючи останню нерівність в (5.17), отримуємо

$$W(u_{\tau_k}) - W(u_{n_k}) < -\frac{\rho}{4C_2}\left(\frac{\lambda}{\operatorname{diam}(U)}\right)^2 \delta_0.$$

Звідки $\limsup_{k\to\infty} W(u_{\tau_k}) < \lim\limits_{k\to\infty} W(u_{n_k})$. Отже, умови теореми про збіжність виконуються. Тому граничні точки послідовності (u_n) утворюють компактну зв'язну підмножину U^* і числова послідовність $(J(u_n))$ має границю. □

5.2.3 Метод лінеаризації з довірчою областю

Розглянемо задачу оптимального керування

$$J(u) = \Phi(y(u), u) \to \inf_{u\in U}, \tag{5.18}$$

$$\mathcal{L}y(u) = F(u), \quad u \in U, \tag{5.19}$$

де $F : V \to W_+^-$, U — компактна та опукла множина допустимих керувань із гільбертового простору керувань V. Це типова ситуація в імпульсно-точковому керуванні розподіленими системами [130, 139].

Нехай є дві числові послідовності (α_n) і (β_n) такі, що $0 < \alpha_n \le \beta_n$, $n \in \mathbb{N}$. Задамо послідовність замкнених опуклих множин $M_n \subseteq V$ простої структури таку, що

$$\{v \in V : \|v\|_V \le \alpha_n\} \subseteq M_n \subseteq \{v \in V : \|v\|_V \le \beta_n\}.$$

У якості M_n природно обирати опуклі багатогранники.

Опишемо метод розв'язання задачі (5.18), (5.19).

Алгоритм 5.3. Метод лінеаризації з довірчою областю.

1. Обираємо початкове наближення $u_0 \in U$. Покладаємо $n = 0$.

2. Знаходимо $y_n \in H$ — узагальнений розв'язок рівняння $\mathcal{L}y_n = F(u_n)$.

3. Знаходимо спряжений стан $p_n \in W_+$ — розв'язок рівняння

$$\mathcal{L}^+ p_n = \Phi_1'(y_n, u_n).$$

4. Знаходимо $\bar{u}_n \in U$ — розв'язок екстремальної задачі

$$\left((F'(u_n))^* p_n + \Phi_2'(y_n, u_n), u - u_n\right)_V \to \varepsilon_n - \inf_{u\in U\bigcap(u_n+M_n)}. \tag{5.20}$$

5. Покладаємо $u_{n+1} = \bar{u}_n$, $n := n+1$ і переходимо на крок 2.

Зауваження 5.12. Алгоритм 5.3 належить до родини так званих методів з довірчою областю (Trust-Region Method) [156–160]. Зрозуміло, що в розглянутих алгоритмах допоміжна задача, яка розв'язується на кожній ітерації, є локальною апроксимацією вихідної задачі чи умов оптимальності вихідної задачі. Ця апроксимація достовірна лише в досить малому околі поточного наближення. Тому природньо розв'язувати допоміжну задачу не на всій множині U, а саме на такому околі (який називають «довірчою областю»). Крім того, інтуїтивно ясно, що задача (5.20) є кращою апроксимацією вихідної задачі, ніж задача мінімізації вздовж довільного фіксованого напряму. Отже, на думку багатьох дослідників, можна очікувати, що незважаючи на високу ціну розв'язку допоміжної задачі (5.20), розв'язок цієї задачі забезпечить більший прогрес в мінімізації функціонала J, ніж одновимірний пошук, і алгоритм 5.3 може виявитись більш ефективним.

Для послідовності, що генерується описаним методом, має місце наступний результат про збіжність до множини стаціонарних керувань

$$U^* = \{u^* \in U : \ (J'(u^*)\ , u - u^*)_V \geq 0\,,\ \forall u \in U\}.$$

Теорема 5.8. *Нехай:*

$$\varepsilon_n > 0,\ k \cdot \alpha_n \geq \beta_n \geq \alpha_n > 0,\ \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = +\infty,\ \frac{\beta_n^{1+\gamma}}{\alpha_n} \to 0,\ \frac{\varepsilon_n}{\alpha_n} \to 0;$$

множина $J(U^*)$ *ніде не щільна. Тоді всі граничні точки послідовності* (u_n) *утворюють компактну зв'язну підмножину в* U^**, а числова послідовність* $(J(u_n))$ *має границю.*

Доведення. Знову використаємо загальну теорему про збіжність алгоритмів. За побудовою всі члени послідовності (u_n) належать компакту U. Далі

$$\|u_{n+1} - u_n\|_V = \|\bar{u}_n - u_n\|_V \leq \beta_n \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Нехай (u_{n_k}) — підпослідовність, що збігається до керування $u' \notin U^*$. Покажемо, що існує таке $\delta_0 > 0$, що для всіх k та $\delta \in (0, \delta_0]$ $\tau_k = \min\limits_{n > n_k} \{n : \|u_n - u_{n_k}\|_V > \delta\} < +\infty$. Від супротивного. Нехай для всіх $\delta_0 > 0$ існує $k_0 = k_0(\delta_0)$ таке, що $\|u_n - u_{n_{k_0}}\|_V \leq \delta_0$ для всіх $n > n_{k_0}$. Тоді з нерівностей

$$\|u_n - u_{n_{k_0}}\|_V \leq \delta_0,\ \|u_{n_k} - u_{n_{k_0}}\|_V \leq \delta_0\ \forall k > k_0 \ \Rightarrow\ \|u' - u_{n_{k_0}}\|_V \leq \delta_0$$

випливає, що $u_n \in B_{2\delta_0}(u')$ для всіх $n > n_{k_0}$.

Оцінимо приріст $J(u_{n+1}) - J(u_n)$. Маємо

$$J(u_{n+1}) - J(u_n) \le (J'(u_n), u_{n+1} - u_n)_V + \frac{C_1}{\gamma+1}\|u_{n+1} - u_n\|_V^{\gamma+1} \le$$
$$\le \min_{u \in U \bigcap (u_n + M_n)} (J'(u_n), u - u_n)_V + \varepsilon_n + \frac{C_1}{\gamma+1}\beta_n^{\gamma+1}. \quad (5.21)$$

Оскільки $u' \notin U^*$, то існує число $\lambda > 0$ таке, що

$$\min_{u \in U} (J'(u'), u - u')_V \le -2\lambda < 0.$$

Із неперервності функціонала $\xi \mapsto \min_{u \in U} (J'(\xi), u - \xi)_V$ випливає існування $\delta > 0$ такого, що для довільної точки $u'' \in O_\delta(u') \bigcap U$ виконується нерівність

$$\min_{u \in U} (J'(u''), u - u'')_V \le -\lambda < 0.$$

Візьмемо $2\delta_0 < \delta$, тоді $u_n \in B_{2\delta_0}(u') \subseteq O_\delta(u')$. Позначимо через $\bar{\bar{u}}_n \in U$ розв'язок задачі мінімізації $(J'(u_n), u - u_n)_V \to \inf_{u \in U}$.

Нехай $\bar{\bar{u}}_n \in u_n + M_n$. Тоді з (5.21) випливає нерівність

$$J(u_{n+1}) - J(u_n) \le -\lambda + \varepsilon_n + \frac{C_1}{\gamma+1}\beta_n^{\gamma+1}.$$

Існує $n' > n_{k_0}$ таке, що для всіх $n \ge n'$: $J(u_{n+1}) - J(u_n) \le -\frac{\lambda}{2}$.

Якщо $\bar{\bar{u}}_n \notin u_n + M_n$, то

$$J(u_{n+1}) - J(u_n) \le (J'(u_n), \phi_n - u_n)_V + \varepsilon_n + \frac{C_1}{\gamma+1}\beta_n^{\gamma+1} \le$$
$$\le \eta_n (J'(u_n), \bar{\bar{u}}_n - u_n)_V + \varepsilon_n + \frac{C_1}{\gamma+1}\beta_n^{\gamma+1},$$

де $\eta_n = \max\{\eta > 0 : \eta(\bar{\bar{u}}_n - u_n) \in M_n\}$, $\phi_n = u_n + \eta_n(\bar{\bar{u}}_n - u_n)$. У цьому випадку приріст оцінюється $J(u_{n+1}) - J(u_n) \le -\eta_n\lambda + \varepsilon_n + \frac{C_1}{\gamma+1}\beta_n^{\gamma+1}$. Оскільки $1 > \mu_n \ge \frac{\alpha_n}{\|\bar{\bar{u}}_n - u_n\|_V}$, то

$$J(u_{n+1}) - J(u_n) \le -\frac{\lambda\alpha_n}{\|\bar{\bar{u}}_n - u_n\|_V} + \varepsilon_n + \frac{C_1}{\gamma+1}\beta_n^{\gamma+1} \le$$
$$\le -\frac{\lambda}{\operatorname{diam}(U)}\alpha_n + \varepsilon_n + \frac{C_1}{\gamma+1}\beta_n^{\gamma+1} =$$
$$= -\frac{\lambda}{\operatorname{diam}(U)}\alpha_n \left(1 - \frac{\operatorname{diam}(U)}{\lambda}\left(\frac{\varepsilon_n}{\alpha_n} + \frac{C_1}{\gamma+1}\frac{\beta_n^{\gamma+1}}{\alpha_n}\right)\right).$$

Звідки випливає існування $n'' > n_{k_0}$ такого, що для всіх $n \geq n''$

$$J(u_{n+1}) - J(u_n) \leq -\frac{\lambda}{2 \cdot \operatorname{diam}(U)} \alpha_n \leq -\frac{\lambda}{2 \cdot k \cdot \operatorname{diam}(U)} \beta_n.$$

Існує $n''' \in \mathbb{N}$ таке, що $\beta_n < \lambda/2$ для всіх $n \geq n'''$. Отже,

$$J(u_{n+1}) - J(u_n) \leq -\min\left\{1, \frac{\lambda}{2 \cdot k \cdot \operatorname{diam}(U)}\right\} \beta_n,$$

для $n > \tilde{n} = \max\{n', n'', n'''\} > n_{k_0}$.

Остаточно отримуємо

$$J(u_n) - J(u_{n_k}) \leq -\min\left\{1, \frac{\lambda}{2 \cdot k \cdot \operatorname{diam}(U)}\right\} \sum_{p=n_k}^{n-1} \beta_p, \;\; n > n_k > \tilde{n}. \quad (5.22)$$

Здійснивши граничний перехід в нерівності (5.22) при $n \to \infty$ та врахувавши $\sum_{p=1}^{\infty} \beta_p = +\infty$, отримаємо протиріччя з обмеженістю на компактній множині U неперервного функціонала J.

Отже, існує $\delta_0 > 0$ таке, що для всіх k і $\delta \in (0, \delta_0]$: $\tau_k = \min\limits_{n > n_k} \{n : \|u_n - u_{n_k}\|_V > \delta\} < +\infty$.

Але, обираючи достатньо мале $\delta_0 > 0$ та велике k_0, можна повторити доведення нерівності (5.22) для $n_k \leq n \leq \tau_k$. З іншого боку,

$$\delta_0 < \|u_{\tau_k} - u_{n_k}\|_V \leq \sum_{p=n_k}^{\tau_k - 1} \|u_{p+1} - u_p\|_V \leq \sum_{p=n_k}^{\tau_k - 1} \beta_p.$$

Ураховуючи останню нерівність в (5.22), отримуємо

$$J(u_{\tau_k}) < J(u_{n_k}) - \min\left\{1, \frac{\lambda}{2 \cdot k \cdot \operatorname{diam}(U)}\right\} \delta_0.$$

Звідки маємо $\limsup_{k \to \infty} J(u_{\tau_k}) < \lim\limits_{k \to \infty} J(u_{n_k})$.

Покладемо $W = J$. Умови теореми про збіжність ітераційних алгоритмів виконуються, а отже, послідовність (u_n) має сформульовані властивості. □

Перейдемо до дослідження поведінки алгоритму 5.3 без припущення, що точність ε_n розв'язання допоміжної задачі прямує до нуля.

Припустимо, що

$$\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n, ...\} \subseteq [0, \bar{\varepsilon}], \;\; \bar{\varepsilon} > 0, \quad (5.23)$$

$$\beta_n \geq \alpha_n \geq \underline{\alpha} > 0 \;\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad (5.24)$$

$$\bar{\beta} = \limsup_{n\to\infty} \beta_n \in \mathbb{R}. \tag{5.25}$$

Розглянемо множину

$$U^*_{\bar{\varepsilon},\underline{\alpha},\bar{\beta}} = \left\{ u^* \in U : (J'(u^*),\, u-u^*)_V \geq -\operatorname{diam}(U)\left(\tfrac{\bar{\varepsilon}+C_0\bar{\beta}^{1+\gamma}}{\underline{\alpha}}\right),\ \forall u \in U \right\},$$

де $C_0 > 0$ — константа з умови Гельдера на U для похідної $J'(\cdot)$.

Розглянемо породжену алгоритмом 5.3 послідовність (u_n). Нехай (u_{n_k}) — збіжна до керування $u' \notin U^*_{\bar{\varepsilon},\underline{\alpha},\bar{\beta}}$ підпослідовність. Покажемо, що існує $\delta_0 > 0$ таке, що для всіх k та $\delta \in (0, \delta_0]$ $\tau_k = \min\limits_{n>n_k}\{n : \|u_n - u_{n_k}\|_V > \delta\} < +\infty$. Від супротивного. Нехай для всіх $\delta_0 > 0$ існує $k_0 = k_0(\delta_0)$ таке, що $\|u_n - u_{n_{k_0}}\|_V \leq \delta_0$ для всіх $n > n_{k_0}$. Тоді з нерівності трикутника випливає, що $u_n \in B_{2\delta_0}(u')$ для всіх $n > n_{k_0}$.

Оскільки $u' \notin U^*_{\bar{\varepsilon},\underline{\alpha},\bar{\beta}}$, то існує число $\lambda > 0$ таке, що

$$\min_{u\in U}(J'(u'), u-u')_V \leq -\operatorname{diam}(U)\left(\frac{\bar{\varepsilon}+C_0\bar{\beta}^{1+\gamma}+2\lambda}{\underline{\alpha}}\right).$$

Із неперервності функціонала $\xi \mapsto \min_{u\in U}(J'(\xi), u-\xi)_V$ випливає існування $\delta > 0$ і $\mu > 0$ таких, що для довільної точки $u'' \in O_\delta(u') \bigcap U$ виконується нерівність

$$\min_{u\in U}(J'(u''), u-u'')_V \leq -\operatorname{diam}(U)\left(\frac{\bar{\varepsilon}+C_0\left(\bar{\beta}+\mu\right)^{1+\gamma}+\lambda}{\underline{\alpha}}\right).$$

Візьмемо $2\delta_0 < \delta$, тоді $u_n \in B_{2\delta_0}(u') \subseteq O_\delta(u')$. Маємо

$$J(u_{n+1}) - J(u_n) \leq (J'(u_n), u_{n+1}-u_n)_V + \frac{C_0}{\gamma+1}\|u_{n+1}-u_n\|_V^{\gamma+1} \leq$$
$$\leq \min_{u\in U\bigcap(u_n+M_n)}(J'(u_n), u-u_n)_V + \varepsilon_n + \frac{C_0}{\gamma+1}\beta_n^{\gamma+1}.$$

Має місце нерівність

$$\min_{u\in U\bigcap(u_n+M_n)}(J'(u_n), u-u_n)_V \leq \min_{u\in U\bigcap B_{\alpha_n}(u_n)}(J'(u_n), u-u_n)_V \leq$$
$$\leq \min_{u\in U\bigcap B_{\underline{\alpha}}(u_n)}(J'(u_n), u-u_n)_V \leq \frac{\underline{\alpha}}{\operatorname{diam}(U)}\min_{u\in U}(J'(u_n), u-u_n)_V.$$

Отже, для $n > n_{k_0}$ справджується оцінка

$$J(u_{n+1}) - J(u_n) \leq \frac{\underline{\alpha}}{\operatorname{diam}(U)}\min_{u\in U}(J'(u_n), u-u_n)_V + \varepsilon_n + \frac{C_0}{\gamma+1}\beta_n^{\gamma+1} \leq$$

$$\leq -\bar{\varepsilon} - C_0\left(\bar{\beta}+\mu\right)^{1+\gamma} - \lambda + \varepsilon_n + \frac{C_0}{\gamma+1}\beta_n^{\gamma+1} \leq$$
$$\leq -\lambda - C_0\left(\left(\bar{\beta}+\mu\right)^{1+\gamma} - \beta_n^{\gamma+1}\right) - C_0\frac{\gamma}{\gamma+1}\beta_n^{\gamma+1}.$$

Починаючи з деякого $n' > n_{k_0}$ (не зменшуючи загальності, можна вважати, що $n' = n_{k_0}$) виконується нерівність $\beta_n < \bar{\beta} + \mu$. Тому

$$J(u_{n+1}) - J(u_n) < -\lambda - C_0\frac{\gamma}{\gamma+1}\beta_n^{\gamma+1} < -C_0\frac{\gamma}{\gamma+1}\beta_n^{\gamma+1} \leq -C_0\frac{\gamma}{\gamma+1}\underline{\alpha}^{\gamma+1}.$$

Остаточно маємо

$$J(u_n) - J(u_{n_k}) < -C_0\frac{\gamma}{\gamma+1}(n-1-n_k)\,\underline{\alpha}^{\gamma+1}, n > n_k > n_{k_0}. \tag{5.26}$$

Здійснивши граничний перехід в нерівності (5.26) при $n \to \infty$, отримаємо протиріччя з обмеженістю на множині U функціонала J. Отже, існує $\delta_0 > 0$ таке, що для всіх k і $\delta \in (0, \delta_0]$: $\tau_k = \min\limits_{n>n_k}\{n : \|u_n - u_{n_k}\|_V > \delta\} < +\infty$.

Але, обираючи достатньо мале $\delta_0 > 0$ та велике k_0, можна повторити доведення нерівності (5.2.19) для $n_k \leq n \leq \tau_k$. З іншого боку,

$$\delta_0 < \|u_{\tau_k} - u_{n_k}\|_V \leq \sum_{p=n_k}^{\tau_k-1}\|u_{p+1} - u_p\|_V \leq \sum_{p=n_k}^{\tau_k-1}\beta_p \leq (\tau_k - 1 - n_k)\sup_p \beta_p.$$

Ураховуючи останню нерівність в (5.26), отримуємо

$$J(u_{\tau_k}) - J(u_{n_k}) < -\delta_0\left(\frac{\gamma}{\gamma+1}\right)\frac{\underline{\alpha}^{\gamma+1}C_0}{\sup_p \beta_p}.$$

Звідки маємо

$$\limsup_{k\to\infty} J(u_{\tau_k}) < \lim_{k\to\infty} J(u_{n_k}). \tag{5.27}$$

Розглянемо тепер підпослідовність (u_{n_k}) таку, що

$$\lim_{k\to\infty} J(u_{n_k}) = \liminf_{n\to\infty} J(u_n). \tag{5.28}$$

Якщо припустити існування у обраної підпослідовності граничної точки u', що не належить множині $U^*_{\bar{\varepsilon},\underline{\alpha},\bar{\beta}}$, то, застосовуючи до $(u_{n_{k_l}})$ $(u_{n_{k_l}} \to u')$ нерівність (5.27), приходимо до протиріччя з (5.28).

Із наведених міркувань випливає

Теорема 5.9. *Нехай виконуються умови (5.23), (5.24) і (5.25). Тоді згенерована алгоритмом 5.3 послідовність* (u_n) *має граничні точки, що належать множині* $U^*_{\bar{\varepsilon},\underline{\alpha},\bar{\beta}}$.

5.2.4 Варіант методу Ньютона

Розглянемо у цьому пункті ще один варіант методу з довірчою областю. Припустимо, що в задачі оптимального керування

$$J(u) = \Phi(y(u), u) \to \inf_{u \in U}, \tag{5.29}$$

$$\mathcal{L}y(u) = F(u), \ \ u \in U \tag{5.30}$$

U — компактна та опукла множина допустимих керувань із гільбертового простору керувань V, а функціонал $J(\cdot)$ має на множині другу похідну Фреше, яка задовольняє умову Гельдера з показником $\gamma \in (0, 1]$.

Зафіксуємо послідовність (α_n) додатних чисел і покладемо

$$M_n = B_{\alpha_n}(V) = \{v \in V : \ \|v\|_V \le \alpha_n\}.$$

Алгоритм 5.4. Метод Ньютона.

1. Обираємо початкове наближення $u_0 \in U$. Покладаємо $n = 0$.

2. Знаходимо $y_n \in H$ — узагальнений розв'язок рівняння $\mathcal{L}y_n = F(u_n)$.

3. Знаходимо спряжений стан $p_n \in W_+$ — розв'язок рівняння

$$\mathcal{L}^+ p_n = \Phi_1'(y_n, u_n).$$

4. Знаходимо $\bar{u}_n \in U$ — розв'язок задачі

$$\begin{gathered}\left((F'(u_n))^* p_n + \Phi_2'(y_n, u_n), u - u_n\right)_V + \\ + \tfrac{1}{2}\langle F''(u_n)(u - u_n, u - u_n), p_n\rangle_+ + \\ + \tfrac{1}{2}\Phi_{11}''(y_n, u_n)(z_{n,u}, z_{n,u}) + \Phi_{12}''(y_n, u_n)(z_{n,u}, u - u_n) + \\ + \tfrac{1}{2}\Phi_{22}''(y_n, u_n)(u - u_n, u - u_n) \to \varepsilon_n - \inf_{u \in U \bigcap (u_n + M_n)}, \\ \mathcal{L}z_{n,u} = F'(u_n)u - F'(u_n)u_n.\end{gathered}$$

5. Покладаємо $u_{n+1} = \bar{u}_n$, $n := n + 1$ і переходимо на крок 2.

Зауваження 5.13. Введемо множину U^{**} допустимих керувань, що задовольняють необхідні умови мінімуму другого порядку функціонала $J(\cdot)$ на множині U:

$$\begin{aligned}U^{**} = \{u^* \in U : \ &\min_{v \in U}(J'(u^*), v - u^*)_V = 0, \\ &J''(u^*)(u - u^*, u - u^*) \ge 0 \quad \forall\, u \in U : (J'(u^*), u - u^*)_V = 0\}.\end{aligned}$$

Якщо $\varepsilon_n = 0$, то у випадку $\bar{u}_n = u_n$ у точці $u_n \in U$ виконуються необхідні умови мінімуму другого порядку.

Теорема 5.10. *Нехай:* $\alpha_n \to 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = +\infty$, $\frac{\varepsilon_n}{\alpha_n} \to 0$; *функціонал* J *приймає на множині* $U^* = \{u^* \in U : (J'(u^*), u - u^*)_V \geq 0 \ \forall u \in U\}$ *не більш ніж зліченну кількість значень. Тоді всі граничні точки послідовності* (u_n) *утворюють компактну зв'язну підмножину в* U^*, *а числова послідовність* $(J(u_n))$ *має границю.*

Доведення. За побудовою всі члени послідовності (u_n) належать компакту U. Далі, $\|u_{n+1} - u_n\|_V = \|\bar{u}_n - u_n\|_V \leq \alpha_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Нехай (u_{n_k}) — підпослідовність, що збігається до керування $u' \notin U^{**}$. Покажемо, що існує таке $\delta_0 > 0$, що для всіх k і $\delta \in (0, \delta_0]$: $\tau_k = \min\limits_{n > n_k} \{n : \|u_n - u_{n_k}\|_V > \delta\} < +\infty$. Від супротивного. Нехай для всіх $\delta_0 > 0$ існує $k_0 = k_0(\delta_0)$ таке, що $\|u_n - u_{n_{k_0}}\|_V \leq \delta_0$ для всіх $n > n_{k_0}$. З нерівності трикутника випливає, що $u_n \in B_{2\delta_0}(u')$ для всіх $n > n_{k_0}$.

Оцінимо приріст $J(u_{n+1}) - J(u_n)$. Маємо

$$\begin{aligned} J(u_{n+1}) - J(u_n) &= (J'(u_n), u_{n+1} - u_n)_V + \\ &\quad + \tfrac{1}{2} J''(u_n + \theta_n(u_{n+1} - u_n))(u_{n+1} - u_n, u_{n+1} - u_n) \leq \\ &\leq (J'(u_n), u_{n+1} - u_n)_V + \tfrac{1}{2} J''(u_n)(u_{n+1} - u_n, u_{n+1} - u_n) + C_0 \alpha_n^{2+\gamma} \leq \\ &\leq \min_{u \in U \bigcap (u_n + M_n)} \left\{ (J'(u_n), u - u_n)_V + \tfrac{1}{2} J''(u_n)(u - u_n, u - u_n) \right\} + \\ &\quad + \varepsilon_n + C_0 \alpha_n^{2+\gamma}, \quad (5.31) \end{aligned}$$

де $\theta_n \in [0, 1]$.

Оскільки $u' \notin U^*$, то існує $\lambda > 0$ таке, що

$$\min_{u \in U} (J'(u'), u - u')_V \leq -2\lambda < 0. \quad (5.32)$$

Урахуємо в (5.31) нерівність

$$\begin{aligned} &\min_{u \in U \bigcap (u_n + M_n)} \left\{ (J'(u_n), u - u_n)_V + \tfrac{1}{2} J''(u_n)(u - u_n, u - u_n) \right\} \leq \\ &\qquad \leq \min_{u \in U \bigcap (u_n + M_n)} (J'(u_n), u - u_n)_V + C_1 \alpha_n^2. \end{aligned}$$

Маємо

$$J(u_{n+1}) - J(u_n) \leq \min_{u \in U \bigcap (u_n + M_n)} (J'(u_n), u - u_n)_V + \varepsilon_n + C_1 \alpha_n^2 + C_0 \alpha_n^{2+\gamma}.$$

Із неперервності функціонала $\xi \mapsto \min_{u \in U} (J'(\xi), u - \xi)_V$ випливає існування числа $\delta > 0$ такого, що для довільної точки $u'' \in O_\delta(u') \cap U$ виконується

оцінка

$$\min_{u\in U}\left(J'(u''),u-u''\right)_V\le-\lambda<0.$$

Візьмемо $2\delta_0<\delta$, тоді $u_n\in B_{2\delta_0}(u')\subseteq O_\delta(u')$. Позначимо через $\bar{\bar{u}}_n\in U$ розв'язок задачі мінімізації $\left(J'(u_n),u-u_n\right)_V\to\inf_{u\in U}$.

Нехай $\bar{\bar{u}}_n\in u_n+M_n$. Тоді $J(u_{n+1})-J(u_n)\le-\lambda+\varepsilon_n+C_1\alpha_n^2+C_0\alpha_n^{2+\gamma}$. Існує $n'>n_{k_0}$ таке, що для всіх $n\ge n'$: $J(u_{n+1})-J(u_n)\le-\frac{\lambda}{2}$.

Якщо $\bar{\bar{u}}_n\notin u_n+M_n$, то

$$\begin{aligned}J(u_{n+1})-J(u_n)&\le-\frac{\alpha_n}{\|\bar{\bar{u}}_n-u_n\|_V}\lambda+\varepsilon_n+C_1\alpha_n^2+C_0\alpha_n^{2+\gamma}\le\\&\le-\frac{\lambda}{\operatorname{diam}(U)}\alpha_n+\varepsilon_n+C_1\alpha_n^2+C_0\alpha_n^{2+\gamma}=\\&=-\frac{\lambda}{\operatorname{diam}(U)}\alpha_n+\alpha_n\left\{\frac{\varepsilon_n}{\alpha_n}+C_1\alpha_n+C_0\alpha_n^{1+\gamma}\right\}.\end{aligned}$$

Звідки випливає існування $n''>n_{k_0}$ такого, що для всіх $n\ge n''$

$$J(u_{n+1})-J(u_n)\le-\frac{\lambda}{2\cdot\operatorname{diam}(U)}\alpha_n.$$

Існує $n'''\in\mathbb{N}$ таке, що $\alpha_n<\lambda/2$ для всіх $n\ge n'''$. Отже,

$$J(u_{n+1})-J(u_n)\le-\min\left\{1,\frac{\lambda}{2\cdot\operatorname{diam}(U)}\right\}\alpha_n,$$

для $n>\tilde{n}=\max\{n',n'',n'''\}>n_{k_0}$.

Остаточно отримуємо

$$J(u_n)-J(u_{n_k})\le-\min\left\{1,\frac{\lambda}{2\cdot\operatorname{diam}(U)}\right\}\sum_{p=n_k}^{n-1}\alpha_p,\ \ n>n_k>\tilde{n}.\qquad(5.33)$$

Здійснивши граничний перехід в нерівності (5.33) при $n\to\infty$ та врахувавши $\sum_{p=1}^{\infty}\alpha_p=+\infty$, отримаємо протиріччя з обмеженістю на компактній множині U неперервного функціонала J.

Отже, якщо виконується (5.32), то існує $\delta_0>0$ таке, що для всіх k та $\delta\in(0,\delta_0]$: $\tau_k=\min\limits_{n>n_k}\{n:\|u_n-u_{n_k}\|_V>\delta\}<+\infty$. Але, обираючи достатньо мале $\delta_0>0$ та велике k_0, можна повторити доведення нерівності (5.33) для $n_k\le n\le\tau_k$. З іншого боку,

$$\delta_0<\|u_{\tau_k}-u_{n_k}\|_V\le\sum_{p=n_k}^{\tau_k-1}\|u_{p+1}-u_p\|_V\le\sum_{p=n_k}^{\tau_k-1}\alpha_p.$$

Ураховуючи останню нерівність в (5.33), отримуємо

$$J(u_{\tau_k}) < J(u_{n_k}) - \min\left\{1, \frac{\lambda}{2 \cdot \operatorname{diam}(U)}\right\} \delta_0.$$

Звідки маємо $\limsup_{k\to\infty} J(u_{\tau_k}) < \lim\limits_{k\to\infty} J(u_{n_k})$.

Покладемо $W = J$. Умови теореми про збіжність ітераційних алгоритмів виконуються, а отже, послідовність (u_n) має сформульовані властивості. □

Зауваження 5.14. Виникає цікаве питання про збіжність алгоритму 5.4 до множини $U^{**} \subseteq U^*$.

Зауваження 5.15. Серед проаналізованих ітераційних методів алгоритм 5.4 має найбільшу обчислювальну складність. На кожній ітерації методу необхідно наближено розв'язувати лінійно-квадратичну задачу оптимального керування системою з розподіленими параметрами.

5.3 Моделі алгоритмів узагальненої оптимізації лінійних систем з передопуклими допустимими множинами

Ряд задач імпульсно-точкового керування системами з розподіленими параметрами та задач розміщення джерел фізичних полів породжують екстремальні задачі з так званими передопуклими обмеженнями.

Нехай E — лінійний простір. Нагадаємо, що множину $M \subseteq E$ називаємо передопуклою, якщо існують такі опуклі множини C_0, C_1,..., C_m, що

$$M = C_0 \setminus \bigcup_{k=1}^{m} C_k.$$

Зауваження 5.16. Нагадаємо, що передопуклі множини, які можна представити у вигляді теоретико-множинної різниці двох опуклих множин, було введено у роботі [161] та використано у [162] для узагальнення методу проекції градієнта. У статті [141] введено більш широкий клас неопуклих множин, за якими збережено назву передопуклих, і розглянуто модифікацію методу умовного градієнта мінімізації гладких функцій на цих множинах.

Розглянемо задачу оптимального керування

$$J(u) = \Phi(y(u), u) \to \inf_{u\in U}, \tag{5.34}$$

$$\mathcal{L}y(u) = F(u), \ \ u \in U, \tag{5.35}$$

де U — компактна множина допустимих керувань із скінченновимірного гільбертового простору керувань V. Припустимо, що множина U має наступну структуру

$$U = G_0 \setminus \bigcup_{k=1}^{m} \operatorname{int} G_k, \tag{5.36}$$

де G_0 — опуклий компакт, G_1, G_2, ..., G_m — замкнені опуклі множини, причому fr G_1, fr G_2, ...,fr G_m — регулярні многовиди. Отже, U — передопукла множина. Нехай $\operatorname{int} U \neq \emptyset$.

Відмітимо, що множини вигляду (5.36) природньо виникають в задачах точкового керування з «забороненими» зонами.

Введемо позначення ($k = 1, 2, ..., m$):

- $\Pi_k(u)$ — проекція точки $u \in U \setminus G_k$ на множину G_k;
- $n_k(u)$ — вектор зовнішньої нормалі до G_k у точці $\Pi_k(u)$;
- $S_k(u) = \{v \in V : (n_k(u), v - \Pi_k(u))_V \geq 0\}$ — дотичний півпростір до множини G_k у $\Pi_k(u)$;
- $P(u) = \bigcap_{k=1}^{m} P_k(u)$, де $P_k(u) = G_0 \bigcap S_k(u)$.

Відмітимо, що $P(u)$ — непорожній опуклий компакт і $u \in P(u)$.

Будемо вважати, що про гладкість елементів екстремальної задачі (5.34), (5.35) виконані стандартні припущення цього розділу.

Для подальшого аналізу нам потрібна наступна необхідна умова мінімуму.

Лема 5.1. *Нехай $\bar{u} \in U$ — локально оптимальний розв'язок задачі* (5.34), (5.35). *Тоді*

$$\min_{u \in P(\bar{u})} \left\langle (F'(\bar{u}))^* \bar{p} + \Phi_2'(y(\bar{u}), \bar{u}), u - \bar{u} \right\rangle_{V^*, V} = 0, \tag{5.37}$$

де $\bar{p} = p(\bar{u}) \in W_+$ — розв'язок рівняння $\mathcal{L}^+ p = \Phi_1'(y(\bar{u}), \bar{u})$.

Доведення. Оскільки $\bar{u} \in P(\bar{u}) \subseteq U$, то керування $\bar{u}$ локально оптимальне на опуклій множині $P(\bar{u})$, а (5.37) — класична необхідна умова локальної оптимальності для задачі

$$J(u) = \Phi(y(u), u) \to \inf,$$

$$\mathcal{L} y(u) = F(u), \quad u \in P(\bar{u}).$$

□

Позначимо через U^* множину керувань $u \in U$, для яких виконується необхідна умова мінімуму з леми 5.1.

Для розв'язання задачі керування (5.34), (5.35) розглянемо два ітераційні процеси.

5.3.1 Метод лінеаризації

Розглянемо модифікацію методу умовного градієнта з роботи [141]. Джерело алгоритму — лема 5.1. Метод ідейно близький до методів з довірчою областю і полягає у розв'язанні на кожній ітерації допоміжних задач мінімізації лінійних форм на спеціально побудованих компактних опуклих множинах.

Алгоритм 5.5. Метод лінеаризації для передопуклих задач.

1. Обираємо початкове наближення $u_0 \in U$. Покладаємо $n = 0$.
2. Знаходимо $y_n \in H$ — узагальнений розв'язок рівняння $\mathcal{L}y_n = F(u_n)$.
3. Знаходимо спряжений стан $p_n \in W_+$ — розв'язок рівняння
$$\mathcal{L}^+ p_n = \Phi_1'(y_n, u_n).$$
4. Будуємо множину $P(u_n) = \cap_{k=1}^m P_k(u_n)$.
5. Знаходимо $\bar{u}_n \in U$ — розв'язок екстремальної задачі
$$\left((F'(u_n))^* p_n + \Phi_2'(y_n, u_n), u - u_n\right)_V \to \varepsilon_n - \inf_{u \in P(u_n)}.$$
6. Покладаємо $u_{n+1} = u_n + \rho_n(\bar{u}_n - u_n)$, де $\rho_n \in (0, 1]$, $n := n + 1$ і переходимо на крок 2.

Зауваження 5.17. Наближення u_n завжди будуть лежати у компоненті зв'язності множини U, яка містить початкове наближення, що ускладнює при незв'язності множини U знаходження глобального мінімуму $J(\cdot)$, навіть у випадку опуклості $J(\cdot)$ (наприклад, коли $\Phi(\cdot,\cdot)$ і $F(\cdot)$ лінійні). У даній ситуації слід запускати процес з початковими наближеннями з різних компонент зв'язності.

Зробимо додаткове припущення відносно множини U:

$$\forall u \in U: \ \mathrm{int} P(u) \neq \emptyset. \tag{5.38}$$

Теорема 5.11. *Нехай: виконується умова* (5.38)*;* $\rho_n \in (0, 1]$, $\rho_n \to 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} \rho_n = +\infty$, $\varepsilon_n \geq 0$, $\varepsilon_n \to 0$*; функціонал* J *приймає на множині* U^* *не більш ніж зліченну кількість значень. Тоді всі граничні точки послідовності* (u_n) *утворюють компактну зв'язну підмножину в* U^**, а числова послідовність* $(J(u_n))$ *має границю.*

Доведення. За побудовою всі члени послідовності (u_n) належать компакту U. Далі, $\|u_{n+1} - u_n\|_V = \rho_n \|\bar{u}_n - u_n\|_V \leq \rho_n \mathrm{diam}(U) \to 0$ при $n \to \infty$.

Нехай (u_{n_k}) — підпослідовність, що збігається до керування $u' \notin U^*$. Покажемо, що існує таке $\delta_0 > 0$, що для всіх k та $\delta \in (0, \delta_0]$: $\tau_k = \min\limits_{n>n_k} \{n : \|u_n - u_{n_k}\|_V > \delta\} < +\infty$. Від супротивного. Нехай для всіх $\delta_0 > 0$ існує $k_0 = k_0(\delta_0)$ таке, що
$|u_n - u_{n_{k_0}}\|_V \le \delta_0$ для всіх $n > n_{k_0}$. З нерівності трикутника випливає, що $u_n \in B_{2\delta_0}(u')$ для всіх $n > n_{k_0}$.

Розглянемо

$$J(u_{n+1}) - J(u_n) = (J'(u_n + \theta_n(u_{n+1} - u_n)), u_{n+1} - u_n)_V = \\ = (J'(u_n), u_{n+1} - u_n)_V + \\ + (J'(u_n + \theta_n(u_{n+1} - u_n)) - J'(u_n), u_{n+1} - u_n)_V \le \\ \le \rho_n (J'(u_n), \bar{u}_n - u_n)_V + C_0 \rho_n^{1+\gamma}, \quad (5.39)$$

де $n > n_{k_0}$, $\theta_n \in [0, 1]$.

У нерівності (5.39) оцінимо зверху величину $(J'(u_n), \bar{u}_n - u_n)_V$. Оскільки $u' \notin U^*$, то існує константа $\lambda > 0$ і точка $\bar{u} \in P(u')$ такі, що

$$(J'(u'), \bar{u} - u')_V < -2\lambda < 0.$$

Із неперервності $J'(\cdot)$ і скалярного добутку випливає існування відкритих куль $O_{\delta_1}(\bar{u})$ і $O_{\delta_2}(u')$ таких, що для довільних керувань $u_1' \in O_{\delta_1}(\bar{u})$, $u_2' \in O_{\delta_2}(u')$ має місце нерівність

$$(J'(u_2'), u_1' - u_2')_V < -\lambda < 0.$$

Нехай $\tilde{u}$ — довільна точка множини $\mathrm{int}P(u')$. Тоді $[\tilde{u}, \bar{u}) \subset \mathrm{int}P(u')$, оскільки множина $P(u')$ опукла та $\bar{u} \in P(u')$. Візьмемо довільну точку $\tilde{\tilde{u}} \in [\tilde{u}, \bar{u}) \cap O_{\delta_1}(\bar{u})$. За рахунок збіжності (u_{n_k}) до точки u' при великих номерах k виконується нерівність

$$\left(J'(u_{n_k}), \tilde{\tilde{u}} - u_{n_k}\right)_V < -\lambda < 0. \quad (5.40)$$

Оскільки

$$\tilde{\tilde{u}} \in [\tilde{u}, \bar{u}) \bigcap O_{\delta_1}(\bar{u}) \subset [\tilde{u}, \bar{u}) \subset \mathrm{int}P(u') = \\ = \mathrm{int} \bigcap_{p=1}^{m} \left\{ G_0 \bigcap S_p(u') \right\} \subset \mathrm{int}S_p(u'), \ \ p = \overline{1, m},$$

то $\left(n_p(u'), \tilde{\tilde{u}} - \Pi_p(u')\right)_V > 0$, $p = \overline{1, m}$.

Вектор $n_p(u)$, де $u \in U$, неперервний на межі G_p, бо остання є регулярним многовидом і оператор проектування на множину G_p є неперервним. Тоді в

силу $\Pi_p(u_{n_k}) \xrightarrow[k\to\infty]{} \Pi_p(u')$, $p = \overline{1,m}$, що випливає з $u_{n_k} \to u'$ при $k \to \infty$, та стискаючої властивості оператора проектування, при великих номерах k виконуються нерівності $\left(n_p(u_{n_k}), \tilde{\tilde{u}} - \Pi_p(u_{n_k})\right)_V > 0$, $p = \overline{1,m}$. А отже,

$$\tilde{\tilde{u}} \in P(u_{n_k}).$$

Тобто, існує точка $\tilde{\tilde{u}}$, що при великих k належить множинам $P(u_{n_k})$ і така, що виконується (5.40).

Візьмемо $2\delta_0 < \delta_2$, тоді $\left(J'(u_n), \tilde{\tilde{u}} - u_n\right)_V < -\lambda < 0$ при $n > n_{k_0}$.

Оскільки

$$(J'(u_n), \bar{u}_n - u_n)_V \le \min_{u\in P(u_n)} (J'(u_n), u - u_n)_V + \varepsilon_n,$$

то

$$(J'(u_n), \bar{u}_n - u_n)_V \le \left(J'(u_n), \tilde{\tilde{u}} - u_n\right)_V + \varepsilon_n < -\lambda + \varepsilon_n.$$

Отже,

$$J(u_{n+1}) - J(u_n) < -\rho_n\lambda + \rho_n\varepsilon_n + C_0\rho_n^{1+\gamma} \quad \text{при} \quad n > n_{k_0}.$$

Узявши n_{k_0} достатньо великим, отримаємо

$$J(u_{n+1}) - J(u_n) < -\frac{\lambda}{2}\rho_n \quad \text{при} \quad n > n_{k_0}. \tag{5.41}$$

Складемо нерівності (5.41) при $n = \overline{n_k, r}$, $k > k_0$

$$J(u_r) - J(u_{n_k}) < -\frac{\lambda}{2}\sum_{n=n_k}^{r-1}\rho_n. \tag{5.42}$$

Здійснивши граничний перехід в нерівності (5.42) при $r \to \infty$ та врахувавши $\sum_{n=n_k}^{\infty}\rho_n = +\infty$, отримаємо протиріччя з обмеженістю на компактній множині U неперервного функціонала $J(\cdot)$.

Отже, існує $\delta_0 > 0$ таке, що для всіх k і $\delta \in (0, \delta_0]$:

$$\tau_k = \min_{n>n_k}\{n : \|u_n - u_{n_k}\|_V > \delta\} < +\infty.$$

Але, обираючи достатньо маленьке $\delta_0 > 0$ та велике k_0, можна повторити доведення оцінки (5.42) для $n_k \le n \le \tau_k$. З іншого боку,

$$\delta_0 < \|u_{\tau_k} - u_{n_k}\|_V \le \sum_{n=n_k}^{\tau_k-1}\|u_{n+1} - u_n\|_V \le \operatorname{diam}(U)\sum_{n=n_k}^{\tau_k-1}\rho_n.$$

Тому $\sum_{n=n_k}^{\tau_k-1}\rho_n > \frac{\delta_0}{\operatorname{diam}(U)}$. Враховуючи останню нерівність в (5.42), отримуємо, що

$$J(u_{\tau_k}) - J(u_{n_k}) < -\frac{\lambda\delta_0}{2\operatorname{diam}(U)},$$

звідки $\limsup_{k\to\infty} J(u_{\tau_k}) < \lim\limits_{k\to\infty} J(u_{n_k})$.

Як завжди, покладемо $W = J$ і зішлемось на теорему про збіжність ітераційних алгоритмів. □

Приділимо увагу моделі обчислень з не прямуючою при $n \to \infty$ до нуля похибкою $\varepsilon_n > 0$. Будемо вважати, що $\varepsilon_n \in (0, \bar{\varepsilon}]$.

Введемо множину «майже стаціонарних» керувань

$$U^*_{\bar{\varepsilon}} = \left\{ u^* \in U : \min_{u\in P(u^*)} (J'(u^*),\, u - u^*)_V \geq -\bar{\varepsilon} \right\}.$$

Теорема 5.12. *Нехай: виконується умова* (5.38)*;* $\rho_n \in (0,1]$, $\rho_n \to 0$, $\sum_{n=0}^{\infty}\rho_n = +\infty$, $\varepsilon_n \in (0,\bar{\varepsilon}]$. *Тоді згенерована алгоритмом 5.5 послідовність* (u_n) *має граничні точки, що належать множині* $U^*_{\bar{\varepsilon}}$.

Доведення. Міркуємо, як і при доведенні теорем 5.9 і 5.11. Розглянемо породжену алгоритмом 5.5 послідовність (u_n). Нехай (u_{n_k}) — збіжна до $u' \notin U^*_{\bar{\varepsilon}}$ підпослідовність. Доведемо лише існування $\delta_0 > 0$ такого, що для всіх k та $\delta \in (0,\delta_0]$: $\tau_k = \min\limits_{n>n_k}\{n : \|u_n - u_{n_k}\|_V > \delta\} < +\infty$. Від супротивного. Нехай для всіх $\delta_0 > 0$ існує $k_0 = k_0(\delta_0)$ таке, що $\|u_n - u_{n_{k_0}}\|_V \leq \delta_0$ для всіх $n > n_{k_0}$. Тоді $u_n \in B_{2\delta_0}(u')$ для всіх $n > n_{k_0}$.

Розглянемо

$$J(u_{n+1}) - J(u_n) \leq \rho_n (J'(u_n), \bar{u}_n - u_n)_V + C_0\rho_n^{1+\gamma}, \tag{5.43}$$

де $n > n_{k_0}$, $\theta_n \in [0,1]$.

У нерівності (5.43) оцінимо величину $(J'(u_n), \bar{u}_n - u_n)_V$. Оскільки $u' \notin U^*_{\bar{\varepsilon}}$, то існує константа $\lambda > 0$ і точка $\bar{u} \in P(u')$ такі, що

$$(J'(u'), \bar{u} - u')_V < -2\lambda - \bar{\varepsilon} < 0.$$

Із неперервності $J'(\cdot)$ випливає існування відкритих куль $O_{\delta_1}(\bar{u})$ і $O_{\delta_2}(u')$ таких, що для довільних керувань $u'_1 \in O_{\delta_1}(\bar{u})$, $u'_2 \in O_{\delta_2}(u')$ має місце нерівність

$$(J'(u'_2), u'_1 - u'_2)_V < -\lambda - \bar{\varepsilon} < 0.$$

Як і в доведенні теореми 5.11, доводимо існування точки $\tilde{\bar{u}}$ такої, що при великих k належить множинам $P(u_{n_k})$ і задовольняє нерівність

$$\left(J'(u_{n_k}), \tilde{\bar{u}} - u_{n_k}\right)_V < -\lambda - \bar{\varepsilon} < 0.$$

Візьмемо $2\delta_0 < \delta_2$, тоді $\left(J'(u_n), \tilde{\tilde{u}} - u_n\right)_V < -\lambda - \bar{\varepsilon} < 0$ при $n > n_{k_0}$. Оскільки

$$(J'(u_n), \bar{u}_n - u_n)_V \le \min_{u \in P(u_n)} (J'(u_n), u - u_n)_V + \varepsilon_n,$$

то

$$(J'(u_n), \bar{u}_n - u_n)_V \le \left(J'(u_n), \tilde{\tilde{u}} - u_n\right)_V + \varepsilon_n < -\lambda + \varepsilon_n - \bar{\varepsilon} \le -\lambda.$$

Отже,

$$J(u_{n+1}) - J(u_n) < -\rho_n\lambda + \rho_n\varepsilon_n + C_0\rho_n^{1+\gamma} \quad \text{при} \quad n > n_{k_0}.$$

Узявши n_{k_0} достатньо великим, отримаємо

$$J(u_{n+1}) - J(u_n) < -\frac{\lambda}{2}\rho_n \quad \text{при} \quad n > n_{k_0}. \tag{5.44}$$

Складемо нерівності (5.44) при $n = \overline{n_k, r}$, $k > k_0$

$$J(u_r) - J(u_{n_k}) < -\frac{\lambda}{2} \sum_{n=n_k}^{r-1} \rho_n. \tag{5.45}$$

Здійснивши граничний перехід у нерівності (5.45) при $r \to \infty$ та врахувавши $\sum_{n=n_k}^{\infty} \rho_n = +\infty$, отримаємо протиріччя з обмеженістю на компактній множині U неперервного функціонала $J(\cdot)$. □

5.3.2 Модифікований метод проекції градієнта

Розглянемо алгоритм, у якому на кожному кроці проводиться наближене проектування $(F'(u_n))^* p_n + \Phi_2'(y_n, u_n)$ на допоміжну опуклу множину $P(u_n) \subseteq U$. Різні варіанти цієї процедури досліджувались в [136, 138].

Зауваження 5.18. Необхідна умова з леми 5.1 рівносильна рівності

$$\bar{u} = \Pi_{P(\bar{u})}\left(\bar{u} - (F'(\bar{u}))^* \bar{p} - \Phi_2'(y(\bar{u}), \bar{u})\right),$$

де $\Pi_{P(u)}(\cdot)$ — оператор проектування на множину $P(u)$, $\bar{p} = p(\bar{u}) \in W_+$ — розв'язок рівняння $\mathcal{L}^+ p = \Phi_1'(y(\bar{u}), \bar{u})$.

Алгоритм 5.6. Модифікований метод проекції градієнта.

1. Обираємо початкове наближення $u_0 \in U$. Покладаємо $n = 0$.

2. Знаходимо $y_n \in H$ — узагальнений розв'язок рівняння $\mathcal{L}y_n = F(u_n)$.

3. Знаходимо спряжений стан $p_n \in W_+$ — розв'язок рівняння

$$\mathcal{L}^+ p_n = \Phi_1'(y_n, u_n).$$

4. Будуємо множину $P(u_n) = \cap_{k=1}^m P_k(u_n)$.

5. Знаходимо $\bar{u}_n \in U$ — розв'язок екстремальної задачі

$$\left((F'(u_n))^* p_n + \Phi_2'(y_n, u_n), u - u_n\right)_V + \frac{1}{2}\|u - u_n\|_V^2 \to \varepsilon_n - \inf_{u \in P(u_n)}.$$

6. Покладаємо $u_{n+1} = u_n + \rho_n(\bar{u}_n - u_n)$, де $\rho_n \in (0, 1]$, $n := n + 1$ і переходимо на крок 2.

Алгоритм генерує послідовності точок з допустимої множини. Якщо $\varepsilon_n = 0$, то у випадку $\bar{u}_n = u_n$ у точці $u_n \in U$ виконується необхідна умова мінімуму. У подальшому будемо припускати, що послідовність (u_n) нескінченна, тобто, всі її точки лежать за межами множини U^*.

Теорема 5.13. *Нехай: виконується умова* (5.38)*;* $\rho_n \in (0, 1]$, $\rho_n \to 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} \rho_n = +\infty$, $\varepsilon_n \geq 0$, $\varepsilon_n \to 0$*; функціонал* J *приймає на множині* U^* *не більш ніж зліченну кількість значень. Тоді всі граничні точки породженої алгоритмом 5.6 послідовності* (u_n) *утворюють компактну зв'язну підмножину в* U^**, а числова послідовність* $(J(u_n))$ *має границю.*

Доведення. Подібне до доведення теореми 5.11 (також див. [136]). □

5.4 Умови глобального екстремуму

У даному пункті ми приділимо увагу абстрактній задачі оптимального керування у наступній постановці.

Нехай $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ і $(V, \|\cdot\|_V)$ — банахові простори. Елементи простору V грають роль керувань, а елементи простору E — можливі стани системи. Задано: множину $U \subseteq V$ допустимих керувань, $A : E \times V \to F$ — оператор, що описує функціонування системи, $\Phi : E \times V \to \mathbb{R}$ — функціонал якості.

Розглянемо екстремальну задачу вигляду

$$J(u) = \Phi(y(u), u) \to \inf_{u \in U}, \tag{5.46}$$

$$A(y(u), u) = 0, \ \ u \in U, \tag{5.47}$$

де $y(u) \in E$ — стан системи, що відповідає керуванню $u \in U$, тобто, розв'язок операторного рівняння $A(y, u) = 0$ при даному $u \in U$.

Наша мета — охарактеризувати глобально оптимальні керування для задачі (5.46), (5.47). Питаннями існування тут цікавитись не будемо.

Відмітимо, що класичні умови оптимальності не тільки не відрізняють стаціонарні та локально оптимальні елементи від шуканого глобально оптимального розв'язку задачі, але й «плутають» останній з протилежним екстремумом.

Ми використовуємо евристичний принцип, який можна сформувати так:

для «регулярних» задач локально оптимальний розв'язок є глобально оптимальним тоді і тільки тоді, коли виконуються умови оптимальності на всій лінії рівня, визначеній цією точкою.

Використовуючи сформульований принцип, О. С. Стрекаловський [106–110] отримав умови глобальної оптимальності для задач опуклої максимізації та DC-оптимізації. Найбільш привабливою рисою цих умов є їх алгоритмічна властивість, що дозволяє будувати методи пошуку глобального оптимуму.

Припустимо, що виконано умови:

1) $U \subseteq V$ — опукла та замкнена множина;

2) для всіх $u \in U$ існує єдиний розв'язок $y = y(u) \in E$ рівняння

$$A(y, u) = 0;$$

3) оператор $A : E \times V \to F$ має неперервні у відповідних рівномірних операторних топологіях частинні похідні Фреше $A'_1 \in L(E, F)$, $A'_2 \in L(V, F)$;

4) для всіх $u \in U$ оператор $A'_1(y(u), u) : E \to F$ має неперервний обернений;

5) функціонал $\Phi : E \times V \to \mathbb{R}$ диференційовний за Фреше ($\Phi'_1 \in E^*$, $\Phi'_2 \in V^*$ — відповідні частинні похідні).

Лема 5.2. *Нехай виконано умови 2)–5). Тоді функціонал якості* $J : V \to \mathbb{R}$ *диференційовний за Фреше та його похідна обчислюється за формулою*

$$\langle J'(u), h\rangle_{V^*,V} = -\left\langle (A'_2(y(u), u))^* p, h\right\rangle_{V^*,V} + \langle \Phi'_2(y(u), u), h\rangle_{V^*,V}, \quad (5.48)$$

де $h \in V$, $p = p(u) \in F^*$ — *спряжений стан — розв'язок операторного рівняння*

$$(A'_1(y(u), u))^* p = \Phi'_1(y(u), u).$$

Доведення полягає у простому застосуванні теорем про диференційовність неявного відображення та похідну композиції диференційовних відображень.

Має місце така теорема.

Теорема 5.14. *Нехай для точки* $u_0 \in U$ *справджується така умова «регулярності»*

$$\sup_{v \in U} \langle J'(u), v-u \rangle_{V^*,V} > 0 \quad \forall u \in U : \ J(u) = J(u_0). \tag{5.49}$$

Точка $u_0 \in U$ *є глобально оптимальним розв'язком задачі* (5.46), (5.47) *тоді і тільки тоді, коли для всіх* $u \in U$ *таких, що* $J(u) = J(u_0)$, *виконується*

$$\left\langle \Phi_2'(y(u),u) - (A_2'(y(u),u))^* p, u \right\rangle_{V^*,V} = \\ = \min_{v \in U} \left\langle \Phi_2'(y(u),u) - (A_2'(y(u),u))^* p, v \right\rangle_{V^*,V}, \tag{5.50}$$

де $p = p(u) \in F^*$ — *спряжений стан.*

Зауваження 5.19. Від нерівності (5.49), яка означає існування напрямків локального зростання у кожній точці множини рівня $\{u \in U : J(u) = J(u_0)\}$, не можна відмовитись. Без цієї нерівності умови (5.50) є лише необхідними.

Доведення теореми 5.14. Нехай $u_0 \in U$ — глобально оптимальний розв'язок задачі (5.46), (5.47). Розглянемо довільну точку $u \in U$ таку, що $J(u) = J(u_0)$. Тоді для всіх $v \in U$ і $\alpha \in (0,1]$ маємо

$$J(u + \alpha(v-u)) - J(u) \geq 0.$$

Перейшовши до границі при $\alpha \to +0$, отримаємо

$$\langle J'(u), v-u \rangle_{V^*,V} \geq 0 \quad \forall v \in U,$$

тобто, для $u \in U$ таких, що $J(u) = J(u_0)$:

$$\left\langle \Phi_2'(y(u),u) - (A_2'(y(u),u))^* p, v-u \right\rangle_{V^*,V} \geq 0 \quad \forall v \in U,$$

що рівносильно (5.50).

Доведемо тепер достатність умов (5.50) при виконанні умови «регулярності» (5.49). Від супротивного. Нехай виконуються умови (5.50) та існує елемент $u' \in U$ такий, що $J(u') < J(u_0)$. Розглянемо лебегову множину

$$L = \{v \in U : J(v) \geq J(u_0)\}$$

і допоміжну екстремальну задачу

$$\|v-u'\|_V^2 \to \inf_v, v \in L. \tag{5.51}$$

Задача (5.51) може бути нерозв'язною. Але оскільки множина L замкнена, то

за теоремою Екланда [81] для довільного $\varepsilon > 0$ існує точка $u'_\varepsilon \in L$ така, що

$$\|u'_\varepsilon - u'\|_V^2 \le \|v - u'\|_V^2 + \varepsilon \|v - u'_\varepsilon\|_V \quad \forall v \in L,$$

тобто, $u'_\varepsilon \in L$ — розв'язок наступної задачі

$$\|v - u'\|_V^2 + \varepsilon \|v - u'_\varepsilon\|_V \to \inf_v, \quad v \in L. \tag{5.52}$$

Доведемо існування числа $\varepsilon_0 > 0$ такого, що $J(u'_\varepsilon) = J(u_0)$ як тільки $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$. Міркуємо від супротивного. Припустимо, що існує числова послідовність $\varepsilon_p \to +0$ така, що

$$J(u'_p) > J(u_0),$$

де $u'_p = u'_{\varepsilon_p}$. Для $\alpha \in (0, 1]$ розглянемо елементи

$$u_{p,\alpha} = u'_p + \alpha(u' - u'_p).$$

Зрозуміло, що внаслідок опуклості множини U маємо $u_{p,\alpha} \in U$. Із неперервності функціонала $J(\cdot)$ випливає існування $\alpha_p \in (0, 1]$ такого, що для всіх $\alpha \in (0, \alpha_p]$

$$J(u_{p,\alpha}) > J(u_0).$$

Отже, для всіх $\alpha \in (0, \alpha_p]$

$$\|u'_p - u'\|_V^2 \le \|u_{p,\alpha} - u'\|_V^2 + \varepsilon_p \|u_{p,\alpha} - u'_p\|_V = \\ = (\alpha - 1)^2 \|u' - u'_p\|_V^2 + \varepsilon_p \alpha \|u' - u'_p\|_V.$$

Звідки отримуємо нерівність

$$\|u'_p - u'\|_V \le \frac{\varepsilon_p}{2} + \frac{\alpha}{2} \|u'_p - u'\|_V \quad \forall \alpha \in (0, \alpha_p]. \tag{5.53}$$

Спрямувавши в (5.53) параметр α до 0, отримаємо оцінку

$$\|u'_p - u'\|_V \le \frac{\varepsilon_p}{2}.$$

Здійснивши в останній нерівності граничний перехід при $p \to \infty$ і згадавши, що $J(u'_p) > J(u_0)$, прийдемо до нерівності $J(u') \ge J(u_0)$, яка суперечить вибору $u' \in U$.

Отже,

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \ \ \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0] : \ J(u'_\varepsilon) = J(u_0).$$

Далі розглядаємо ε тільки з проміжку $(0, \varepsilon_0]$. Для задачі мінімізації (5.52) випишемо необхідну умову мінімуму [164], що виконується у точці u'_ε: існують

числа (множники Лагранжа) $\lambda \geq 0$, $\lambda' \geq 0$, $\lambda + \lambda' = 1$ такі, що

$$2\lambda \|u'_\varepsilon - u'\|_V D \|u'_\varepsilon - u'\|_V (u - u'_\varepsilon) + \\ + \varepsilon\lambda \|u - u'_\varepsilon\|_V - \lambda' \langle J'(u'_\varepsilon), u - u'_\varepsilon\rangle_{V^*,V} \geq 0 \quad \forall u \in U,$$

де $D\|v\|_V(h) \in \mathbb{R}$ — похідна за напрямом $h \in V$ норми $\|\cdot\|_V$ у точці $v \in V$.

Покажемо, що $\lambda > 0$. Дійсно, якщо $\lambda = 0$, то $\langle J'(u'_\varepsilon), u - u'_\varepsilon\rangle_{V^*,V} \leq 0$ для всіх $u \in U$, що суперечить умові (5.49). Отже, маємо

$$2\|u'_\varepsilon - u'\|_V D \|u'_\varepsilon - u'\|_V (u - u'_\varepsilon) + \\ + \varepsilon \|u - u'_\varepsilon\|_V \geq \frac{\lambda'}{\lambda} \langle J'(u'_\varepsilon), u - u'_\varepsilon\rangle_{V^*,V} \quad \forall u \in U,$$

звідки, підставивши u' замість u, отримаємо

$$-2\|u'_\varepsilon - u'\|_V^2 + \varepsilon \|u' - u'_\varepsilon\|_V \geq \frac{\lambda'}{\lambda} \langle J'(u'_\varepsilon), u' - u'_\varepsilon\rangle_{V^*,V} \geq 0,$$

і, отже, $\|u'_\varepsilon - u'\|_V \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Спрямовуючи ε до 0, отримуємо, що $J(u'_\varepsilon) \to J(u')$. Остаточно, маємо

$$J(u') \geq J(u_0),$$

що суперечить початковому припущенню. □

Наведемо декілька зауважень стосовно умов глобальної оптимальності для розглянутих задач.

Вище ми досліджували питання існування розв'язків екстремальних задач на передопуклих множинах

$$f(x) \to \inf_{x \in X}, \tag{5.54}$$

де f — дійсний функціонал, заданий на банаховому просторі $(E, \|\cdot\|_E)$; множина $X \subseteq E$ має вигляд $X = F_0 \setminus \bigcup_{k=1}^m F_k$, F_k $(k = \overline{0,m})$ — опуклі підмножини простору E. Позначимо через L_C множину $\{x \in E : f(x) < C\}$, а для точки $x \in X$ позначимо через $I(x)$ множину таких $k \in \{1, ..., m\}$, що $x \in \operatorname{fr} F_k$ ($I(x)$ — множина активних у точці x обернено опуклих обмежень). Має місце таке очевидне твердження.

Твердження 5.1. *Для того, щоб точка $\bar{x} \in X$ була розв'язком задачі (5.54), необхідно і достатньо виконання умови*

$$F_0 \bigcap L_{f(\bar{x})} \subseteq \bigcup_{k \in I(\bar{x})} F_k. \tag{5.55}$$

Відштовхуючись від (5.55) і використовуючи апарат опуклого аналізу, можна прийти до змістовних умов глобальної оптимальності (див. [109]).

Розглянемо екстремальну задачу в метричному просторі. Будемо використовувати аналог похідної, який розглядав В. Ф. Дем'янов [165, 166].

Нехай (X, ρ) — метричний простір, $f : X \to \mathbb{R}$ — обмежений знизу функціонал. Маємо задачу мінімізації

$$f(x) \to \inf, \quad x \in X. \tag{5.56}$$

Розглянемо відображення $X \ni x \mapsto \underline{d} f(x) \in \overline{\mathbb{R}}$:

$$\underline{d}\, f(x) = \liminf_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{\rho(y, x)}. \tag{5.57}$$

Якщо x — ізольована точка простору X, то покладаємо $\underline{d}\ f(x) = +\infty$. Із (5.57) випливає розклад $f(y) = f(x) + \underline{d}\, f(x)\, \rho(y, x) + \underline{o}(\rho(y, x))$ при $y \to x$, де $\liminf_{y \to x} \frac{o(\rho(y,x))}{\rho(y,x)} = 0$.

Твердження 5.2. *Нехай $x_0 \in X$ — точка глобального мінімуму функціонала f. Тоді справджується умова*

$$\underline{d}\, f(x) \geq 0 \quad \forall x \in X : f(x) = f(x_0). \tag{5.58}$$

Виникає цікава проблема: запропонувати умови регулярності на множині рівня $\{x \in X : \ f(x) = f(x_0)\}$, щоб умова (5.58) (чи якась мінімально відмінна умова) була достатньою для глобальної оптимальності точки $x_0 \in X$.

Наприкінці відмітимо: якщо метричний простір (X, ρ) є лінійно зв'язним, а $f \in C(X)$, то точка $x_0 \in X$ не є глобально оптимальним розв'язком задачі (5.56) тоді і тільки тоді, коли принаймні одна точка з множини рівня $\{x \in X : \ f(x) = f(x_0)\}$ не є локально оптимальним розв'язком (5.56) [111].

5.5 Мінімізуючі послідовності та умови другого порядку

Розглянемо задачу оптимального керування

$$J(u) = \Phi(y(u), u) \to \inf_{u \in U}, \tag{5.59}$$

$$\mathcal{L} y(u) = F(u), \ \ u \in U. \tag{5.60}$$

Припустимо, що функціонал $\Phi : H \times V \to \mathbb{R}$ диференційовний за Фреше і обмежений знизу, оператор $F : V \to W_+^-$ диференційовний за Фреше, а множина $U \subseteq V$ замкнена та опукла. Звичайно, задача (5.59), (5.60) може не мати оптимальних розв'язків. Але, на відміну від оптимальних, ε-оптимальні керування (тобто такі $u' \in U$, що $J(u') \leq \inf_{u \in U} J(u) + \varepsilon$, де $\varepsilon > 0$) завжди існують у випадку обмеженності знизу функціонала якості. Це робить

їх важливим об'єктом у нескінченновимірних задачах оптимізації, де часто не виконуються топологічні умови, що гарантують існування оптимальних розв'язків.

Із варіаційного принципу Екланда [81, 163] випливає твердження.

Теорема 5.15. *Нехай* U *— замкнена опукла підмножина банахова простору* $(V, \|\cdot\|_V)$*, оператор* $F : V \to W_+^-$ *диференційовний за Фреше, функціонал* $\Phi : H \times V \to \mathbb{R}$ *обмежений знизу і диференційовний за Фреше,* $\varepsilon > 0$*. Припустимо, що керування* $u_\varepsilon \in U$ *має властивість* $J(u_\varepsilon) < \inf_{u \in U} J(u) + \varepsilon$*. Тоді для довільного* $\delta > 0$ *існує керування* $u_0 \in U$ *таке, що*

$$\|u_0 - u_\varepsilon\|_V \le \delta, \quad J(u_0) \le J(u_\varepsilon),$$

$$\left\langle (F'(u_0))^* p_0 + \Phi_2'(y_0, u_0), u - u_0 \right\rangle_{V^*, V} + \frac{\varepsilon}{\delta} \|u - u_0\|_V \ge 0 \ \ \forall\, u \in U,$$

де $y_0 = y(u_0) \in H$ *— узагальнений розв'язок рівняння* $\mathcal{L} y_0 = F(u_0)$*,* $p_0 = p(u_0) \in W_+$ *— розв'язок рівняння* $\mathcal{L}^+ p_0 = \Phi_1'(y_0, u_0)$*.*

Доведення. Функціонал якості $J(\cdot)$ неперервний на U. Тому за варіаційним принципом Екланда існує керування $u_0 \in U$ таке, що

$$\|u_0 - u_\varepsilon\|_V \le \delta; \quad J(u_0) \le J(u_\varepsilon);$$

$$J(u_0) < J(u) + \frac{\varepsilon}{\delta} \|u - u_0\|_V \quad \forall\, u \in U \backslash \{u_0\}.$$

Підставимо у останню нерівність замість u керування $u_0 + \tau(u - u_0) \in U$ $(u \in U, \tau \in (0, 1))$:

$$J(u_0 + \tau(u - u_0)) - J(u_0) + \tau \frac{\varepsilon}{\delta} \|u - u_0\|_V > 0.$$

Розділимо нерівність на τ та перейдемо до границі при $\tau \to 0$. Отримаємо

$$\langle J'(u_0), u - u_0 \rangle_{V^*, V} + \frac{\varepsilon}{\delta} \|u - u_0\|_V \ge 0 \ \ \forall\, u \in U.$$

Далі посилаємось на теорему 5.1. □

Зауваження 5.20. Нерівності з теореми 5.15 природно називати умовами субоптимальності.

Із теореми 5.15 випливає існування мінімізуючих послідовностей задачі (5.59), (5.60) з граничною поведінкою, що узагальнює необхідні умови оптимальності першого порядку.

Наслідок 5.1. *Нехай виконуються умови теореми 5.15 та множина* U *обмежена. Тоді існує мінімізуюча послідовність керувань* $u_n \in U$ *така, що*

$$\liminf_{n \to \infty} \left\langle (F'(u_n))^* p_n + \Phi_2'(y_n, u_n), u - u_n \right\rangle_{V^*, V} \ge 0 \quad \forall\, u \in U,$$

де $y_n \in H$ — *узагальнений розв'язок рівняння* $\mathcal{L}y_n = F(u_n)$, $p_n \in W_+$ — *розв'язок рівняння* $\mathcal{L}^+ p_n = \Phi_1'(y_n, u_n)$.

Доведення. Розглянемо послідовність $v_n \in U$ таку, що

$$J(v_n) < \inf_{u \in U} J(u) + \tfrac{1}{n}.$$

Покладемо $\varepsilon = \frac{1}{n}$ і $\delta = \sqrt{\frac{1}{n}}$; скористаємось теоремою 5.15. У результаті отримаємо послідовність $u_n \in U$ таку, що

$$\|u_n - v_n\|_V \le \sqrt{\tfrac{1}{n}}, \quad J(u_n) \le J(v_n),$$

$$\left\langle (F'(u_n))^* p_n + \Phi_2'(y_n, u_n), u - u_n \right\rangle_{V^*,V} + \sqrt{\tfrac{1}{n}} \|u - u_n\|_V \ge 0 \quad \forall\, u \in U,$$

де $y_n \in H$ — узагальнений розв'язок рівняння $\mathcal{L}y_n = F(u_n)$, $p_n \in W_+$ — розв'язок рівняння $\mathcal{L}^+ p_n = \Phi_1'(y_n, u_n)$. Спрямувавши номер n до нескінченності та ураховуючи обмеженість множини U, отримуємо бажану «варіаційну» нерівність. □

У наступній теоремі ми отримаємо варіаційний принцип, який дозволить сформулювати умови субоптимальності другого порядку.

Теорема 5.16. *Нехай* $(E, \|\cdot\|_E)$ — *рефлексивний банахів простір,* $X \subseteq E$ — *замкнена у топології* $\sigma(E, E^*)$ *множина,* $f : E \to \mathbb{R}$ — $\sigma(E, E^*)$-*напівнеперервний знизу обмежений знизу на* X *функціонал,* $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ *і* $p \ge 1$. *Припустимо, що точка* $x_0 \in X$ *має властивість*

$$f(x_0) < \inf_X f + \varepsilon. \tag{5.61}$$

Тоді існує точка $y_0 \in X$ *така, що*

$$f(y_0) + \frac{\varepsilon}{\delta^p} \|y_0 - x_0\|_E^p \le f(x) + \frac{\varepsilon}{\delta^p} \|x - x_0\|_E^p \quad \forall x \in X, \tag{5.62}$$

$$\|y_0 - x_0\|_E \le 2\delta, \tag{5.63}$$

$$f(y_0) + \frac{\varepsilon}{\delta^p} \|y_0 - x_0\|_E^p < \inf_X f + \varepsilon. \tag{5.64}$$

Доведення. Розглянемо множину $X_\delta = \{x \in X : \|x - x_0\|_E \le 2\delta\}$. Із рефлексивності простору $(E, \|\cdot\|_E)$ випливає $\sigma(E, E^*)$-компактність множини $X_\delta \subseteq E$. Функціонал $E \ni x \mapsto f(x) + \frac{\varepsilon}{\delta^p} \|x - x_0\|_E^p$ -напівнеперервний знизу відносно топології $\sigma(E, E^*)$. Тому існує точка $y_0 \in X_\delta$ така, що

$$f(y_0) + \frac{\varepsilon}{\delta^p} \|y_0 - x_0\|_E^p \le f(x) + \frac{\varepsilon}{\delta^p} \|x - x_0\|_E^p \quad \forall x \in X_\delta.$$

Покажемо, що точка y_0 задовольняє (5.62) (локалізація (5.63) має місце за побудовою). Нехай $x \in X$ та $\|x - x_0\|_E > 2\delta$. Тоді маємо

$$f(x) + \frac{\varepsilon}{\delta^p}\|x - x_0\|_E^p > f(x) + 2^p\varepsilon \geq$$
$$\geq \inf_X f + 2^p\varepsilon > f(x_0) + (2^p - 1)\,\varepsilon \geq f(y_0) + \frac{\varepsilon}{\delta^p}\|y_0 - x_0\|_E^p.$$

Отже,

$$f(y_0) + \frac{\varepsilon}{\delta^p}\|y_0 - x_0\|_E^p = \min_{x\in X}\left\{f(x) + \frac{\varepsilon}{\delta^p}\|x - x_0\|_E^p\right\}.$$

Із нерівності

$$f(y_0) + \frac{\varepsilon}{\delta^p}\|y_0 - x_0\|_E^p < f(x_0)$$

і (5.61) випливає (5.64). □

Доведемо, що банахів простір $(E, \|\cdot\|_E)$, у якому виконується варіаційний принцип теореми 5.16 з $p > 1$, обов'язково є рефлексивним.

Теорема 5.17. *Нехай $(E, \|\cdot\|_E)$ — банахів простір, у якому виконується твердження теореми 5.16 з $p > 1$. Тоді простір $(E, \|\cdot\|_E)$ рефлексивний.*

Доведення. Нехай банахів простір $(E, \|\cdot\|_E)$ нерефлексивний. Тоді за відомою теоремою Джеймса [167] існує функціонал $\phi \in E^*$ такий, що $\|\phi\|_{E^*} = 1$ і $\langle\phi, x\rangle_{E^*,E} < 1\ \forall x \in B_1(E)$. Розглянемо невід'ємний та $\sigma(E, E^*)$-неперервний функціонал

$$E \ni x \mapsto f(x) = e^{\langle\phi,x\rangle_{E^*,E}}.$$

Покажемо, що для $\varepsilon > 0$, $p > 1$ і $x_0 \in E$ функціонал $E \ni x \mapsto f(x) + \varepsilon\|x - x_0\|_E^p$ не досягає свого мінімуму на E. Маємо

$$f(x) + \varepsilon\|x - x_0\|_E^p = \alpha e^{\langle\phi,x-x_0\rangle_{E^*,E}} + \varepsilon\|x - x_0\|_E^p,$$

де $\alpha = e^{\langle\phi,x_0\rangle_{E^*,E}}$. Звідси

$$\inf_{x\in E}\{f(x) + \varepsilon\|x - x_0\|_E^p\} = \inf_{y\in E}\left\{\alpha e^{\langle\phi,y\rangle_{E^*,E}} + \varepsilon\|y\|_E^p\right\} =$$
$$= \inf_{R\geq 0}\inf_{y\in S_R(E)}\left\{\alpha e^{\langle\phi,y\rangle_{E^*,E}} + \varepsilon\|y\|_E^p\right\} =$$
$$= \inf_{R\geq 0}\left\{\alpha \inf_{y\in S_R(E)} e^{\langle\phi,y\rangle_{E^*,E}} + \varepsilon R^p\right\} = \min_{R\geq 0}\left\{\alpha e^{-R} + \varepsilon R^p\right\}.$$

Оскільки функція

$$R \mapsto \alpha e^{-R} + \varepsilon R^p$$

досягає мінімуму на $[0, +\infty)$ у деякій точці $R_0 > 0$, для всіх $R > 0$ не існує

точок $y \in E$ таких, що $\|y\|_E = R$ і $e^{\langle \phi, y\rangle_{E^*,E}} = e^{-R}$, то задача

$$f(x) + \varepsilon \|x - x_0\|_E^p \to \inf_{x\in E}$$

не має розв'язків. Цим і доводимо теорему. □

Припустимо, що простір керувань $(V, \|\cdot\|_V)$ гільбертів (канонічно ототожнимо V зі своїм спряженим). Тоді функціонал $\|\cdot\|_V^2$ двічі диференційовний за Фреше, і ми можемо отримати за допомогою теореми 5.16 умови субоптимальності другого порядку та довести існування мінімізуючих послідовностей, що задовольняють секвенційний аналог умов другого порядку.

Розглянемо задачу (5.59), (5.60), де:

1) U — замкнена опукла підмножина гільбертового простору $(V, \|\cdot\|_V)$;

2) оператор $F : V \to W_+^-$ слабко неперервний та двічі диференційовний за Фреше;

3) функціонал $\Phi : H \times V \to \mathbb{R}$ напівнеперервний знизу у слабких топологіях просторів H та V, обмежений знизу, двічі диференційовний за Фреше.

Теорема 5.18. *Нехай виконано умови 1), 2) і 3), $\varepsilon > 0$. Припустимо, що керування $u_\varepsilon \in U$ має властивість $J(u_\varepsilon) < \inf_{u\in U} J(u) + \varepsilon$. Тоді для довільного $\delta > 0$ існує керування $u_0 \in U$ таке, що*

$$\|u_0 - u_\varepsilon\|_V \le 2\delta, \;\; J(u_0) + \frac{\varepsilon}{\delta^2}\|u_0 - u_\varepsilon\|_V^2 < \inf_{u\in U} J(u) + \varepsilon; \tag{5.65}$$

$$\left((F'(u_0))^* p_0 + \Phi_2'(y_0, u_0), u - u_0\right)_V + \\ + \frac{2\varepsilon}{\delta^2}(u_0 - u_\varepsilon, u - u_0)_V \ge 0 \;\; \forall\, u \in U; \tag{5.66}$$

якщо $u \in U$: $u - u_0 \perp (F'(u_0))^* p_0 + \Phi_2'(y_0, u_0) + \frac{2\varepsilon}{\delta^2}(u_0 - u_\varepsilon)$ ($\perp$ — ортогональність), то

$$\langle F''(u_0)(u - u_0, u - u_0), p_0\rangle_+ + \\ + \Phi_{11}''(y_0, u_0)(z_u, z_u) + 2\Phi_{12}''(y_0, u_0)(z_u, u - u_0) + \\ + \Phi_{22}''(y_0, u_0)(u - u_0, u - u_0) + \frac{2\varepsilon}{\delta^2}(u - u_0, u - u_0)_V \ge 0, \tag{5.67}$$

де $y_0 = y(u_0) \in H$ — розв'язок рівняння $\mathcal{L} y_0 = F(u_0)$, $p_0 = p(u_0) \in W_+$ — розв'язок рівняння $\mathcal{L}^+ p_0 = \Phi_1'(y_0, u_0)$, $z_u \in H$ — розв'язок рівняння $\mathcal{L} z_u = F'(u_0)u - F'(u_0)u_0$.

Доведення. За теоремою 5.16 існує керування $u_0 \in U$ таке, що виконується (5.65) і на якому досягається $\inf_{u\in U}\left\{J(u)+\frac{\varepsilon}{\delta^2}\|u-u_\varepsilon\|_V^2\right\}$. Для доведення (5.65) і (5.66) застосовуємо до задачі

$$J(u)+\tfrac{\varepsilon}{\delta^2}\|u-u_\varepsilon\|_V^2 \to \inf_{u\in U}$$

у точці $u_0 \in U$ відомі необхідні умови оптимальності другого порядку. □

У випадку відсутності обмежень на керування маємо таке твердження.

Теорема 5.19. *Нехай $U = V$ і виконуються умови 2), 3), $\varepsilon > 0$. Припустимо, що керування $u_\varepsilon \in V$ має властивість $J(u_\varepsilon) < \inf_{u\in V} J(u) + \varepsilon$. Тоді для довільного $\delta > 0$ існує керування $u_0 \in V$ таке, що*

$$\|u_0-u_\varepsilon\|_V \le 2\delta, J(u_0)+\frac{\varepsilon}{\delta^2}\|u_0-u_\varepsilon\|_V^2 < \inf_{u\in V} J(u)+\varepsilon; \tag{5.68}$$

$$(F'(u_0))^* p_0 + \Phi_2'(y_0,u_0) + \tfrac{2\varepsilon}{\delta^2}(u_0-u_\varepsilon) = 0; \tag{5.69}$$

$$\langle F''(u_0)(v,v), p_0\rangle_+ + \Phi_{11}''(y_0,u_0)(z_v,z_v) + 2\Phi_{12}''(y_0,u_0)(z_v,v) + \\ + \Phi_{22}''(y_0,u_0)(v,v) + \frac{2\varepsilon}{\delta^2}\|v\|_V^2 \ge 0 \quad \forall\, v \in V, \tag{5.70}$$

де $y_0 = y(u_0) \in H$ — розв'язок рівняння $\mathcal{L}y_0 = F(u_0)$, $p_0 = p(u_0) \in W_+$ — розв'язок рівняння $\mathcal{L}^+ p_0 = \Phi_1'(y_0,u_0)$, $z_v \in H$ — розв'язок рівняння $\mathcal{L}z_v = F'(u_0)v$.

Доведення. Аналогічне доведенню теореми 5.18. □

Із теореми 5.19 легко отримати для випадку $U = V$ існування мінімізуючих послідовностей керувань, що задовольняють певний секвенційний аналог необхідних умов оптимальності другого порядку.

Теорема 5.20. *Нехай $U = V$ і виконуються умови 2), 3), $\varepsilon > 0$. Тоді існує мінімізуюча послідовність керувань $u_n \in V$ така, що*

$$(F'(u_n))^* p_n + \Phi_2'(y_n,u_n) \to 0 \quad \text{сильно в} \quad V; \tag{5.71}$$

$$\liminf_{n\to\infty}\{\langle F''(u_n)(v,v), p_n\rangle_+ + \Phi_{11}''(y_n,u_n)(z_{n,v},z_{n,v}) + \\ + 2\Phi_{12}''(y_n,u_n)(z_{n,v},v) + \Phi_{22}''(y_n,u_n)(v,v)\} \ge 0 \ \ \forall\, v \in V, \tag{5.72}$$

де $y_n = y(u_n) \in H$ — розв'язок рівняння $\mathcal{L}y_n = F(u_n)$, $p_n = p(u_n) \in W_+$ — розв'язок рівняння $\mathcal{L}^+ p_n = \Phi_1'(y_n,u_n)$, $z_{n,v} \in H$ — розв'язок рівняння $\mathcal{L}z_{n,v} = F'(u_n)v$.

Доведення. Розглянемо послідовність керувань $v_n \in V$ таку, що

$$J(v_n) < \inf_{u \in U} J(u) + \tfrac{1}{n^2}.$$

Покладемо $\varepsilon = \frac{1}{n^2}$ і $\delta = \sqrt{\frac{1}{n}}$; скористаємось теоремою 5.19. У результаті отримаємо послідовність $u_n \in V$ таку, що

$$\|u_n - v_n\|_V \le 2\sqrt{\tfrac{1}{n}}, \tag{5.73}$$

$$J(u_n) < \inf_{u \in V} J(u) + \tfrac{1}{n^2},$$

$$(F'(u_n))^* p_n + \Phi_2'(y_n, u_n) + \tfrac{2}{n}(u_n - v_n) = 0, \tag{5.74}$$

$$\langle F''(u_n)(v,v), p_n \rangle_+ + \Phi_{11}''(y_n, u_n)(z_{n,v}, z_{n,v}) + \\ + 2\Phi_{12}''(y_n, u_n)(z_{n,v}, v) + \Phi_{22}''(y_n, u_n)(v,v) \ge -\tfrac{2}{n}\|v\|_V^2 \quad \forall\, v \in V, \tag{5.75}$$

де $y_n = y(u_n) \in H$ — розв'язок рівняння $\mathcal{L} y_n = F(u_n)$, $p_n = p(u_n) \in W_+$ — розв'язок рівняння $\mathcal{L}^+ p_n = \Phi_1'(y_n, u_n)$, $z_{n,v} \in H$ — розв'язок рівняння $\mathcal{L} z_{n,v} = F'(u_n)\, v$.

Із (5.73) і (5.74) випливає виконання для мінімізуючої послідовності (u_n) співвідношення

$$\left\| (F'(u_n))^* p_n + \Phi_2'(y_n, u_n) \right\|_V \le \frac{4}{n^{3/2}},$$

тобто, має місце (5.71).

Спрямувавши у нерівності (5.75) номер n до нескінченності, отримаємо нерівність (5.72). □

На цьому ми закінчуємо дослідження граничної поведінки мінімізуючих послідовностей допустимих керувань задач оптимізації лінійних розподілених систем з узагальненими впливами.

Розділ 6

Векторна оптимізація лінійних розподілених систем з узагальненим керуванням

Теорія задач багатокритеріальної (векторної) оптимізації є одним із тих розділів сучасної теорії екстремальних задач, який інтенсивно розвивається в останні десятиліття [168–175]. Дослідженню проблем векторної оптимізації та пошуку ефективних методів їх розв'язання присвячено надзвичайно багато літератури. Завдяки багатогранності вимог, які повсякчас висуваються до результатів нашої діяльності, багатокритеріальні за-дачі є одними з основних в економічних та суспільних застосуваннях. Мабуть, вперше математичну проблему векторної оптимізації було поставлено італійським економістом Вілфредо Парето (1848-1923) при дослідженні процесів товарообміну. Не випадково саме в рамках математичної економіки сформулювалося одне з ключових для проблеми багатокритеріального вибору поняття Парето-оптимальності, яке лежить в основі сучасних уявлень про кооперативну економічну ефективність. Зараз основні зусилля вчених концентруються на розробці таких традиційних для теорії оптимізації напрямків, як теореми існування оптимальних розв'язків [176–178], умови оптимальності [179–181], двоїстість в задачах векторної оптимізації [182, 183], стійкість оптимальних розв'язків [184, 185]. Значну частину досліджень присвячено проблемі скаляризації [186–188], що можна пояснити тим, що зведення задачі векторної оптимізації до задачі або родини задач скалярної оптимізації відкриває шлях для використання у векторній оптимізації арсеналу добре розроблених аналітичних і чисельних методів скалярної оптимізації. Відмітимо статтю [189], де автори виклали плідну ідею побудови ітераційних алгоритмів для задач пошуку оптимуму за Парето для гладких вектор-функцій. У роботах [85, 86, 92] вивчались проблеми нелінійного аналізу, що є важливими для розвитку методів дослідження задач векторної оптимізації.

Задачам оптимального керування зосередженими та розподіленими системами з векторними критеріями присвячено роботи [168, 171, 181, 190–195]. У роботах [190–192] досліджувались задачі пошуку рівноваги за Нешем, а

в [193–195] — лінійно-квадратичні задачі Парето-оптимізації. Окремо відмітимо роботу А. Бенсусана, Ж.-Л. Ліонса, Р. Темама [196], яка містить ряд принципових постановок задач та підходів до їх розв'язання.

Мета розділу — розвинути теорію існування та необхідних умов оптимальності для задач оптимального керування з векторним критерієм якості системами, що описуються рівняннями математичної фізики з узагальненими впливами [130, 139]. Увагу приділено побудові і дослідженню збіжності методів розв'язання задач векторної оптимізації лінійних розподілених систем. Досліджено поняття (K, e, ε)-апроксимаційної ефективності. Ґрунтуючись на векторному варіанті класичного варіаційного принципу Екланда, доведено умови (K, e, ε)-апроксимаційної ефективності допустимих керувань у вигляді варіаційних включень. Запропоновано методи розв'язання задач векторної оптимізації лінійних розподілених систем з узагальненим керуванням. Доведено збіжність алгоритмів із похибками в ітераційних підзадачах.

Основний матеріал розділу був раніше опублікований у статтях [197, 198].

6.1 Постановка задач та допоміжні результати

Нехай W_1, W_2, H_1, H_2 і H — п'ять просторів Гільберта над полем $\mathbb{R}$. Позначимо відповідно через $\|\cdot\|_{W_1}$, $\|\cdot\|_{W_2}$, $\|\cdot\|_{H_1}$, $\|\cdot\|_{H_2}$, $\|\cdot\|_H$ норми в W_1, W_2, H_1, H_2 і H, а через $(\cdot,\cdot)_{W_1}$, $(\cdot,\cdot)_{W_2}$, $(\cdot,\cdot)_{H_1}$, $(\cdot,\cdot)_{H_2}$, $(\cdot,\cdot)_H$ — відповідні скалярні добутки. Нехай

- вкладення W_i в H_i, H_i в H неперервні та щільні;
- простір H_i проміжний між W_i та H, $i = \overline{1,2}$ [199].

Ототожнимо простір H зі спряженим до нього простором. Нехай W_1^-, W_2^-, H_1^- і H_2^- — простори, спряжені відповідно до W_1, W_2, H_1 і H_2. Тоді H можна ототожнити з деякими підпросторами в W_1^-, W_2^-, H_1^- і H_2^-. Приходимо до двох ланцюжків гільбертових оснащень

$$W_1 \subseteq H_1 \subseteq H \subseteq H_1^- \subseteq W_1^-, \quad W_2 \subseteq H_2 \subseteq H \subseteq H_2^- \subseteq W_2^-,$$

причому кожен простір щільний в наступному і вкладення неперервні.

Нехай функціонування деякої системи описується відомим нам лінійним та неперервним оператором

$$\mathcal{L} \in L\left(W_1, W_2^-\right)$$

і задані простір керувань — гільбертів простір V, ототожнений зі своїм спряженим, і відображення (нелінійне) $F : V \to W_2^-$.

Через $\mathcal{L}^+$ позначимо H-спряжений до $\mathcal{L}$ оператор, тобто $\mathcal{L}^+ \in L\left(W_2, W_1^-\right)$ і $\langle \mathcal{L}y, p\rangle_{W_2^-, W_2} = \langle y, \mathcal{L}^+ p\rangle_{W_1, W_1^-}$ для $y \in W_1$, $p \in W_2$.

Для кожного керування $u \in V$ стан системи $y = y(u)$ визначається як узагальнений розв'язок операторного рівняння

$$\mathcal{L}y = F(u), \tag{6.1}$$

тобто, $y \in H_1$ — елемент, що задовольняє тотожність

$$\left\langle y, \mathcal{L}^{+}p \right\rangle_{H_1, H_1^-} = \langle F(u), p \rangle_{W_2^-, W_2} \quad \forall\, p \in W_2 : \quad \mathcal{L}^{+}p \in H_1^-.$$

Припустимо, що виконуються апріорні оцінки

$$\|y\|_{H_1} \le c \|\mathcal{L}y\|_{W_2^-} \quad \forall\, y \in W_1, \tag{6.2}$$

$$\|p\|_{H_2} \le c \left\|\mathcal{L}^{+}p\right\|_{W_1^-} \quad \forall\, p \in W_2. \tag{6.3}$$

Має місце наступна теорема [130].

Теорема 6.1. *Якщо справджуються апріорні оцінки (6.2), (6.3), то для довільного* $f \in H_2^-$ *існує єдиний розв'язок* $y \in W_1$ *операторного рівняння*

$$\mathcal{L}y = f, \tag{6.4}$$

а для $f \in W_2^-$ *існує єдиний узагальнений розв'язок* $y \in H_1$ *рівняння (6.4). При цьому лінійне відображення* $f \mapsto y$ *неперервне у відповідних топологіях.*

Зауваження 6.1. Аналогічний факт має місце і для спряженого рівняння $\mathcal{L}^{+}p = g$. Доведення апріорних оцінок вигляду (6.2), (6.3) для багатьох класів диференціальних операторів наведено в [130, 199].

Зауваження 6.2. Справедливі твердження [130, 199]: звичайний (класичний) розв'язок рівняння (6.4) є узагальненим; якщо узагальнений розв'язок $y \in H_1$ рівняння (6.4) належить простору W_1, то він є звичайним розв'язком; якщо $y \in H_1$ — узагальнений розв'язок рівняння (6.4) із правою частиною $f \in R(\mathcal{L})$, то $y \in W_1$ і є звичайним розв'язком.

Згідно теореми 6.1 рівняння (6.1) однозначно визначає стан системи $y(u)$. Крім того, нехай задано спостереження

$$z_i(u) = C_i y(u), \quad i = \overline{1, m},$$

де $C_i \in L(H_1, E_i)$, E_i — деякі гільбертові простори, канонічно ототожнені зі своїми спряженими.

Кожному керуванню $u \in V$ відповідає значення векторного критерію якості

$$J(u) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \| C_1 y(u) - a_1 \|_{E_1}^2 \\ \cdots \\ \frac{1}{2} \| C_m y(u) - a_m \|_{E_m}^2 \end{pmatrix},$$

де $a_i \in E_i$, $i = \overline{1,m}$ — задані елементи.

Припустимо, що у просторі $\mathbb{R}^m$ задано гострий замкнений опуклий конус K з непорожньою внутрішністю, тобто множину, що задовольняє такі умови:

- $-K \bigcap K = \{0\}$ (гострота);
- $\lambda K \subseteq K$ $(\lambda \geq 0)$ (конус);
- $K + K \subseteq K$ (опуклість конуса);
- $\mathrm{cl}K = K$, $\mathrm{int}K \neq \emptyset$.

Позначимо $K^* = \{k^* \in \mathbb{R}^m : (k^*, k)_{\mathbb{R}^m} \geq 0 \ \forall k \in K\}$ — невід'ємний спряжений до K конус, причому $\mathrm{int}K^* \neq \emptyset$ завдяки гостроті конуса K [200].

Нехай у просторі V задано множину допустимих керувань $U \subseteq V$.

Задача полягає у пошуку допустимих керувань $u \in U$ таких, що

$$J(v) \notin J(u) - (K \backslash \{0\}) \quad \forall v \in U. \tag{6.5}$$

Допустимі керування, що задовольняють (6.5), називаємо ефективними або оптимальними за Парето [175], а множину таких керувань позначимо $E_K(U)$. Задачу знаходження елементів $E_K(U)$ будемо позначати

$$J(u) \to K\text{-}\min,$$

$$\mathcal{L}y = F(u), \ u \in U.$$

Крім знаходження елементів множини $E_K(U)$, будемо розглядати класичні задачі пошуку строго та слабко ефективних (оптимальних за Слейтером) допустимих керувань [175], визначених відповідно так:

$$u \in SE_K(U) \Leftrightarrow J(v) \notin J(u) - K \quad \forall v \in U \backslash \{u\}, \tag{6.6}$$

$$u \in WE_K(U) \Leftrightarrow J(v) \notin J(u) - \mathrm{int}K \quad \forall v \in U. \tag{6.7}$$

Задачі знаходження елементів множин $SE_K(U)$ і $WE_K(U)$ будемо відповідно позначати таким чином

$$\begin{cases} J(u) \to K\text{-s-}\min, \\ \mathcal{L}y = F(u), \ u \in U, \end{cases} \qquad \begin{cases} J(u) \to K\text{-w-}\min, \\ \mathcal{L}y = F(u), \ u \in U. \end{cases}$$

Якщо у формулах (6.5)-(6.7) замість множини U поставити перетин $U \cap O(u)$, де $O(u)$ — деякий окіл точки u, то допустиме керування u будемо називати відповідно локально ефективним, локально строго ефективним і локально слабко ефективним. Позначимо відповідні множини $\mathrm{loc}E_K(U)$, $\mathrm{loc}SE_K(U)$ і $\mathrm{loc}WE_K(U)$.

Очевидно, що

$$SE_K(U) \subseteq E_K(U) \subseteq WE_K(U)$$

та

$$\mathrm{loc}SE_K(U) \subseteq \mathrm{loc}E_K(U) \subseteq \mathrm{loc}WE_K(U).$$

Отже, якщо $SE_K(U) \neq \emptyset$, то непорожні й інші з описаних тут ефективних множин, а необхідна умова локальної слабкої ефективності буде необхідною умовою локальної ефективності та локальної строгої ефективності.

Розглянемо питання існування та скінченновимірної апроксимації ефективних керувань.

6.2 Теореми існування та апроксимації

Використавши класичний принцип Вейєрштрасса–Гільберта

компактність + (напів) неперервність = існування,

одержимо такі результати.

Теорема 6.2. *Нехай виконано умови:*

1) $\mathbb{R}^m_+ \cap \mathrm{int}K^* \neq \emptyset$*;*

2) U *— слабко компактна підмножина простору Гільберта* V*;*

3) $F : V \to W_2^-$ *— слабко неперервний оператор (тобто,* $F : V \to W_2^-$ *неперервний як оператор, діючий із простору* V *з слабкою топологією у простір* W_2^- *також з слабкою топологією).*

Тоді множина ефективних керувань $E_K(U)$ *непорожня.*

Доведення. Використаємо класичний у багатокритеріальній оптимізації метод скаляризації за допомогою лінійної згортки [175]. З 1) випливає існування такого вектору $k^* \in \mathbb{R}^m_+ = \{k = (k_1, ..., k_m) \in \mathbb{R}^m : \ k_1 \geq 0, ..., k_m \geq 0\}$, що

$$(k^*, k)_{\mathbb{R}^m} > 0 \quad \forall k \in K \backslash \{0\}.$$

Доведемо існування розв'язків екстремальної задачі

$$(k^*, J(u))_{\mathbb{R}^m} \to \inf_{u \in U}$$

$$\mathcal{L}y = F(u), \quad u \in U.$$

Розглянемо мінімізуючу послідовність (u_p) допустимих керувань, тобто,

$$u_p \in U, \quad \lim_{p \to \infty} (k^*, J(u_p))_{\mathbb{R}^m} = \inf_{u \in U} (k^*, J(u))_{\mathbb{R}^m}.$$

Оскільки U — слабко компактна множина, то можна вважати, що

$$u_p \to u^* \in U \quad \text{слабко в } V.$$

З урахуванням слабкої неперервності оператора $F : V \to H_2^-$ маємо, що

$$F(u_p) \to F(u^*) \quad \text{слабко в } W_2^-,$$

зокрема, послідовність елементів $F(u_p)$ обмежена у просторі W_2^-.

Із теореми 6.1 випливає, що для довільного $p \in \mathbb{N}$ існує єдиний елемент $y_p = y(u_p) \in H_1$ такий, що $\langle y_p, \mathcal{L}^+ p\rangle_{H_1,H_1^-} = \langle F(u_p), p\rangle_{W_2^-,W_2}$ $\forall\, p \in W_2$: $\mathcal{L}^+ p \in H_1^-$, і $\|y_p\|_{H_1} \le c\,\|F(u_p)\|_{W_2^-}$. Послідовність (y_p) обмежена у просторі H_1, а отже, з неї можна виділити підпослідовність (яку знову позначимо (y_p)), слабко збіжну у просторі H_1 до елемента $y^* \in H_1$. Здійснивши у вищенаведеній тотожності граничний перехід при $p \to \infty$, одержимо

$$\left\langle y^*, \mathcal{L}^+ p\right\rangle_{H_1,H_1^-} = \langle F(u^*), p\rangle_{W_2^-,W_2} \quad \forall\, p \in W_2 : \quad \mathcal{L}^+ p \in H_1^-,$$

тобто, $y^* \in H_1$ — узагальнений розв'язок (6.1), що відповідає керуванню $u^* \in U$. З огляду на слабку напівнеперервність знизу функціонала

$$H_1 \ni y \mapsto \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} k_i^*\,\|C_i y - a_i\|^2_{E_i}$$

маємо

$$(k^*, J(u^*))_{\mathbb{R}^m} \le \liminf_{p\to\infty} (k^*, J(u_p))_{\mathbb{R}^m} = \inf_{u\in U} (k^*, J(u))_{\mathbb{R}^m}.$$

Покажемо, що $u^* \in E_K(U)$. Від супротивного. Припустимо, що існує керування $v \in U$ таке, що $J(v) - J(u^*) \in -(K\setminus\{0\})$. Тоді згідно з вибором вектора k^* маємо

$$(k^*, J(v))_{\mathbb{R}^m} < (k^*, J(u^*))_{\mathbb{R}^m}.$$

Отримане протиріччя доводить теорему. □

Аналогічно доводиться

Теорема 6.3. *Нехай виконано умови:*

1) U *— компактна підмножина простору Гільберта* V*;*

2) $F : V \to H_2^-$ *— неперервний оператор.*

Тоді множина ефективних керувань $E_K(U)$ *непорожня.*

Зауваження 6.3. У загальному некомпактному випадку множини допустимих керувань $U \subseteq V$ множина ефективних розв'язків $E_K(U)$ може бути порожньою. Однак, відповідним чином послабивши поняття ефективного

розв'язку, можна одержати деякі змістовні результати про існування розв'язків і в цій ситуації, що буде зроблено нижче.

Природна та широко вживана ідея розв'язування задач нескінченновимірної оптимізації полягає у зведенні їх до скінченновимірних екстремальних задач. Розглянемо апроксимацію задачі (6.5) сингулярного векторного оптимального керування скінченновимірною задачею.

Припустимо, що V — сепарабельний простір Гільберта. Тоді існує послідовність лінійних скінченновимірних підпросторів (V_s) простору V, яка задовольняє умову граничної щільності: $\lim_{s\to\infty} \inf_{u'\in V_s} \|u' - u\|_V = 0$ $(u \in V)$.

Зауваження 6.4. Сепарабельність простору V вимагається заради простоти. У загальному випадку слід просто узяти гранично щільну монотонну сіть скінченновимірних підпросторів.

Нехай U — слабко компактна підмножина простору керувань V. Розглянемо послідовність (U_s) замкнених опуклих підмножин V_s, що рівномірно по s обмежені в нормі простору V та апроксимують множину допустимих керувань U у наступному розумінні [147]:

$$\forall u \in U \ \exists u_s \in U_s : \ u_s \xrightarrow[s\to\infty]{} u \quad \text{сильно в} \quad V, \tag{6.8}$$

$$\forall u \in V, \ u_s \in U_s : \ u_s \xrightarrow[s\to\infty]{} u \quad \text{слабко в} \quad V \quad \Rightarrow \quad u \in U. \tag{6.9}$$

Задачу (6.5), тобто,

$$J(u) \to K\text{-}\min, \tag{6.10}$$

$$\mathcal{L}y = F(u), \ u \in U \tag{6.11}$$

апроксимуємо наступною задачею

$$J(u) \to K\text{-}\min, \tag{6.12}$$

$$\mathcal{L}y = F(u), \ u \in U_s \subseteq V_s \subseteq V. \tag{6.13}$$

Має місце

Твердження 6.1. *Нехай* $\mathbb{R}^m_+ \cap \operatorname{int} K^* \neq \emptyset$ *і відображення* $F : V \to W_2^-$ *слабко неперервне. Тоді для кожного* $s \in \mathbb{N}$ *множина* $E_K(U_s)$ *ефективних розв'язків задачі (6.12), (6.13) непорожня.*

Візьмемо довільний вектор $k^* \in \mathbb{R}^m_+ \cap \operatorname{int} K^* \neq \emptyset$ та розглянемо екстремальні задачі

$$(k^*, J(u))_{\mathbb{R}^m} \to \inf, \tag{6.14}$$

$$\mathcal{L}y = F(u), \ u \in U_s \subseteq V_s \subseteq V \tag{6.15}$$

та

$$(k^*, J(u))_{\mathbb{R}^m} \to \inf, \tag{6.16}$$

$$\mathcal{L}y = F(u), \ \ u \in U. \tag{6.17}$$

Зрозуміло, що (6.14), (6.15) і (6.16), (6.17) мають розв'язки, причому всі вони належать множинам $E_K(U_s)$ і $E_K(U)$ відповідно.

Припустимо, що

$$\text{оператор } F : V \to W_2^- \quad \text{неперервний та слабко неперервний.} \tag{6.18}$$

Нехай $\bar{u} \in U \cap E_K(U)$ — деяке оптимальне керування системою (6.16), (6.17), а $(\bar{u}_s)$: $\bar{u}_s \in U_s \cap E_K(U_s)$ — послідовність розв'язків задач (6.14), (6.15). Тоді за умовою (6.8) існує послідовність $u_s \in U_s$ така, що $\|u_s - \bar{u}\|_V \to 0$ при $s \to \infty$.

Через сильну неперервність оператора $F : V \to W_2^-$ маємо

$$\|F(u_s) - F(\bar{u})\|_{W_2^-} \to 0 \quad \text{при} \quad s \to \infty. \tag{6.19}$$

З (6.19) та нерівності

$$\|y_s - \bar{y}\|_{H_1} \le C \|F(u_s) - F(\bar{u})\|_{W_2^-},$$

де $y_s = y(u_s) \in H_1$, $\bar{y} = y(\bar{u}) \in H_1$ — узагальнені розв'язки рівняння стану системи (6.1), які відповідають керуванням u_s, $\bar{u}$, випливає, що $\|y_s - \bar{y}\|_{H_1} \to 0$ при $s \to \infty$. Оскільки функціонал

$$H_1 \ni y \mapsto \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} k_i^* \|C_i y - a_i\|_{E_i}^2 \tag{6.20}$$

є сильно неперервним, то

$$\limsup_{s\to\infty} (k^*, J(\bar{u}_s))_{\mathbb{R}^m} \le \lim_{s\to\infty} (k^*, J(u_s))_{\mathbb{R}^m} = \\ = (k^*, J(\bar{u}))_{\mathbb{R}^m} = \inf_{u\in U} (k^*, J(u))_{\mathbb{R}^m}. \tag{6.21}$$

Розглянемо послідовність $(\bar{u}_s)$. Множини U_s рівномірно по s обмежені у гільбертовому просторі V. Отже, існує підпослідовність $(\bar{u}_{s_k})$ і елемент $u' \in V$ такі, що $\bar{u}_{s_k} \to u'$ слабко в V.

Із апроксимаційної умови (6.9) випливає, що $u' \in U$. Оператор $F : V \to W_2^-$ — слабко неперервний (умова (6.18)), тому $F(\bar{u}_{s_k}) \to F(u')$ слабко в W_2^-. Послідовність $F(\bar{u}_{s_k})$ обмежена в нормі простору W_2^-. Тому з оцінки

$$\|y(\bar{u}_{s_k})\|_{H_1} \le C \|F(\bar{u}_{s_k})\|_{W_2^-}$$

маємо, що $(y(\bar{u}_{s_k}))$ — обмежена в H_1 послідовність. Виділяємо з послідовності $(y(\bar{u}_{s_k}))$ слабко збіжну підпослідовність $(y(\bar{u}_{s_{k_l}}))$:

$$y(\bar{u}_{s_{k_l}}) \to y' \quad \text{слабко в} \quad H_1.$$

Покажемо, що $y' = y(u')$. Справді, маємо

$$\left\langle y(\bar{u}_{s_{k_l}}), \mathcal{L}^+ p \right\rangle_{H_1, H_1^-} = \left\langle F(\bar{u}_{s_{k_l}}), p \right\rangle_{W_2^-, W_2} \quad \forall p \in W_2 : \quad \mathcal{L}^+ p \in H_1^-, \quad (6.22)$$

Здійснивши граничний перехід в (6.22) при $l \to \infty$, отримаємо

$$\left\langle y', \mathcal{L}^+ p \right\rangle_{H_1, H_1^-} = \langle F(u'), p \rangle_{W_2^-, W_2} \quad \forall p \in W_2 : \quad \mathcal{L}^+ p \in H_1^-.$$

Отже, $y' = y(u') \in H_1$ — узагальнений розв'язок рівняння стану системи (6.1), що відповідає керуванню $u' \in U$. Оскільки цей розв'язок єдиний, то і вся послідовність $(y(\bar{u}_{s_k}))$ слабко в H_1 збігається до $y(u') \in H_1$.

Покажемо, що елемент $u' \in U$ — розв'язок задачі (6.16), (6.17). Із слабкої напівнеперервності знизу функціонала (6.20) та нерівності (6.21) випливає, що

$$(k^*, J(u'))_{\mathbb{R}^m} \le \liminf_{s\to\infty} (k^*, J(\bar{u}_{s_k}))_{\mathbb{R}^m} \le$$
$$\le \limsup_{s\to\infty} (k^*, J(\bar{u}_{s_k}))_{\mathbb{R}^m} \le \inf_{u\in U} (k^*, J(u))_{\mathbb{R}^m}.$$

Отже, $(k^*, J(u'))_{\mathbb{R}^m} = \inf_{u\in U} (k^*, J(u))_{\mathbb{R}^m}$ і $u' \in U$ — розв'язок задачі

$$(k^*, J(u))_{\mathbb{R}^m} \to \inf,$$

$$\mathcal{L}y = F(u), \ \ u \in U.$$

Підсумовуючи, можемо сформулювати теорему.

Теорема 6.4. *Нехай* $\mathbb{R}^m_+ \cap \operatorname{int} K^* \neq \emptyset$, *множина* $U \subseteq V$ *слабко компактна, виконуються умови (6.8), (6.9) та* (6.18). *Тоді для кожного* $k^* \in \mathbb{R}^m_+ \cap \operatorname{int} K^*$ *задача оптимального керування*

$$(k^*, J(u))_{\mathbb{R}^m} \to \inf,$$

$$\mathcal{L}y = F(u), \ \ u \in U_s \subseteq V_s \subseteq V$$

має розв'язок $\bar{u}_s \in U_s \cap E_K(U_s)$ *та усі слабкі граничні точки послідовності* $(\bar{u}_s)$ *належать множині* $E_K(U)$ *розв'язків задачі*

$$J(u) \to K\text{-}\min, \quad \mathcal{L}y = F(u), \ \ u \in U.$$

Перейдемо до дослідження умов ефективності допустимих керувань.

6.3 Умови ефективності

Розглянемо систему, що описується рівнянням

$$\mathcal{L}y = F(u), \quad u \in U$$

з векторним критерієм якості

$$J(u) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \| C_1 y(u) - a_1 \|^2_{E_1} \\ \cdots \\ \frac{1}{2} \| C_m y(u) - a_m \|^2_{E_m} \end{pmatrix}.$$

У теоремах 6.5 і 6.6 дамо відповідь на питання про вигляд та властивості похідної критерію якості.

Теорема 6.5. *Нехай відображення* $F : V \to W_2^-$ *диференційовне у точці* $u \in V$ *за Гато (Фреше) і* $F'(u) \in L\left(V, W_2^-\right)$ *— відповідна похідна. Тоді існує похідна Гато (Фреше)* $J'(u)$ *відображення* $J : V \to \mathbb{R}^m$*, яка визначається формулою*

$$J'(u) = \begin{pmatrix} (F'(u))^* p_1 \\ \cdots \\ (F'(u))^* p_m \end{pmatrix},$$

де $p_i \in W_2$ *— розв'язок операторного рівняння*

$$\mathcal{L}^+ p_i = C_i^* C_i y(u) - C_i^* a_i, \quad i = \overline{1, m}.$$

Доведення. Доведемо диференційовність за Фреше відображення $J : V \to \mathbb{R}^m$. Розглянемо у точці $u \in V$ приріст $J(v) - J(u)$, $v \in V$. Маємо

$$J(v) - J(u) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \| C_1 y(v) - a_1 \|^2_{E_1} - \| C_1 y(u) - a_1 \|^2_{E_1} \\ \cdots \\ \| C_m y(v) - a_m \|^2_{E_m} - \| C_m y(u) - a_m \|^2_{E_m} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \langle y(v) - y(u), C_1^* C_1 y(u) - C_1^* a_1 \rangle_{H_1, H_1^-} \\ \cdots \\ \langle y(v) - y(u), C_m^* C_m y(u) - C_m^* a_m \rangle_{H_1, H_1^-} \end{pmatrix} +$$

$$+ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \| C_1 (y(v) - y(u)) \|^2_{E_1} \\ \cdots \\ \| C_m (y(v) - y(u)) \|^2_{E_m} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} ((F'(u))^* p_1, v - u)_V \\ \cdots \\ ((F'(u))^* p_m, v - u)_V \end{pmatrix} +$$

$$+\begin{pmatrix} \langle F(v)-F(u)-F'(u)(v-u),p_1\rangle_{W_2^-,W_2} \\ \cdots \\ \langle F(v)-F(u)-F'(u)(v-u),p_m\rangle_{W_2^-,W_2} \end{pmatrix}+$$

$$+\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \|C_1(y(v)-y(u))\|^2_{E_1} \\ \cdots \\ \|C_m(y(v)-y(u))\|^2_{E_m} \end{pmatrix}.$$

Провівши очевидні оцінки другого та третього доданків, за допомогою теореми 6.1 одержуємо

$$\begin{pmatrix} \langle F(v)-F(u)-F'(u)(v-u),p_1\rangle_{W_2^-,W_2} \\ \cdots \\ \langle F(v)-F(u)-F'(u)(v-u),p_m\rangle_{W_2^-,W_2} \end{pmatrix}+$$

$$+\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \|C_1(y(v)-y(u))\|^2_{E_1} \\ \cdots \\ \|C_m(y(v)-y(u))\|^2_{E_m} \end{pmatrix}=o(\|v-u\|_V).$$

□

Теорема 6.6. *Справджуються твердження:*

1) якщо у деякій точці $\bar{u}\in V$ відображення $u\mapsto F'(u)$ неперервне, то і відображення $u\mapsto J'(u)$ неперервне в $\bar{u}\in V$;

2) якщо на обмеженій опуклій множині $O\subseteq V$ відображення $u\mapsto F'(u)$ задовольняє умову Гельдера з показником $\gamma\in(0,1]$, то і відображення $u\mapsto J'(u)$ задовольняє на множині O умову Гельдера з показником γ.

Доведення. Доведемо перше твердження. Нехай u — довільна точка з деякого околу точки $\bar{u}\in V$. Розглянемо для всіх $v\in V$

$$\|J'(u)(v)-J'(\bar{u})(v)\|_{\mathbb{R}^m}=$$

$$=\left\|\begin{pmatrix} ((F'(u))^*p_1(u)-(F'(\bar{u}))^*p_1(\bar{u}),v)_V \\ \cdots \\ ((F'(u))^*p_m(u)-(F'(\bar{u}))^*p_m(\bar{u}),v)_V \end{pmatrix}\right\|_{\mathbb{R}^m}\le$$

$$\le\left\|\begin{pmatrix} ((F'(u))^*(p_1(u)-p_1(\bar{u})),v)_V \\ \cdots \\ ((F'(u))^*(p_m(u)-p_m(\bar{u})),v)_V \end{pmatrix}\right\|_{\mathbb{R}^m}+$$

$$+\left\|\begin{pmatrix} (((F'(u))^*-(F'(\bar{u}))^*)p_1(\bar{u}),v)_V \\ \cdots \\ (((F'(u))^*-(F'(\bar{u}))^*)p_m(\bar{u}),v)_V \end{pmatrix}\right\|_{\mathbb{R}^m},$$

де $p_i(u) \in W_2$, $p_i(\bar{u}) \in W_2$ — розв'язки операторних рівнянь

$$\mathcal{L}^+ p_i(u) = C_i^* C_i y(u) - C_i^* a_i, \quad i = \overline{1,m},$$

$$\mathcal{L}^+ p_i(\bar{u}) = C_i^* C_i y(\bar{u}) - C_i^* a_i, \quad i = \overline{1,m}.$$

Звідси маємо оцінку

$$\|J'(u) - J'(\bar{u})\| \leq$$
$$\leq \|F'(u)\| \cdot \sqrt{\|p_1(u) - p_1(\bar{u})\|^2_{W_2} + \ldots + \|p_m(u) - p_m(\bar{u})\|^2_{W_2}} +$$
$$+ \|F'(u) - F'(\bar{u})\| \cdot \sqrt{\|p_1(\bar{u})\|^2_{W_2} + \ldots + \|p_m(\bar{u})\|^2_{W_2}}.$$

Відображення $u \mapsto F'(u)$ неперервне в точці $\bar{u} \in V$, і отже, існує куля $O_{\delta_0}(\bar{u})$, на якій $u \mapsto F'(u)$ обмежене. Маємо,

$$\|J'(u) - J'(\bar{u})\| \leq c_1 \sqrt{\|p_1(u) - p_1(\bar{u})\|^2_{W_2} + \ldots + \|p_m(u) - p_m(\bar{u})\|^2_{W_2}} +$$
$$+ \|F'(u) - F'(\bar{u})\| \cdot \sqrt{\|p_1(\bar{u})\|^2_{W_2} + \ldots + \|p_m(\bar{u})\|^2_{W_2}}.$$

Із теореми 6.1 та неперервності операторів $C_i \in L(H_1, E_i)$ випливає, що

$$\|p_i(u) - p_i(\bar{u})\|_{W_2} \leq c_2 \|C_i^* C_i (y(u) - y(\bar{u}))\|_{H_1^-} \text{ le}$$
$$\leq c_3 \|y(u) - y(\bar{u})\|_{H_1} \leq c_4 \|F(u) - F(\bar{u})\|_{W_2^-}, \quad i = \overline{1,m}.$$

Отже,

$$\|J'(u) - J'(\bar{u})\| \leq c_5 \cdot \|F(u) - F(\bar{u})\|_{W_2^-} +$$
$$+ \|F'(u) - F'(\bar{u})\| \cdot \sqrt{\|p_1(\bar{u})\|^2_{W_2} + \ldots + \|p_m(\bar{u})\|^2_{W_2}}.$$

З умови теореми випливає, що для довільного числа $\varepsilon > 0$ існують такі $\{\delta_1, \delta_2\} \subseteq (0, \delta_0)$, що

$$\|F'(u) - F'(\bar{u})\| < \frac{\varepsilon}{2\sqrt{\|p_1(\bar{u})\|^2_{W_2} + \ldots + \|p_m(\bar{u})\|^2_{W_2}}}, \quad \|F(u) - F(\bar{u})\|_{W_2^-} < \frac{\varepsilon}{2c_5},$$

як тільки $\|u - \bar{u}\|_V < \delta_1$, $\|u - \bar{u}\|_V < \delta_2$ відповідно. Оберемо $0 < \delta < \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Тоді $\|u - \bar{u}\|_V < \delta \Rightarrow \|J'(u) - J'(\bar{u})\| < \varepsilon$.

Доведемо друге твердження. Оскільки відображення $u \mapsto F'(u)$ гельдерове на обмеженій множині O, то воно обмежене на O, а отже, і відображення $u \mapsto F(u)$ обмежене.

Нехай u, v — два довільні елементи множини $O \subseteq V$. Аналогічно попере-

днім міркуванням одержуємо

$$\|J'(u) - J'(v)\| \le c_1 \cdot \|F(u) - F(v)\|_{W_2^-} + \\ + \|F'(u) - F'(v)\| \cdot \sqrt{\|p_1(v)\|^2_{W_2} + \ldots + \|p_m(v)\|^2_{W_2}},$$

де $p_i(u) \in W_2$, $p_i(v) \in W_2$ — розв'язки операторних рівнянь:

$$\mathcal{L}^+ p_i(u) = C_i^* C_i y(u) - C_i^* a_i, \quad i = \overline{1,m},$$

$$\mathcal{L}^+ p_i(v) = C_i^* C_i y(v) - C_i^* a_i, \quad i = \overline{1,m}.$$

Далі,

$$\|J'(u) - J'(v)\| \le c_1 \cdot \|F(u) - F(v)\|_{W_2^-} + \\ + c_2 \|u - v\|_V^\gamma \cdot \sqrt{\|p_1(v)\|^2_{W_2} + \ldots + \|p_m(v)\|^2_{W_2}}.$$

Нехай $\bar{u} \in O$ — деяка фіксована точка. Справджуються оцінки

$$\|p_i(v)\|_{W_2} \le c_3 \|C_i^* C_i y(v) - C_i^* a_i\|_{H_1^-} \le \\ \le c_3 \|C_i^* C_i (y(v) - y(\bar{u}))\|_{H_1^-} + c_3 \|C_i^* C_i y(\bar{u}) - C_i^* a_i\|_{H_1^-} \le \\ \le c_4 \|F(v) - F(\bar{u})\|_{W_2^-} + c_3 \|C_i^* C_i y(\bar{u}) - C_i^* a_i\|_{H_1^-}, \ \ i = \overline{1,m}.$$

За теоремою про скінченні прирости маємо

$$\|F(u) - F(v)\|_{W_2^-} \le \sup_{\theta \in [0,1]} \|F'(v + \theta(u - v))\| \, \|u - v\|_V \le c_5 \|u - v\|_V,$$

$$\|F(v) - F(\bar{u})\|_{H_2^-} \le \sup_{\theta \in [0,1]} \|F'(\bar{u} + \theta(v - \bar{u}))\| \, \|v - \bar{u}\|_V \le c_6 d,$$

де $d = \operatorname{diam}(O) = \sup\limits_{\{u', u''\} \subseteq O} \|u' - u''\|_V$ — діаметр множини $O \subseteq V$.

Одержуємо нерівність

$$\|J'(u) - J'(v)\| \le c_7 \left(\|u - v\|_V + \|u - v\|_V^\gamma \right),$$

звідки

$$\|J'(u) - J'(v)\| \le c_7 \left(\|u - v\|_V^{1-\gamma} + 1 \right) \cdot \|u - v\|_V^\gamma \le \\ \le c_7 \left(d^{1-\gamma} + 1 \right) \cdot \|u - v\|_V^\gamma,$$

що і завершує доведення теореми. □

Далі будемо вважати, що відображення $F : V \to W_2$ диференційовне за Фреше у точках допустимої множини U.

Перейдемо до умов локальної ефективності керувань в задачах (6.5)–(6.7).

Нагадаємо класичну конструкцію конуса дотичних напрямків [201].

Замкнений конус

$$T(u_0|U) = \limsup_{\alpha\to+0} \frac{U-u_0}{\alpha} =$$

$$= \left\{ v \in V:\ \exists\,(\alpha_k > 0, v_k \in U),\ \ \alpha_k \to +0,\ \frac{v_k - u_0}{\alpha_k} \to v \ \ \text{при}\ \ k\to\infty \right\}$$

називається дотичним або контингентним до непорожньої множини U в точці $u_0 \in \mathrm{cl}U$.

Відмітимо, що $T(u_0|U) = \{0\}$ тільки тоді, коли u_0 — ізольована точка множини U. Очевидно, що в цьому випадку точка u_0 — локально ефективна. Отже, будемо завжди припускати, що $T(u_0|U) \neq \{0\}$.

Зауваження 6.5. Існує декілька конструкцій дотичних конусів (див. огляд у [201]). Наведену тут запропоновано у 30-х рр. XX ст. Ж. Буліганом. У теорії оптимізації подібна конструкція вперше з'явилась, можливо, в [202].

Розглянемо задачу пошуку слабко ефективних керувань

$$J(u) \to K\text{—w—}\min,$$

$$\mathcal{L}y = F(u),\ \ u \in U.$$

Має місце

Теорема 6.7. *Нехай* $\bar{u} \in \mathrm{loc}W\!E_K(U)$. *Тоді*

$$\forall\, w \in T(\bar{u}|U)\setminus\{0\}:\ \ \begin{pmatrix} ((F'(\bar{u}))^* p_1, w)_V \\ \cdots \\ ((F'(\bar{u}))^* p_m, w)_V \end{pmatrix} \notin -\mathrm{int}K, \tag{6.23}$$

де $p_i \in W_2$: $\mathcal{L}^+ p_i = C_i^* C_i y(\bar{u}) - C_i^* a_i$, $i = \overline{1,m}$.

Доведення. Нехай $\bar{u} \in \mathrm{loc}W\!E_K(U)$ і $w \in T(\bar{u}|U)\setminus\{0\}$. Тоді за означенням множини $\mathrm{loc}W\!E_K(U)$ та конуса $T(\bar{u}|U)$ маємо

$$J(v) - J(\bar{u}) \notin -\mathrm{int}K \quad \forall\, v \in U \cap O(\bar{u})$$

та

$$J(v_k) - J(\bar{u}) = J(\bar{u} + v_k - \bar{u}) - J(\bar{u}) \notin -\mathrm{int}K \quad \forall\, k \geq k_0.$$

Далі,

$$J'(\bar{u})\left(\frac{v_k - \bar{u}}{\alpha_k}\right) + o(1)\left\|\frac{v_k - \bar{u}}{\alpha_k}\right\|_V \notin -\mathrm{int}K. \tag{6.24}$$

Зробивши в (6.24) граничний перехід при $k \to \infty$ з урахуванням замкненості множини $\mathbb{R}^m \setminus (-\mathrm{int}K)$, одержимо включення

$$J'(\bar{u})(w) \notin -\mathrm{int}K,$$

яке можна записати у вигляді (6.23). □

Якщо ввести конус $SD_J(u) = \{w \in V : J'(u)(w) \in -\mathrm{int}K\}$ напрямків спадання відображення $J : V \to \mathbb{R}^m$ у точці $u \in V$, то включення (6.23) рівносильне співвідношенню

$$SD_J(\bar{u}) \cap T(\bar{u}|U) = \emptyset. \tag{6.25}$$

У випадку опуклості множини допустимих керувань співвідношення (6.23) можна подати у більш простій формі.

Теорема 6.8. *Нехай U — опукла підмножина V і $\bar{u} \in \mathrm{loc}WE_K(U)$. Тоді*

$$\forall\, v \in U : \quad \begin{pmatrix} ((F'(\bar{u}))^* p_1, v - \bar{u})_V \\ \cdots \\ ((F'(\bar{u}))^* p_m, v - \bar{u})_V \end{pmatrix} \notin -\mathrm{int}K, \tag{6.26}$$

де $p_i \in W_2$: $\mathcal{L}^+ p_i = C_i^* C_i y(\bar{u}) - C_i^* a_i$, $i = \overline{1,m}$.

Доведення. Покажемо, що $\forall\, v \in U$ вектор $v - \bar{u}$ належить конусу $T(\bar{u}|U)$. Розглянемо послідовності $\beta_k \in (0,1)$, $\beta_k \to 1$ і $v_k = (1-\beta_k)v + \beta_k \bar{u} \in U$. Звідси

$$\frac{v_k - \bar{u}}{1-\beta_k} = v - \bar{u}.$$

Отже, $v - \bar{u} \in T(\bar{u}|U)$, а тоді (6.23) тягне за собою виконання (6.26). □

Очевидно, що і зворотна імплікація (6.26) $\Rightarrow$ (6.23) справедлива у випадку опуклості множини U.

Отримаємо достатню умову локальної оптимальності для задачі

$$J(u) \to K\text{-s-}\min,$$

$$\mathcal{L}y = F(u), \quad u \in U.$$

Має місце

Теорема 6.9. *Нехай простір V скінченновимірний, $\bar{u} \in U$ і виконано умову:*

$$\forall\, w \in T(\bar{u}|U) \setminus \{0\} : \quad \begin{pmatrix} ((F'(\bar{u}))^* p_1, w)_V \\ \cdots \\ ((F'(\bar{u}))^* p_m, w)_V \end{pmatrix} \notin -K, \tag{6.27}$$

де $p_i \in W_2$: $\mathcal{L}^+ p_i = C_i^* C_i y(\bar{u}) - C_i^* a_i$, $i = \overline{1,m}$. Тоді $\bar{u} \in \mathrm{loc}SE_K(U)$.

Доведення. Припустимо, що має місце умова (6.27), однак $\bar{u} \notin \mathrm{locSE}_K(U)$. Тоді існує послідовність $v_k \in U \backslash \{u\}$ така, що $v_k \to \bar{u}$, $\frac{v_k - \bar{u}}{\|v_k - \bar{u}\|_V} \to w \in T(\bar{u}|U) \setminus \{0\}$ і $J(v_k) - J(\bar{u}) \in -K$. Далі маємо

$$\frac{J(v_k) - J(\bar{u})}{\|v_k - \bar{u}\|_V} = J'(\bar{u}) \left(\frac{v_k - \bar{u}}{\|v_k - \bar{u}\|_V} \right) + o(1) \in -K. \tag{6.28}$$

Зробивши в (6.28) граничний перехід при $k \to \infty$, одержимо $J'(\bar{u})(w) \in -K$, що суперечить (6.27). □

Якщо ввести конус $D_J(u) = \{w \in V : J'(u)(w) \in -K\}$ напрямків нестрогого спадання відображення $J : V \to \mathbb{R}^m$ у точці $u \in V$, то включення (6.27) рівносильне подібному (6.25) співвідношенню

$$D_J(\bar{u}) \cap T(\bar{u}|U) = \{0\}.$$

Розглянемо варіант скаляризації необхідних умов ефективності. Відповідні скалярні умови використаємо для побудови ітераційних алгоритмів розв'язання задач керування з векторним критерієм якості.

Розглянемо компакт $B \subseteq \mathbb{R}^m$ такий, що не містить нуль і $K^* = \mathrm{con}(\mathrm{conv}\, B)$. Якщо $K = K^* = \mathbb{R}^m_+$, то можна покласти $B = \{e_1, e_2, ..., e_m\}$, де

$$e_i = \Big(0, ..., 0, \underbrace{1}_{i\text{-та позиція}}, 0, ..., 0\Big).$$

У загальному випадку покладемо, наприклад,

$$B = K^* \cap \{k \in \mathbb{R}^m : \ \|k\|_{\mathbb{R}^m} = 1\}.$$

Конуси K та $\mathrm{int}K$ можна подати у вигляді

$$K = \{x \in \mathbb{R}^m : \ (x, x')_{\mathbb{R}^m} \geq 0 \ \ \forall x' \in B\},$$

$$\mathrm{int}K = \{x \in \mathbb{R}^m : \ (x, x')_{\mathbb{R}^m} > 0 \ \ \forall x' \in B\}.$$

Розглянемо опорну функцію множини B

$$\sigma_B(x) = \max_{x' \in B} (x, x')_{\mathbb{R}^m} \quad \forall x \in \mathbb{R}^m. \tag{6.29}$$

Безпосередньо з (6.29) випливає додатня однорідність, напівадитивність та ліпшицевість функції σ_B. Із компактності та породжуючої властивості множини B випливають потрібні нам представлення

$$-K = \{x \in \mathbb{R}^m : \ \sigma_B(x) \leq 0\},$$

$$-\mathrm{int}K = \{x \in \mathbb{R}^m : \ \sigma_B(x) < 0\}.$$

Ці представлення конусів $-K$ та $-\mathrm{int}K$ дозволяють нам переформулювати умови ефективності так.

Наслідок 6.1. *Нехай* $\bar{u} \in \mathrm{loc}WE_K(U)$. *Тоді*

$$\forall w \in T(\bar{u}|U) \setminus \{0\}: \quad \sigma_B \circ \left((F'(\bar{u}))^* \overrightarrow{p}\right)(w) \geq 0, \tag{6.30}$$

де $\overrightarrow{p} = (p_1, p_2, ..., p_m) \in (W_2)^m$: $\mathcal{L}^+ p_i = C_i^* C_i y(\bar{u}) - C_i^* a_i$, $i = \overline{1,m}$.

Наслідок 6.2. *Нехай* U — *опукла підмножина* V *і* $\bar{u} \in \mathrm{loc}WE_K(U)$. *Тоді*

$$\forall v \in U: \quad \sigma_B \circ \left((F'(\bar{u}))^* \overrightarrow{p}\right)(v - \bar{u}) \geq 0, \tag{6.31}$$

де $\overrightarrow{p} = (p_1, p_2, ..., p_m) \in (W_2)^m$: $\mathcal{L}^+ p_i = C_i^* C_i y(\bar{u}) - C_i^* a_i$, $i = \overline{1,m}$.

Наслідок 6.3. *Нехай простір* V *скінченновимірний,* $\bar{u} \in U$ *і виконано умову:*

$$\forall w \in T(\bar{u}|U) \setminus \{0\}: \quad \sigma_B \circ \left((F'(\bar{u}))^* \overrightarrow{p}\right)(w) > 0, \tag{6.32}$$

де $\overrightarrow{p} = (p_1, p_2, ..., p_m) \in (W_2)^m$: $\mathcal{L}^+ p_i = C_i^* C_i y(\bar{u}) - C_i^* a_i$, $i = \overline{1,m}$. *Тоді* $\bar{u} \in \mathrm{loc}SE_K(U)$.

Відмітимо, якщо виконано $x - y \in K$ ($x - y \in \mathrm{int}K$), то $\sigma_B(x) \geq \sigma_B(y)$ ($\sigma_B(x) > \sigma_B(y)$). Дійсно, маємо $\sigma_B(y - x) \leq 0$ ($\sigma_B(y - x) < 0$). Але

$$\sigma_B(x) + \sigma_B(y - x) \geq \sigma_B(y),$$

звідки випливає бажане.

Зауваження 6.6. Розглянемо деяку множину X і відображення

$$X \xrightarrow{J} \mathbb{R}^m.$$

Задачу пошуку точок $\bar{x} \in X$ таких, що

$$J(X) \cap (J(\bar{x}) - \mathrm{int}K) = \emptyset,$$

можна переформулювати у вигляді:

$$\text{знайти} \quad \bar{x} \in X: \quad g(\bar{x}, x) \geq 0 \ \ \forall x \in X, \tag{6.33}$$

де $g(x_1, x_2) = \sigma_B(J(x_2) - J(x_1))$. Задача (6.33) суть загальна задача рівноважного програмування. Отже, популярна останнім часом «рівноважна» алгоритміка [203–205] може бути використана для побудови методів розв'язання розглянутих у цьому розділі задач. Відмітимо, що формулювання, подібне до (6.33), було використано в [179] для отримання умов оптимальності другого порядку в абстрактних задачах векторної оптимізації.

6.4 Апроксимаційна ефективність

Розглянемо докладно ослаблення поняття ефективного розв'язку, про яке згадували у зауваженні 6.3.

Оберемо та зафіксуємо довільний елемент $e \in \mathrm{int}K$. Має місце

Твердження 6.2. *Якщо відображення* $g : U \to \mathbb{R}^m$ K*-обмежене знизу (тобто,* $\exists k \in \mathbb{R}^m$*:* $g(U) \subseteq k + K$*), то для довільного* $\varepsilon > 0$ *існує такий елемент* $u_\varepsilon \in U$*, що*

$$\forall\, v \in U:\ g(v) \notin g(u_\varepsilon) - \varepsilon \cdot e - (K \backslash \{0\})\,.$$

Доведення. Візьмемо довільний вектор $k^* \in K^* \backslash \{0\}$. Тоді для всіх $v \in U$ маємо

$$(k^*, g(v))_{\mathbb{R}^m} \geq (k^*, k)_{\mathbb{R}^m}\,.$$

Покладемо $s = \inf_{v \in U} (k^*, g(v))_{\mathbb{R}^m}$. За умовою $s > -\infty$ і $(k^*, e)_{\mathbb{R}^m} > 0$. Очевидно, що для кожного $\varepsilon > 0$ існує елемент $u_\varepsilon \in U$ такий, що

$$s \leq (k^*, g(u_\varepsilon))_{\mathbb{R}^m} < s + \varepsilon\,(k^*, e)_{\mathbb{R}^m} \leq (k^*, g(v))_{\mathbb{R}^m} + \varepsilon\,(k^*, e)_{\mathbb{R}^m} \quad \forall v \in U.$$

Припустимо, що існує $u' \in U$ такий, що $g(u') \in g(u_\varepsilon) - \varepsilon \cdot e - (K \backslash \{0\})$. Тоді

$$(k^*, g(u'))_{\mathbb{R}^m} + \varepsilon \cdot (k^*, e)_{\mathbb{R}^m} \leq (k^*, g(u_\varepsilon))_{\mathbb{R}^m}\,.$$

Отримане протиріччя доводить твердження. □

Зауваження 6.7. Оскільки $\mathrm{int}K \neq \emptyset$, то з обмеженості множини $g(U)$ випливає K-обмеженість знизу відображення $g : U \to \mathbb{R}^m$(див. зауваження 3.4).

Розглянемо задачу керування

$$J(u) \to K\text{-}\min, \tag{6.34}$$

$$\mathcal{L}y = F(u)\,,\ \ u \in U. \tag{6.35}$$

Із зауваження 6.7 випливає, що для K-обмеженості знизу відображення $J(\cdot)$ достатньо обмеженості множини допустимих керувань $U \subseteq V$ та неперервності оператора $F : V \to W_2^-$.

Твердження 6.2 дозволяє природно ввести наступне ослаблення поняття ефективного розв'язку задачі (6.34), (6.35). Нехай $\varepsilon > 0$ і $e \in \mathrm{int}K$.

Означення 6.1. Елемент $u_\varepsilon \in U$ називаємо (K, e, ε)-апроксимаційно ефективним розв'язком задачі (6.34), (6.35), якщо

$$\forall\, v \in U:\ \ J(v) \notin J(u_\varepsilon) - \varepsilon \cdot e - (K \backslash \{0\})\,.$$

Множину усіх (K, e, ε)-апроксимаційно ефективних розв'язків задачі (6.34), (6.35) позначимо символом $E_{(K,e,\varepsilon)}(U)$.

Зауваження 6.8. У скалярному випадку (K, e, ε)-апроксимаційно ефективний розв'язок — це просто ε-оптимальний (субоптимальний) розв'язок. У наведеному вигляді поняття (K, e, ε)-апроксимаційно ефективного розв'язку задачі багатокритеріальної оптимізації вперше запропоновано та систематично застосовувалося для дослідження багатокритеріальних задач розміщення об'єктів та теорії наближення К. Таммер [122, 206].

Введення (K, e, ε)-апроксимаційно ефективних розв'язків виправдане тим, що множини ефективних розв'язків, як правило, порожні у загальному некомпактному випадку, у той час як апроксимаційно ефективні розв'язки існують при досить слабких припущеннях. Крім того ясно, що чисельні методи після виконання скінченного числа ітерацій, як правило, генерують тільки наближені розв'язки.

Раніше для задач із скалярним критерієм якості ми довели умови субоптимальності другого порядку. Для отримання подібних необхідних умов першого порядку (K, e, ε)-апроксимаційної ефективності використаємо аналог класичного варіаційного принципу Екланда для векторнозначних відображень.

Узагальнення принципу Екланда на векторнозначний випадок пропонувалися багатьма авторами, починаючи із середини 80-х рр. XX ст. Першим, можливо, був Лоридан [177], що довів скінченновимірну версію принципу за допомогою скаляризації і класичного принципу Екланда. Пізніше з'явилися різні версії принципу для відображень, діючих у частково впорядковані топологічні векторні простори (див. [207] і бібліографію до цієї роботи), і для багатозначних відображень. У роботі [85] варіаційний принцип отримано як наслідок досить абстрактної теореми про мінімальну точку в добутку просторів, що узагальнює класичний результат Фелпса [90].

Сформулюємо далеко не найзагальніший, але достатній для наших застосувань аналог теореми Екланда для векторнозначних відображень [208]. Нехай E, F — банахові простори, простір F частково упорядковано гострим замкненим опуклим конусом $K \subseteq F$ з непорожньою внутрішністю, $e \in \operatorname{int} K$.

Теорема 6.10. *Нехай виконано умови:*

1) X *— замкнена підмножина банахова простору* E*;*

2) відображення $f : X \to F$ K*-обмежене знизу і* K*-напівнеперервне знизу.*

Тоді для довільних $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ *і точки* $x_0 \in U$

$$f(X) \cap (f(x_0) - \varepsilon \cdot e - (K \setminus \{0\})) = \emptyset$$

існує така точка $x_\varepsilon \in X$*, що:*

1) $f(x_\varepsilon) \in f(x_0) - \varepsilon\delta^{-1}\|x_0 - x_\varepsilon\|_E \cdot e - (K\backslash\{0\})$;

2) $\|x_0 - x_\varepsilon\|_E \le \delta$;

3) $\forall\ x \in X$: $f(x) + \varepsilon\delta^{-1}\|x - x_\varepsilon\|_E\, e \notin f(x_\varepsilon) - (K\backslash\{0\})$, *тобто* $x_\varepsilon \in X$ — *ефективна точка відображення* $x \mapsto f(x) + \varepsilon\delta^{-1}\|x - x_\varepsilon\|_E\, e$ *на* X.

Зауваження 6.9. У теоремі 6.10 використовується K-напівнеперервність знизу у розумінні означень 3.3 і 3.4.

Теорема 6.10 стверджує існування ефективного розв'язку збуреної задачі $f(x) + \frac{\varepsilon}{\delta}\|x - x_\varepsilon\|_E\, e \to K\text{-}\min$, $x \in X$ в δ-околі (K, e, ε)-апроксимаційно ефективного розв'язку вихідної задачі $f(x) \to K\text{-}\min$, $x \in X$, який у свою чергу завжди існує для K-обмеженого знизу відображення $f : X \to F$. Висновок 3 теореми 6.10 є найважливішим та дозволяє одержати необхідні умови для (K, e, ε)-апроксимаційно ефективних розв'язків у вигляді варіаційних нерівностей.

Повернемось до задачі керування (6.34), (6.35). Має місце

Теорема 6.11. *Нехай виконано умови:*

1) U — *замкнена обмежена підмножина простору* V;

2) $F : V \to W_2^-$ — *диференційовний за Фреше оператор.*

Тоді для довільних $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ *існують такі точки* $\bar{u} \in U$, $\tilde{u} \in U$, *що:*

1) $\bar{u} \in E_{(K,e,\varepsilon)}(U)$;

2) $J(\tilde{u}) \in J(\bar{u}) - (K\backslash\{0\})$;

3) $\|\bar{u} - \tilde{u}\|_V \le \delta$;

4) виконується

$$\begin{pmatrix} ((F'(\tilde{u}))^* p_1, w)_V \\ \cdots \\ ((F'(\tilde{u}))^* p_m, w)_V \end{pmatrix} + \frac{\varepsilon}{\delta}\|w\|_V\, e \notin -\mathrm{int}K \quad \forall\, w \in T(\tilde{u}|U)\backslash\{0\},$$

де $p_i \in W_2$ — *розв'язок рівняння* $\mathcal{L}^+ p_i = C_i^* C_i y(\tilde{u}) - C_i^* a_i$, $i = \overline{1, m}$.

Доведення. Завдяки умовам теореми ми можемо використовувати твердження 6.2 і теорему 6.10, тобто, для довільних $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ існують точки $\bar{u} \in U$, $\tilde{u} \in U$ такі, що:

$$\bar{u} \in E_{(K,e,\varepsilon)}(U);\ \ J(\tilde{u}) \in J(\bar{u}) - (K\backslash\{0\});\ \ \|\bar{u} - \tilde{u}\|_V \le \delta;$$

$$\forall\, u \in U:\ \ J(u) - J(\tilde{u}) + \varepsilon\delta^{-1}\|u - \tilde{u}\|_V\, e \notin -(K\backslash\{0\}).$$

Розглянемо довільний вектор $w \in T(\tilde{u}|U)\setminus\{0\}$. Тоді за означенням дотичного конуса $T(\tilde{u}|U)$ маємо $J(v_k) - J(\tilde{u}) + \varepsilon\delta^{-1}\|v_k - \tilde{u}\|_V e \notin -(K\setminus\{0\})$ $\forall k \in \mathbb{N}$. Далі

$$J'(\tilde{u})\left(\frac{v_k-\tilde{u}}{\alpha_k}\right) + o(1)\left\|\frac{v_k-\tilde{u}}{\alpha_k}\right\|_V + \varepsilon\delta^{-1}\left\|\frac{v_k-\tilde{u}}{\alpha_k}\right\|_V e \notin -(K\setminus\{0\}). \quad (6.36)$$

Зробивши в (6.36) граничний перехід при $k \to \infty$ з урахуванням замкненості множини $\mathbb{R}^m\setminus(-\mathrm{int}K) \supseteq \mathbb{R}^m\setminus(-K\setminus\{0\})$, одержимо $J'(\bar{u})(w) + \varepsilon\delta^{-1}\|w\|_V e \notin -\mathrm{int}K$. Тобто, справджується співвідношення 4. □

Якщо множина допустимих керувань U є замкненою опуклою підмножиною простору V, то умови (K, e, ε)-апроксимаційної ефективності приймають більш простий вигляд. Для однокритеріальних задач сингулярного оптимального керування аналогічний результат наведено у теоремі 5.15.

Теорема 6.12. *Нехай виконано умови теореми 6.11 і додатково*

$$U \text{ — замкнена опукла підмножина простору } V.$$

Тоді для довільних $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ існують такі точки $\bar{u} \in U$, $\tilde{u} \in U$, що:

1) $\bar{u} \in E_{(K,e,\varepsilon)}(U)$;

2) $J(\tilde{u}) \in J(\bar{u}) - (K\setminus\{0\})$;

3) $\|\bar{u} - \tilde{u}\|_V \le \delta$;

4) виконується

$$\begin{pmatrix} ((F'(\tilde{u}))^* p_1, v-\tilde{u})_V \\ \cdots \\ ((F'(\tilde{u}))^* p_m, v-\tilde{u})_V \end{pmatrix} + \frac{\varepsilon}{\delta}\|v-\tilde{u}\|_V e \notin -\mathrm{int}K \quad \forall v \in U,$$

де $p_i \in W_2$ — розв'язок рівняння $\mathcal{L}^+ p_i = C_i^* C_i y(\tilde{u}) - C_i^* a_i$, $i = \overline{1,m}$.

Зауваження 6.10. Якщо у теоремах 6.11, 6.12 покласти $\varepsilon = 0$, то одержимо співвідношення теорем 6.7 і 6.8. Отримані у теоремі 6.12 умови (K, e, ε)-апроксимаційної ефективності можна використати при розробці і дослідженні чисельних методів оптимального керування.

6.5 Збіжність моделей алгоритмів узагальненої оптимізації лінійних систем з векторним критерієм якості

Розглянемо трохи загальнішу задачу. Нехай рівняння стану керованої системи має вигляд $\mathcal{L}y = F(u)$, $u \in U$. Оператори $\mathcal{L}$ і F задовольняють стандар-

тні умови. Припустимо, що критерій якості має вигляд $J(u) = \Phi(y(u), u)$, де $\Phi : H_1 \times V \to \mathbb{R}^m$, $y(u)$ — стан системи, що відповідає керуванню $u \in U$.

Далі запропоновано та досліджено три методи градієнтного типу для розв'язання задачі

$$J(u) = \Phi(y(u), u) \to K\text{-}\min, \tag{6.37}$$

$$\mathcal{L}y(u) = F(u), \quad u \in U. \tag{6.38}$$

Мають місце такі теореми — аналоги теорем 6.5 і 6.6. Доведення опустимо.

Теорема 6.13. *Нехай*

1) оператор $F : V \to W_2^-$ *має в точці* $u \in V$ *похідну Фреше* $F'(u) \in L\left(V, W_2^-\right)$*;*

2) оператор $\Phi = \left(\Phi^{(1)}, ..., \Phi^{(m)}\right) : H_1 \times V \to \mathbb{R}^m$ *має в точці* $(y(u), u) \in H_1 \times V$ *похідну Фреше і відповідні частинні похідні мають вигляд*

$$\Phi_1'(y(u), u) = \left(D_1\Phi^{(1)}(y(u), u), ..., D_1\Phi^{(m)}(y(u), u)\right) \in \left(H_1^-\right)^m,$$

$$\Phi_2'(y(u), u) = \left(D_2\Phi^{(1)}(y(u), u), ..., D_2\Phi^{(m)}(y(u), u)\right) \in V^m.$$

Тоді відображення $J = \left(J^{(1)}, ..., J^{(m)}\right) : V \to \mathbb{R}^m$ *диференційовне за Фреше в точці* $u \in V$ *і його похідна обчислюється за формулою*

$$J'(u)(h) = \begin{pmatrix} \left(DJ^{(1)}(u), h\right)_V \\ \cdots \\ \left(DJ^{(m)}(u), h\right)_V \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \left((F'(u))^* p_1 + D_2\Phi^{(1)}(y(u), u), h\right)_V \\ \cdots \\ \left((F'(u))^* p_m + D_2\Phi^{(m)}(y(u), u), h\right)_V \end{pmatrix} \quad \forall h \in V,$$

де $p_i \in W_2$ *— розв'язок операторного рівняння* $\mathcal{L}^+ p_i = D_1\Phi^{(i)}(y(u), u)$, $i = \overline{1, m}$.

Теорема 6.14. *Нехай на обмеженій опуклій множині* $U \subseteq V$ *оператор* $u \mapsto F'(u)$ *задовольняє умову Гельдера з показником* $\gamma \in (0, 1]$*, оператори* $(y, u) \mapsto \Phi_1'(y, u)$ *і* $(y, u) \mapsto \Phi_2'(y, u)$ *задовольняють на обмежених підмножинах простору* $H_1 \times V$ *умову Гельдера з показником* $\gamma \in (0, 1]$*. Тоді похідна Фреше* $J'(\cdot)$ *задовольняє на* U *умову Гельдера з показником* γ*.*

Далі будемо вважати, що множина допустимих керувань U опукла, компактна і на ній виконуються умови теорем 6.13, 6.14.

Позначимо через U^* множину керувань $u \in U$ таких, що

$$\begin{pmatrix} \left((F'(u))^* p_1 + D_2\Phi^{(1)}(y,u), v-u\right)_V \\ \cdots \\ \left((F'(u))^* p_m + D_2\Phi^{(m)}(y,u), v-u\right)_V \end{pmatrix} \notin -\mathrm{int}K \quad \forall v \in U, \tag{6.39}$$

$$\mathcal{L}y = F(u), \ \ \mathcal{L}^+ p_i = D_1\Phi^{(i)}(y,u), \ \ i = \overline{1,m}.$$

Тобто, U^* — множина допустимих керувань, що задовольняють необхідну умову ефективності в задачі (6.37), (6.38). Саме збіжність алгоритмів до елементів множини U^* — мета подальших теоретичних досліджень.

6.5.1 Аналог методу лінеаризації

Для побудови алгоритмів використаємо опорну функцію σ_B компактної множини $B \subseteq \mathbb{R}^m \backslash \{0\}$ такої, що $K^* = \mathrm{con}(\mathrm{conv}\, B)$. Для спрощення оцінок ми припустимо, що обрана множина B має вигляд $\{k \in K^* : \|k\|_{\mathbb{R}^m} = 1\}$. Тоді опорна функція σ_B буде ліпшицевою з константою 1. За допомогою цієї функції необхідну умову ефективності (6.39) можна записати у вигляді нерівності

$$\sigma_B \begin{pmatrix} \left((F'(u))^* p_1 + D_2\Phi^{(1)}(y,u), v-u\right)_V \\ \cdots \\ \left((F'(u))^* p_m + D_2\Phi^{(m)}(y,u), v-u\right)_V \end{pmatrix} \geq 0 \quad \forall v \in U, \tag{6.40}$$

$$\mathcal{L}y = F(u), \ \ \mathcal{L}^+ p_i = D_1\Phi^{(i)}(y,u), \ \ i = \overline{1,m}.$$

Застосувавши до (6.40) евристичні міркування, що у однокритеріальному випадку привели до методу умовного градієнта, та зробивши стандартні припущення про наближений характер обчислень, отримуємо таку ітераційну процедуру.

Алгоритм 6.1. Метод лінеаризації.

1. Обираємо початкове наближення $u_0 \in U$. Покладемо $n = 0$.
2. Знаходимо $\tilde{y}_n \in H_1$: $\|\tilde{y}_n - y_n\|_{H_1} \leq \delta'_n$, де $y_n \in H_1$ — узагальнений розв'язок рівняння $\mathcal{L}y_n = F(u_n)$.
3. Знаходимо $\overrightarrow{\tilde{p}_n} = \left(\tilde{p}_n^1, \tilde{p}_n^2, ..., \tilde{p}_n^m\right) \in (W_2)^m$: $\left\|\tilde{p}_n^k - \hat{p}_n^k\right\|_{W_+} \leq \delta''_n$, $k = \overline{1,m}$, де $\hat{p}_n^k \in W_2$ — розв'язки рівнянь

$$\mathcal{L}^+ \hat{p}_n^1 = D_1\Phi^{(1)}(\tilde{y}_n, u_n),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$\mathcal{L}^+ \hat{p}_n^m = D_1\Phi^{(m)}(\tilde{y}_n, u_n).$$

4. Знаходимо $\bar{u}_n \in U$ — розв'язок екстремальної задачі

$$\sigma_B \circ \left((F'(u_n))^* \overrightarrow{\tilde{p}_n} + \Phi_2'(\tilde{y}_n, u_n) \right)(u - u_n) \to \varepsilon_n - \inf_{u \in U}.$$

5. Покладаємо $u_{n+1} = u_n + \rho_n(\bar{u}_n - u_n)$, де $\rho_n \in (0,1]$, $n := n+1$, і переходимо на крок 2.

Зауваження 6.11. Ідею побудови алгоритмів типу розглянутого було вперше висунуто у роботі [189]. У цитованій статті розглядалась задача

$$f(x) \to \mathbb{R}^m_+\text{-}\min, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{6.41}$$

де $f = (f_1, ..., f_m) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ — диференційовне відображення з похідною f', що задовольняє умову Ліпшиця. Для розв'язання (6.41) автори запропонували метод вигляду

$$x_{n+1} = x_n + \rho_n(\bar{x}_n - x_n),$$

$$\bar{x}_n = \arg\min \left\{ \max_{k \in \{1,...,m\}} (\operatorname{grad} f_k(x_n), x - x_n) + \tfrac{1}{2}\|x - x_n\|^2_{\mathbb{R}^n} \right\},$$

де величина кроку ρ_n обирається за правилом Арміхо [153]. У алгоритмі з [189] множина B має вигляд $\{(1,0,...,0),(0,1,...,0),...,(0,0,...,1)\}$.

Має місце така теорема про збіжність алгоритму 6.1.

Теорема 6.15. *Нехай* $\rho_n \in (0,1]$, $\rho_n \to 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} \rho_n = +\infty$, $\varepsilon_n \to +0$, $\delta_n' \to +0$, $\delta_n'' \to +0$ *і функціонал* $\sigma_B \circ J$ *приймає на множині* U^* *не більш ніж зліченну кількість значень. Тоді всі граничні точки послідовності* (u_n) *утворюють компактну зв'язну підмножину в* U^*, *а числова послідовність* $(\sigma_B(J(u_n)))$ *має границю.*

Доведення. Перевіримо виконання умов теореми про достатні умови збіжності ітераційних алгоритмів оптимізації. Покладемо $W = \sigma_B \circ J$. За побудовою всі члени послідовності (u_n) належать компакту U.

Маємо $\|u_{n+1} - u_n\|_V = \rho_n \|\bar{u}_n - u_n\|_V \le \rho_n \operatorname{diam}(U) \to 0$ при $k \to \infty$.

Нехай (u_{n_k}) — підпослідовність, що збігається до керування $u' \notin U^*$. Покажемо, що існує $\delta_0 > 0$ таке, що для всіх k та $\delta \in (0, \delta_0]$ $\tau_k = \min\limits_{n > n_k} \{n : \|u_n - u_{n_k}\|_V > \delta\} < +\infty$.

Припустимо протилежне. Нехай для всіх $\delta_0 > 0$ існує таке $k_0 = k_0(\delta_0) \in \mathbb{N}$, що $\|u_n - u_{n_{k_0}}\|_V \le \delta_0$ для всіх $n > n_{k_0}$. Тоді з нерівності трикутника маємо: $u_n \in B_{\delta_0}(u_{n_{k_0}}) \Rightarrow u_{n_k} \in B_{\delta_0}(u_{n_{k_0}})$ для $k > k_0 \Rightarrow u' \in B_{\delta_0}(u_{n_{k_0}}) \Rightarrow u_n \in B_{2\delta_0}(u')$ для всіх $n > n_{k_0}$.

Оскільки $u' \notin U^*$, то існує число $\lambda > 0$ таке, що

$$\min_{u \in U} \sigma_B(J'(u')(u - u')) \le -2\lambda < 0.$$

Розглянемо приріст $W(u_{n+1}) - W(u_n)$ для $l > n_k > n_{k_0}$

$$W(u_l) - W(u_{n_k}) = \sigma_B(J(u_l)) - \sigma_B(J(u_{n_k})) \le \sigma_B(J(u_l) - J(u_{n_k})) =$$
$$= \sigma_B(J(u_l) - J(u') - J(u_{n_k}) + J(u')) \le$$
$$\le \sigma_B \begin{pmatrix} \left(DJ^{(1)}(u'), u_l - u_{n_k}\right)_V \\ \cdots \\ \left(DJ^{(m)}(u'), u_l - u_{n_k}\right)_V \end{pmatrix} + C_0\delta_0^{1+\gamma} \le$$
$$\le \sum_{n=n_k}^{l-1} \rho_n \sigma_B(J'(u')(\bar{u}_n - u_n)) + C_0\delta_0^{1+\gamma}.$$

Оцінимо зверху $\sigma_B(J'(u')(\bar{u}_n - u_n))$. Позначимо через $\bar{u}' \in U$ розв'язок задачі мінімізації $\sigma_B(J'(u')(u - u')) \to \inf_{u\in U}$. Маємо

$$\sigma_B(J'(u')(\bar{u}_n - u_n)) \le$$
$$\le \sigma_B\left(\left(J'(u') - \widetilde{J'(u_n)}\right)(\bar{u}_n - u_n)\right) + \sigma_B\left(\widetilde{J'(u_n)}(\bar{u}_n - u_n)\right) \le$$
$$\le \sigma_B\left(\left(J'(u') - \widetilde{J'(u_n)}\right)(\bar{u}_n - u_n)\right) + \sigma_B\left(\widetilde{J'(u_n)}(\bar{u}' - u_n)\right) + \varepsilon_n,$$

де $\widetilde{J'(u_n)} = (F'(u_n))^* \overrightarrow{\tilde{p}_n} + \Phi_2'(\tilde{y}_n, u_n)$. Але

$$\sigma_B\left(\widetilde{J'(u_n)}(\bar{u}' - u_n)\right) \le \sigma_B\left(\left(\widetilde{J'(u_n)} - J'(u')\right)(\bar{u}' - u_n)\right) +$$
$$+ \sigma_B(J'(u')(\bar{u}' - u')) + \sigma_B(J'(u')(u' - u_n)) \le$$
$$\le -2\lambda + \sigma_B\left(\left(\widetilde{J'(u_n)} - J'(u')\right)(\bar{u}' - u_n)\right) + \sigma_B(J'(u')(u' - u_n)).$$

Отже,

$$\sigma_B(J'(u')(\bar{u}_n - u_n)) \le -2\lambda + \sigma_B\left(\left(J'(u') - \widetilde{J'(u_n)}\right)(\bar{u}_n - u_n)\right) +$$
$$+ \sigma_B\left(\left(\widetilde{J'(u_n)} - J'(u')\right)(\bar{u}' - u_n)\right) + \sigma_B(J'(u')(u' - u_n)) + \varepsilon_n.$$

Нарешті отримаємо нерівність

$$\sigma_B(J'(u')(\bar{u}_n - u_n)) \le$$
$$\le -2\lambda + 2\operatorname{diam}(U)\left\|\widetilde{J'(u_n)} - J'(u')\right\| + 2\|J'(u')\|\delta_0 + \varepsilon_n.$$

Оцінимо $\left\|\widetilde{J'(u_u)} - J'(u')\right\|$. Маємо

$$\left\|\widetilde{J'(u_n)} - J'(u')\right\| \le \left\|\widetilde{J'(u_n)} - J'(u_n)\right\| + \|J'(u_n) - J'(u')\| \le$$

$$\leq \left\| \widetilde{J'(u_n)} - J'(u_n) \right\| + C_1 \|u_n - u'\|_V^\gamma .$$

Далі,

$$\begin{aligned}
&\left\| \widetilde{J'(u_n)} - J'(u_n) \right\| \leq \\
&\quad \leq \left\| (F'(u_n))^* \overrightarrow{\tilde{p}_n} + \Phi_2'(\tilde{y}_n, u_n) - (F'(u_n))^* \overrightarrow{p_n} - \Phi_2'(y_n, u_n) \right\| \leq \\
&\quad \leq \|F'(u_n)\| \left\| \overrightarrow{\tilde{p}_n} - \overrightarrow{p_n} \right\|_{(W_2)^m} + \|\Phi_2'(\tilde{y}_n, u_n) - \Phi_2'(y_n, u_n)\|_{V^m} \leq \\
&\qquad \leq C_1 \left\| \overrightarrow{\tilde{p}_n} - \overrightarrow{\hat{p}_n} \right\|_{(W_2)^m} + C_1 \left\| \overrightarrow{\hat{p}_n} - \overrightarrow{p_n} \right\|_{(W_2)^m} + \\
&\qquad\quad + C_2 \|\tilde{y}_n - y_n\|_{H_1}^\gamma \leq C_3 \delta_n'' + C_4 (\delta_n')^\gamma + \\
&\qquad\quad + C_5 \|\Phi_1'(\tilde{y}_n, u_n) - \Phi_1'(y_n, u_n)\|_{(H_1^-)^m} \leq C_3 \delta_n'' + C_6 (\delta_n')^\gamma ,
\end{aligned}$$

де $\overrightarrow{p_n} = (p_n^1, ..., p_n^m) \in (W_2)^m$ — вектор розв'язків спряжених задач

$$\mathcal{L}^+ p_n^i = D_1 \Phi^{(i)}(y_n, u_n), \quad i = \overline{1, m}.$$

Отже,

$$\begin{aligned}
&\sigma_B (J'(u')(\bar{u}_n - u_n)) \leq \\
&\qquad \leq -2\lambda + 2\mathrm{diam}(U) \left(C_3 \delta_n'' + C_6 (\delta_n')^\gamma \right) + 2 \|J'(u')\|_V \delta_0 + \varepsilon_n .
\end{aligned}$$

Обираючи достатньо мале $\delta_0 > 0$ та велике k_0, отримуємо $(n > n_{k_0})$

$$0 < 2\mathrm{diam}(U) \left(C_3 \delta_n'' + C_6 (\delta_n')^\gamma \right) + 2 \|J'(u')\|_V \delta_0 + \varepsilon_n < \lambda .$$

Звідки

$$\sigma_B (J'(u')(\bar{u}_n - u_n)) \leq -\lambda, \quad n > n_{k_0} .$$

Остаточно маємо

$$W(u_l) - W(u_{n_k}) \leq -\lambda \sum_{n=n_k}^{l-1} \rho_n + C_0 \delta_0^{1+\gamma}, \ \ l > n_k \geq n_{k_0} . \tag{6.42}$$

Після граничного переходу в нерівності при $m \to \infty$ $(\sum_{n=n_k}^{\infty} \rho_n = +\infty)$ отримаємо протиріччя з обмеженістю знизу на множині U функціонала W.

Отже, існує $\delta_0 > 0$ таке, що для всіх k і $\delta \in (0, \delta_0]$:

$$\tau_k = \min_{n > n_k} \{ n : \|u_n - u_{n_k}\|_V > \delta \} < +\infty .$$

Але обираючи достатньо мале $\delta_0 > 0$ та велике k_0, можна повторити доведе-

ння оцінки (6.42) для $n_k \le n \le \tau_k$. З іншого боку,

$$\delta_0 < \|u_{\tau_k} - u_{n_k}\|_V \le \sum_{p=n_k}^{\tau_k-1} \|u_{p+1} - u_p\|_V \le \operatorname{diam}(U) \sum_{p=n_k}^{\tau_k-1} \rho_p.$$

Тому

$$\sum_{p=n_k}^{\tau_k-1} \rho_p > \frac{\delta_0}{\operatorname{diam}(U)}.$$

Ураховуючи останню нерівність в (6.42), маємо

$$W(u_{\tau_k}) < W(u_{n_k}) - \frac{\lambda\delta_0}{\operatorname{diam}(U)} + C\delta_0^{1+\gamma}.$$

Звідки $\limsup_{k\to\infty} W(u_{\tau_k}) < \lim\limits_{k\to\infty} W(u_{n_k})$. Отже, умови теореми про збіжність виконуються, а тому, граничні точки послідовності (u_n) утворюють компактну зв'язну підмножину U^* і послідовність чисел $\sigma_B(J(u_n))$ має границю. □

Зауваження 6.12. Ясно, що очевидними модифікаціями з алгоритму 6.1 можна отримати метод розв'язання багатокритеріальних задач з передопуклими множинами допустимих керувань.

6.5.2 Метод з довірчою областю

Розглянемо задачу (6.37), (6.38). Зафіксуємо дві числові послідовності (α_n) і (β_n) такі, що $0 < \alpha_n \le \beta_n$ $(n \in \mathbb{N})$, та послідовність замкнених опуклих множин $M_n \subseteq V$ простої структури таку, що

$$\{v \in V : \|v\|_V \le \alpha_n\} \subseteq M_n \subseteq \{v \in V : \|v\|_V \le \beta_n\}.$$

Для розв'язання задачі (6.37), (6.38) пропонуємо наступний метод.

Алгоритм 6.2. Метод з довірчою областю.

1. Обираємо початкове наближення $u_0 \in U$. Покладемо $n = 0$.
2. Знаходимо $y_n \in H_1$ — узагальнений розв'язок рівняння $\mathcal{L}y_n = F(u_n)$.
3. Знаходимо спряжені стани $\overrightarrow{p_n} = \left(p_n^1, p_n^2, ..., p_n^m\right) \in (W_2)^m$

$$\mathcal{L}^+ p_n^1 = D_1\Phi^{(1)}(y_n, u_n),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$\mathcal{L}^+ p_n^m = D_1\Phi^{(m)}(y_n, u_n).$$

4. Знаходимо $\bar{u}_n \in U$ — розв'язок екстремальної задачі

$$\sigma_B \circ \left((F'(u_n))^* \overrightarrow{p_n} + \Phi_2'(y_n, u_n) \right)(u - u_n) \to \varepsilon_n - \inf_{u \in U \bigcap (u_n + M_n)}.$$

5. Покладаємо $u_{n+1} = \bar{u}_n$, $n := n + 1$ і переходимо на крок 2.

Зауваження 6.13. Відмітимо, що у розглянутих методах не використовується операція лінійного скалярного згортування векторного критерію. Тобто, ми не робимо жодних апріорних припущень про відносну важливість частинних критеріїв.

Відносно послідовності (u_n), породженої алгоритмом 6.2, справджується такий факт.

Теорема 6.16. *Нехай*

$$\varepsilon_n > 0,\ k \cdot \alpha_n \geq \beta_n \geq \alpha_n > 0,\ \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = +\infty,\ \frac{\beta_n^{1+\gamma}}{\alpha_n} \to 0,\ \frac{\varepsilon_n}{\alpha_n} \to 0$$

і множина $(\sigma_B \circ J)(U^*)$ *ніде не щільна. Тоді всі граничні точки послідовності* (u_n) *утворюють компактну зв'язну підмножину в* U^**, а числова послідовність* $((\sigma_B \circ J)(u_n))$ *має границю.*

Доведення. Використаємо загальну теорему про збіжність алгоритмів. За побудовою всі члени послідовності (u_n) належать компакту U. Далі

$$\|u_{n+1} - u_n\|_V = \|\bar{u}_n - u_n\|_V \leq \beta_n \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Нехай (u_{n_k}) — підпослідовність, що збігається до керування $u' \notin U^*$. Покажемо, що існує таке $\delta_0 > 0$, що для всіх k та $\delta \in (0, \delta_0]$ $\tau_k = \min\limits_{n > n_k} \{n : \|u_n - u_{n_k}\|_V > \delta\} < +\infty$. Від супротивного. Нехай для всіх $\delta_0 > 0$ існує $k_0 = k_0(\delta_0)$ таке, що $\|u_n - u_{n_{k_0}}\|_V \leq \delta_0$ для всіх $n > n_{k_0}$. Тоді з нерівності трикутника випливає $u_n \in B_{2\delta_0}(u')$ для всіх $n > n_{k_0}$.

Оцінимо приріст $\sigma_B(J(u_{n+1})) - \sigma_B(J(u_n))$. Маємо

$$\begin{aligned}
&\sigma_B(J(u_{n+1})) - \sigma_B(J(u_n)) \leq \\
&\qquad \leq \sigma_B(J'(u_n)(u_{n+1} - u_n)) + \frac{C_1}{\gamma + 1} \|u_{n+1} - u_n\|_V^{\gamma+1} \leq \\
&\qquad \leq \min_{u \in U \bigcap (u_n + M_n)} \sigma_B(J'(u_n)(u - u_n)) + \varepsilon_n + \frac{C_1}{\gamma + 1} \beta_n^{\gamma+1}. \quad (6.43)
\end{aligned}$$

Оскільки $u' \notin U^*$, то існує число $\lambda > 0$ таке, що

$$\min_{u \in U} \sigma_B(J'(u')(u - u')) \leq -2\lambda < 0.$$

Із неперервності функціонала $\xi \mapsto \min_{u\in U} \sigma_B\left(J'\left(\xi\right)\left(u-\xi\right)\right)$ випливає існування $\delta > 0$ такого, що для довільної точки $u'' \in O_\delta\left(u'\right) \cap U$ виконується нерівність

$$\min_{u\in U} \sigma_B\left(J'\left(u''\right)\left(u-u''\right)\right) \leq -\lambda < 0.$$

Візьмемо $2\delta_0 < \delta$, тоді $u_n \in B_{2\delta_0}\left(u'\right) \subseteq O_\delta\left(u'\right)$. Позначимо через $\bar{\bar{u}}_n \in U$ розв'язок задачі мінімізації

$$\sigma_B\left(J'\left(u_n\right)\left(u-u_n\right)\right) \to \inf_{u\in U}.$$

Нехай $\bar{\bar{u}}_n \in u_n + M_n$. Тоді з (6.43) випливає нерівність

$$\sigma_B\left(J\left(u_{n+1}\right)\right) - \sigma_B\left(J\left(u_n\right)\right) \leq -\lambda + \varepsilon_n + \frac{C_1}{\gamma+1}\beta_n^{\gamma+1}.$$

Існує $n' > n_{k_0}$ таке, що для всіх $n \geq n'$:

$$\sigma_B\left(J\left(u_{n+1}\right)\right) - \sigma_B\left(J\left(u_n\right)\right) \leq -\frac{\lambda}{2}.$$

Якщо $\bar{\bar{u}}_n \notin u_n + M_n$, то

$$\begin{aligned}\sigma_B\left(J\left(u_{n+1}\right)\right) - \sigma_B\left(J\left(u_n\right)\right) \leq \\ \leq \sigma_B\left(J'\left(u_n\right)\left(\phi_n - u_n\right)\right) + \varepsilon_n + \frac{C_1}{\gamma+1}\beta_n^{\gamma+1} \leq \\ \leq \eta_n \sigma_B\left(J'\left(u_n\right)\left(\bar{\bar{u}}_n - u_n\right)\right) + \varepsilon_n + \frac{C_1}{\gamma+1}\beta_n^{\gamma+1},\end{aligned}$$

де $\eta_n = \max\{\eta > 0 :\ \eta\left(\bar{\bar{u}}_n - u_n\right) \in M_n\}$, $\phi_n = u_n + \eta_n\left(\bar{\bar{u}}_n - u_n\right)$. У цьому випадку приріст оцінюється так:

$$\sigma_B\left(J\left(u_{n+1}\right)\right) - \sigma_B\left(J\left(u_n\right)\right) \leq -\eta_n\lambda + \varepsilon_n + \frac{C_1}{\gamma+1}\beta_n^{\gamma+1}.$$

Оскільки $1 > \mu_n \geq \frac{\alpha_n}{\|\bar{\bar{u}}_n - u_n\|_V}$, то

$$\begin{aligned}\sigma_B\left(J\left(u_{n+1}\right)\right) - \sigma_B\left(J\left(u_n\right)\right) \leq -\frac{\lambda\alpha_n}{\|\bar{\bar{u}}_n - u_n\|_V} + \varepsilon_n + \frac{C_1}{\gamma+1}\beta_n^{\gamma+1} \leq \\ \leq -\frac{\lambda}{\operatorname{diam}(U)}\alpha_n + \varepsilon_n + \frac{C_1}{\gamma+1}\beta_n^{\gamma+1} = \\ = -\frac{\lambda}{\operatorname{diam}(U)}\alpha_n\left(1 - \frac{\operatorname{diam}(U)}{\lambda}\left(\frac{\varepsilon_n}{\alpha_n} + \frac{C_1}{\gamma+1}\frac{\beta_n^{\gamma+1}}{\alpha_n}\right)\right),\end{aligned}$$

звідки випливає існування $n'' > n_{k_0}$ такого, що для всіх $n \geq n''$

$$\sigma_B(J(u_{n+1})) - \sigma_B(J(u_n)) \leq -\frac{\lambda}{2 \cdot \operatorname{diam}(U)} \alpha_n \leq -\frac{\lambda}{2 \cdot k \cdot \operatorname{diam}(U)} \beta_n.$$

Існує $n''' \in \mathbb{N}$ таке, що $\beta_n < \lambda/2$ для всіх $n \geq n'''$. Отже,

$$\sigma_B(J(u_{n+1})) - \sigma_B(J(u_n)) \leq -\min\left\{1, \frac{\lambda}{2 \cdot k \cdot \operatorname{diam}(U)}\right\} \beta_n,$$

для $n > \tilde{n} = \max\{n', n'', n'''\} > n_{k_0}$.

Остаточно маємо

$$\sigma_B(J(u_n)) - \sigma_B(J(u_{n_k})) \leq$$
$$\leq -\min\left\{1, \frac{\lambda}{2 \cdot k \cdot \operatorname{diam}(U)}\right\} \sum_{p=n_k}^{n-1} \beta_p, \quad n > n_k > \tilde{n}. \quad (6.44)$$

Здійснивши граничний перехід в нерівності (6.44) при $n \to \infty$ та урахувавши $\sum_{p=1}^{\infty} \beta_p = +\infty$, отримаємо протиріччя з обмеженістю на компактній множині U неперервного функціонала $\sigma_B \circ J$. Отже, існує $\delta_0 > 0$ таке, що для всіх k та $\delta \in (0, \delta_0]$ $\tau_k = \min\limits_{n > n_k} \{n : \|u_n - u_{n_k}\|_V > \delta\} < +\infty$. Але обираючи достатньо мале $\delta_0 > 0$ та велике k_0, можна повторити доведення нерівності (6.42) для $n_k \leq n \leq \tau_k$. З іншого боку,

$$\delta_0 < \|u_{\tau_k} - u_{n_k}\|_V \leq \sum_{p=n_k}^{\tau_k - 1} \|u_{p+1} - u_p\|_V \leq \sum_{p=n_k}^{\tau_k - 1} \beta_p.$$

Ураховуючи останню нерівність в (6.44), маємо

$$\sigma_B(J(u_{\tau_k})) < \sigma_B(J(u_{n_k})) - \min\left\{1, \frac{\lambda}{2 \cdot k \cdot \operatorname{diam}(U)}\right\} \delta_0.$$

Звідки маємо

$$\limsup_{k \to \infty} \sigma_B(J(u_{\tau_k})) < \lim_{k \to \infty} \sigma_B(J(u_{n_k})).$$

Покладемо $W = \sigma_B \circ J$. Умови теореми про збіжність ітераційних алгоритмів виконуються, а отже, послідовність (u_n) має сформульовані властивості. □

Зауваження 6.14. Для реалістичного випадку, коли похибки ε_n не прямують до нуля, можна отримати подібні відповідним теоремам попереднього розділу результати про збіжність розглядуваних алгоритмів.

6.5.3 Аналог послідовно-квадратичного методу

Розглянемо новий ітераційний алгоритм розв'язання задачі (6.37), (6.38) — векторний аналог алгоритму 5.2.

Алгоритм 6.3. Послідовно-квадратичного метод.

1. Обираємо початкове наближення $u_0 \in U$. Покладемо $n = 0$.
2. Знаходимо $y_n \in H_1$ — узагальнений розв'язок рівняння $\mathcal{L}y_n = F(u_n)$.
3. Знаходимо спряжені стани $\overrightarrow{p_n} = \left(p_n^1, p_n^2, ..., p_n^m\right) \in (W_2)^m$

$$\mathcal{L}^+ p_n^1 = D_1\Phi^{(1)}(y_n, u_n),$$

$$.....,$$

$$\mathcal{L}^+ p_n^m = D_1\Phi^{(m)}(y_n, u_n).$$

4. Знаходимо $\bar{u}_n \in U$ — розв'язок екстремальної задачі

$$\sigma_B \circ \left((F'(u_n))^* \overrightarrow{p_n} + \Phi_2'(y_n, u_n)\right)(u - u_n) + \frac{1}{2\alpha_n}\|u - u_n\|_V^2 \to \varepsilon_n - \inf_{u\in U}.$$

5. Покладаємо $u_{n+1} = u_n + \rho_n(\bar{u}_n - u_n)$, де $\rho_n \in (0, 1]$, $n := n + 1$ і переходимо на крок 2.

Має місце теорема.

Теорема 6.17. *Нехай* $\rho_n \in \left[\underline{\rho}, \bar{\rho}\right] \subseteq (0, 1]$, $\alpha_n \to 0$, $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n = +\infty$, $\varepsilon_n > 0$, $\frac{\varepsilon_n}{\alpha_n} \to 0$. *Якщо функціонал* $\sigma_B \circ J$ *приймає на множині* U^* *не більш ніж зліченну кількість значень, то всі граничні точки послідовності* (u_n), *породженої алгоритмом 6.3, утворюють компактну зв'язну підмножину в* U^*, *а послідовність чисел* $\sigma_B(J(u_n))$ *має границю.*

Доведення. Доведення подібне до попередніх. Перевіримо виконання умов теореми про збіжність ітераційних алгоритмів. За побудовою усі члени послідовності (u_n) належать компакту U.

Розглянемо підпослідовність (u_{n_k}) таку, що $u_{n_k} \to u^* \in U^*$ при $k \to \infty$. Оцінимо $\|u_{n_k+1} - u_{n_k}\|_V$. Функціонал

$$u \mapsto G_{n_k}(u) = \sigma_B \circ \left((F'(u_{n_k}))^* \overrightarrow{p_{n_k}} + \Phi_2'(y_{n_k}, u_{n_k})\right)(u - u_{n_k}) + \\ + \frac{1}{2\alpha_{n_k}}\|u - u_{n_k}\|_V^2$$

сильно опуклий ($\frac{1}{2\alpha_{n_k}} > 0$ — стала сильної опуклості). Покладемо

$$\tilde{u}_{n_k} = \arg\min_{u\in U} G_{n_k}(u).$$

Маємо

$$\frac{1}{2\alpha_{n_k}}\|\bar{u}_{n_k}-\tilde{u}_{n_k}\|_V^2 \le G(\bar{u}_{n_k})-G(\tilde{u}_{n_k}) \le \varepsilon_{n_k}.$$

Отже,

$$\begin{aligned}\|u_{n_k+1}-u_{n_k}\|_V &= \rho_{n_k}\|\bar{u}_{n_k}-u_{n_k}\|_V \le \bar{\rho}\,\|\bar{u}_{n_k}-u_{n_k}\|_V \le \\ &\le \|\bar{u}_{n_k}-\tilde{u}_{n_k}\|_V + \|\tilde{u}_{n_k}-u_{n_k}\|_V \le \sqrt{2\alpha_{n_k}\varepsilon_{n_k}} + C_0\alpha_{n_k} \to 0\end{aligned}$$

при $k\to\infty$, де $C_0 = 2\sup_{u\in U}\|J'(u)\|_V < +\infty$.

Нехай (u_{n_k}) — підпослідовність, що збігається до керування $u'\notin U^*$. Покажемо, що існує таке $\delta_0 > 0$, що для всіх k та $\delta\in(0,\delta_0]$ $\tau_k = \min\limits_{n>n_k}\{n : \|u_n-u_{n_k}\|_V > \delta\} < +\infty$. Від супротивного. Нехай для всіх $\delta_0 > 0$ існує $k_0 = k_0(\delta_0)$ таке, що $\|u_n-u_{n_{k_0}}\|_V \le \delta_0$ для всіх $n > n_{k_0}$. Тоді $u_n\in B_{2\delta_0}(u')$ для всіх $n > n_{k_0}$.

Оцінимо приріст $\sigma_B(J(u_{n+1}))-\sigma_B(J(u_n))$. Маємо

$$\begin{aligned}\sigma_B(J(u_{n+1}))-\sigma_B(J(u_n)) &\le \sigma_B(J(u_{n+1})-J(u_n)) \le \\ &\le \sigma_B(J'(u_n)(u_{n+1}-u_n)) + \frac{C_1}{\gamma+1}\|u_{n+1}-u_n\|_V^{\gamma+1} = \\ &= \rho_n\sigma_B(J'(u_n)(\bar{u}_n-u_n)) + \frac{C_1}{\gamma+1}\rho_n^{\gamma+1}\|\bar{u}_n-u_n\|_V^{\gamma+1} = \\ &= \rho_n\left\{\sigma_B(J'(u_n)(\bar{u}_n-u_n)) + \frac{1}{2\alpha_n}\|\bar{u}_n-u_n\|_V^2\right\} + \\ &\quad + \frac{C_1}{\gamma+1}\rho_n^{\gamma+1}\|\bar{u}_n-u_n\|_V^{\gamma+1} - \frac{\rho_n}{2\alpha_n}\|\bar{u}_n-u_n\|_V^2 \le \\ &\le \rho_n\left\{\varepsilon_n + \min_{u\in U}G_n(u)\right\} + \frac{C_1}{\gamma+1}\rho_n^{\gamma+1}\|\bar{u}_n-u_n\|_V^{\gamma+1}. \quad (6.45)\end{aligned}$$

Оскільки $u'\notin U^*$, то існує таке $\lambda > 0$, що

$$\min_{u\in U}\sigma_B(J'(u')(u-u')) \le -2\lambda < 0.$$

Далі існує $\delta > 0$ таке, що для довільної точки $u''\in O_\delta(u')$ виконується нерівність

$$\min_{u\in U}\sigma_B(J'(u'')(u-u'')) \le -\lambda < 0.$$

Візьмемо $2\delta_0 < \delta$, тоді $u_n\in B_{2\delta_0}(u')\subseteq O_\delta(u')$. Позначимо через $\bar{\bar{u}}_n\in U$ розв'язок задачі мінімізації

$$\sigma_B(J'(u_n)(u-u_n)) \to \inf_{u\in U}.$$

Для $\bar{\bar{u}}_n \in U$ виконується нерівність

$$-\|J'(u_n)\| \cdot \|\bar{\bar{u}}_n - u_n\|_V \le \sigma_B\left(J'(u_n)\left(\bar{\bar{u}}_n - u_n\right)\right) \le -\lambda < 0,$$

тобто,

$$\frac{1}{\|\bar{\bar{u}}_n - u_n\|_V} \le \frac{\|J'(u_n)\|}{\lambda} \le \frac{C_0}{\lambda}.$$

Обираючи достатньо велике k_0, ми можемо досягти для всіх $n > n_{k_0}$ виконання нерівності $\alpha_n \le \lambda / C_0^2$. Розглянемо точку $u_n'' = u_n + \mu_n\left(\bar{\bar{u}}_n - u_n\right)$, де $\mu_n = \frac{\lambda\alpha_n}{\|\bar{\bar{u}}_n - u_n\|_V^2} \in (0, 1]$. Очевидно, що $u_n'' \in U$. Підставимо точку $u_n'' \in U$ у праву частину нерівності (6.45). Отримаємо такий ланцюжок оцінок

$$\begin{aligned}
&\sigma_B\left(J\left(u_{n+1}\right)\right) - \sigma_B\left(J\left(u_n\right)\right) \le \\
&\quad \le \rho_n\left\{\varepsilon_n + \sigma_B\left(J'(u_n)\left(u_n'' - u_n\right)\right) + \frac{1}{2\alpha_n}\|u_n'' - u_n\|_V^2\right\} + \\
&\quad\quad + \frac{C_1}{\gamma+1}\rho_n^{\gamma+1}\|\bar{\bar{u}}_n - u_n\|_V^{\gamma+1} = \\
&\quad = \rho_n\left\{\varepsilon_n + \mu_n\sigma_B\left(J'(u_n)\left(\bar{\bar{u}}_n - u_n\right)\right) + \frac{\mu_n^2}{2\alpha_n}\|\bar{\bar{u}}_n - u_n\|_V^2\right\} + \\
&\quad\quad + \frac{C_1}{\gamma+1}\rho_n^{\gamma+1}\|\bar{\bar{u}}_n - u_n\|_V^{\gamma+1} \le \\
&\le \rho_n\left\{\varepsilon_n - \mu_n\lambda + \frac{\mu_n^2}{2\alpha_n}\|\bar{\bar{u}}_n - u_n\|_V^2\right\} + \frac{C_1}{\gamma+1}\left(\alpha_n\sqrt{\frac{2\varepsilon_n}{\alpha_n}} + C_0\alpha_n\right)^{\gamma+1} = \\
&\quad = \rho_n\left\{\varepsilon_n - \frac{\lambda^2\alpha_n}{2\|\bar{\bar{u}}_n - u_n\|_V^2}\right\} + \frac{C_1}{\gamma+1}\left(\alpha_n\sqrt{\frac{2\varepsilon_n}{\alpha_n}} + C_0\alpha_n\right)^{\gamma+1} \le \\
&\quad\quad \le -\frac{\underline{\underline{\rho}}}{2}\left(\frac{\lambda}{\operatorname{diam}(U)}\right)^2\alpha_n + \varepsilon_n + \frac{C_1}{\gamma+1}\alpha_n^{\gamma+1}\left(\sqrt{\frac{2\varepsilon_n}{\alpha_n}} + C_0\right)^{\gamma+1}.
\end{aligned}$$

Оскільки $\alpha_n \to 0$, $\varepsilon_n \to 0$ і $\frac{\varepsilon_n}{\alpha_n} \to 0$, то, обираючи достатньо мале $\delta_0 > 0$ та велике k_0, отримуємо

$$\sigma_B\left(J(u_{n+1})\right) - \sigma_B\left(J(u_n)\right) \le -\frac{\underline{\rho}\lambda^2\alpha_n}{4\left(\operatorname{diam}(U)\right)^2}, \quad n > n_{k_0}.$$

Остаточно маємо

$$\sigma_B\left(J\left(u_n\right)\right) - \sigma_B\left(J\left(u_{n_k}\right)\right) \le -\frac{\underline{\rho}\lambda^2}{4\left(\operatorname{diam}(U)\right)^2}\sum_{p=n_k}^{n-1}\alpha_p, \quad n > n_k > n_{k_0}. \qquad (6.46)$$

Здійснивши граничний перехід у нерівності (6.46) при $n \to \infty$ та враховувавши $\sum_{p=n_k}^{\infty} \alpha_p = +\infty$, отримаємо протиріччя з обмеженістю на компактній множині U неперервного функціонала $\sigma_B \circ J$. Отже, існує $\delta_0 > 0$ таке, що для всіх k та $\delta \in (0, \delta_0]$

$$\tau_k = \min_{n>n_k} \{n : \|u_n - u_{n_k}\|_V > \delta\} < +\infty.$$

Але обираючи достатньо мале $\delta_0 > 0$ та велике k_0, можна повторити доведення нерівності (6.46) для $n_k \le n \le \tau_k$. З іншого боку,

$$\delta_0 < \|u_{\tau_k} - u_{n_k}\|_V \le \sum_{p=n_k}^{\tau_k-1} \|u_{p+1} - u_p\|_V \le$$

$$\le \sum_{p=n_k}^{\tau_k-1} \left(\sqrt{2\alpha_p \varepsilon_p} + C_0 \alpha_p\right) \le C_2 \sum_{p=n_k}^{\tau_k-1} \alpha_p.$$

Тому $\sum_{p=n_k}^{\tau_k-1} \alpha_p > \delta_0/C_2 > 0$. Ураховуючи останню нерівність в (6.38), маємо

$$\sigma_B\left(J\left(u_{\tau_k}\right)\right) - \sigma_B\left(J\left(u_{n_k}\right)\right) < -\underline{\rho}\lambda^2\delta_0 \Big/ 4C_2\left(\operatorname{diam}\left(U\right)\right)^2.$$

Звідки

$$\limsup_{k\to\infty}\ \sigma_B\left(J\left(u_{\tau_k}\right)\right) < \lim_{k\to\infty} \sigma_B\left(J\left(u_{n_k}\right)\right).$$

Покладемо $W = \sigma_B \circ J$. Умови теореми про збіжність ітераційних алгоритмів виконуються. □

Зауваження 6.15. Використовуючи опорну функцію σ_B, можна побудувати «багатокритеріальний» варіант методу Ньютона, для якого буде мати місце аналогічний теоремі 5.10 результат. А саме, слід будувати послідовність

$$u_{n+1} = u_n + \rho_n\left(\bar{u}_n - u_n\right),$$

$$\bar{u}_n \in \arg\min\left\{\sigma_B\left(J'\left(u_n\right)\left(u - u_n\right) + \tfrac{1}{2}J''\left(u_n\right)\left(u - u_n, u - u_n\right)\right)\right\},$$

де величина кроку $\rho_n \in [0, 1]$ обирається за одним з відомих правил.

Зауваження 6.16. Відмітимо, що запропоновані методи мають один недолік: на кожному ітераційному кроці слід розв'язувати негладку задачу кусково-лінійної чи кусково-квадратичної оптимізації.

На цьому ми закінчимо дослідження збіжності алгоритмів розв'язання задач векторної оптимізації лінійних розподілених систем з узагальненими впливами.

Література

[1] Hryhorenko V., Klyushin D. Multiblock ADMM with Nesterov Acceleration. In: Chertov O. et al. (eds) Recent Developments in Data Science and Intelligent Analysis of Information. Advances in Intelligent Systems and Computing. Springer, Cham. 2019. Vol 836. P. 358–364.

[2] Nigmatulin R. I. Dynamics of Multiphase Media. Vol. 1. Moscow: Nauka. 1987. 464 p.; New York: Hemisphere, 1991.

[3] Harlow F. Numerical Particles-In-Cells Method. In: Computational Methods in Hydrodynamics. Moscow: Mir. 1967. P. 316–342. (Russian translation from the English book) Fundamental Methods in Hydridinamics. New York: Academic Press. 1964.

[4] Belotserkovskiy O. M., Davidov Yu. M. The Large Particles Method in Gas Dynamics. Moscow: Nauka. 1982. 392 p. (in Russian).

[5] Cushman-Roision B., Esenkow O. E., Mathias B. J. A Particle-In-Cell Method for the Solution of Two-Layer Shallow-Water Equations. Intern. J. Numerical Methods in Fluids. 2000. Vol.32. P. 515–543.

[6] Grigoriev Yu. N., Vshivkov V. A., and Fedoruk M. P. Numerical Particle-In-Cell Methods: Theory and Applications. Boston: Utrecht, 2002; Novosibirsk: SO RAN, 2004. 361 p.

[7] Liu G. R. and Liu M. B. Smoothed Particle Hydrodynamics. A Meshfree Particle Method. New Jersey: World Scientific Publishing, 2003. 449 p.

[8] Liu M. B., Liu G. R. Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH): an Overview and Recent Developments. Arch. Comput. Method Eng. 2010. Vol. 17. P. 25-76.

[9] Monaghan J. J. Implicit SPH Drag and Dusty Gas Dynamics. J. Comput. Physics. 1997. Vol. 138(2). P. 801–820.

[10] Wang Z. B., Chen R., Wang H., Liao Q., Zhu X., and Li S. Z. An Overview of Smoothed Particle Hydrodynamics for Simulating Multiphase Flow. Applied Math. Modelling. 2016. Vol. 40(23-24). P. 9625–9655.

[11] Koukouvinis P., Kyriazis N., and Gavaises M. Smoothed Particle Hydrodynamics Simulation of a Laser Pulse Impact onto a Liquid Metal Droplet. PLOS ONE. 2018. Vol. 13(9). P. 1–13.

[12] Li S. and Liu W. K. A Meshfree Particle Method. Berlin: Springer-Verlag, 2004. 509 p.

[13] Boyko S. B., Mischenko V. V., Sandrakov G. V. The Numerical Investigation Method for Evaporated Plasma. J. Num. Appl. Math. 2007. № 2 (95). P. 3–12.

[14] Sarri G., Murphy G. C., and Dieckmann M. E. Two-Dimensional Particle-In-Cell Simulation of the Expansion of a Plasma into a Rarefied Medium. New J. Phys. 2011. Vol.13. P. 3023–3046.

[15] Surmin I. A., Bastrakov S. I., Efimenko E. S., Gonoskov A. A., Korzhimanov A. V., and Meyerov I. B. Particle-In-Cell Laser-Plasma Simulation on Xeon Phi Coprocessors. Comput. Phys. Commun. 2016. Vol. 202. P. 204–210.

[16] Dikalyuk A. S. and Kuratov S. E. Numerical Modeling of Plasma Devices by the Particle-In-Cell Method on Unstructured Grids. Math. Models and Computer Simulations. 2018. Vol. 10. P. 198–208.

[17] Sandrakov G. V. and Boyko S. B. Mathematical Modeling of Complex Heterogeneous Fluid Dynamics. J. Num. Appl. Math. 2011. № 1 (104). P. 109–120. (in Russian).

[18] Boyko S. B. and Sandrakov G. V. Mathematical Modeling of Phase Transitions Graphite-Diamond Dynamics. J. Num. Appl. Math. 2012. № 2 (108). P. 88–109. (in Russian).

[19] Boyko S. B. and Sandrakov G. V. Parameter Computing of Hydrodynamics Processes with Phase Transitions. Bull. of Taras Shevchenko National Univ. of Kyiv. 2013. Special Vol. P. 11–16.

[20] Sandrakov G. V. Modeling of Hydrodynamics Processes with Phase Transition. Information Technologies and Computer Modelling. Proc Int. Scient. Conf. Ivano-Frankivsk. 2018. P. 303–306.

[21] Sandrakov G. V. Modeling of Heterogeneous Hydrodynamics Processes with Phase Transition. Modern Problems of Mathematical Modeling, Automated Control and Information Technologies. Proc Int. Scient. and Pract. Conf. 2019. Rivne. Vol. 3. P. 67–68.

[22] Sandrakov G. V. Modeling of Hydrodynamics Processes with Phase Transitions by Homogenization. Information Technologies and Computer Modelling. Proc Int. Scient. Conf. Ivano-Frankivsk. 2020. P. 200–202.

[23] Lions P.-L. Mathematical topics in fluid mechanics. Vol. 2. Oxford: Clarendon Press, 1998. 348 p.

[24] Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. Москва: Наука, 1979. 288 с.

[25] Бакушинский А. Б., Гончарский А. В. Некорректные задачи. Численные методы и приложения. М.: Изд-во МГУ, 1989. 200 с.

[26] Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. Москва: Мир, 1972. 414 с.

[27] Васильев Ф. П. Методы решения экстремальных задач. Задачи минимизации в функциональных пространствах, регуляризация, аппроксимация М.: Наука, 1981. 399 с.

[28] Еремин И. И. О задачах последовательного программирования. Сибирский математический журнал. 1973. Т. 14. № 1. С. 53-–63.

[29] Подиновский В. В., Гаврилов В. Н. Оптимизация по последовательно применяемым критериям. Москва: Советское радио, 1975. 192 с.

[30] Калашников В. В., Калашникова Н. И. Решение двухуровневого вариационного неравенства. Кибернетика и системный анализ. 1994. № 4. С. 178–180.

[31] Коннов И. В. О системах вариационных неравенств. Изв. вузов. Матем. 1997. № 12. С. 79–88.

[32] Попов Л. Д. Об одноэтапном методе решения лексикографических вариационных неравенств. Изв. вузов. Матем. 1998. № 12. С. 71–81

[33] Попов Л. Д. Лексикографические вариационные неравенства и некоторые приложения. Математическое программирование. Регуляризация и аппроксимация, Сборник статей. Тр. ИММ. Т. 8. № 1. 2002. С. 103–115.

[34] Семенов В. В. О сходимости методов решения двухуровневых вариационных неравенств с монотонными операторами. Журнал обчисл. та прикл. матем. 2010. № 2 (101). С. 121–129.

[35] Денисов С. В., Семенов В. В. Проксимальний алгоритм для дворівневих варіаційних нерівностей: сильна збіжність. Журнал обчисл. та прикл. матем. 2011. № 3 (106). С. 27–32.

[36] Апостол Р. Я., Гриненко А. А., Семенов В. В. Ітераційні алгоритми для монотонних дворівневих варіаційних нерівностей. Журнал обчисл. та прикл. матем. 2012. № 1 (107). С. 3–14.

[37] Moudafi A., Mainge P.-E. Towards viscosity approximations of hierarchical fixed-point problems. Fixed Point Theory Appl. Vol. 2006. Article ID 95453. P. 1–10.

[38] Solodov M. An explicit descent method for bilevel convex optimization. Journal of Convex Analysis. 2007. 14. P. 227–238.

[39] Solodov M. A bundle method for a class of bilevel nonsmooth convex minimization problems. SIAM Journal on Optimization. 2007. 18. P. 242–259.

[40] Martinet B. Regularisation d'inequations variationelles par approximations successives. Rev. Francaise Informat. Recherche Operationelle. 1970. 4. P. 154–159.

[41] Rockafellar R. T. Monotone operators and the proximal point algorithm. SIAM J. Control Optim. 1976. 14. P. 877–898.

[42] Guler O. On the convergence of the proximal point algorithm for convex minimization. SIAM J. Control Optim. 1991. Vol. 29. P. 403–419.

[43] Acker F., Prestel M.-A. Convergence d'un schema de minimisation alternee. Annales de la faculte des sciences de Toulouse. 1980. Vol. 2. No. 1. P. 1–9.

[44] Васин В. В., Еремин И. И. Операторы и итерационные процессы фейеровского типа. (Теория и приложения). Москва–Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2005. 200 с.

[45] Васильев Ф. П., Обрадович О. Регуляризованный проксимальный метод для выпуклых задач минимизации. Тр. МИАН. 1995. 211. С. 131–139.

[46] Passty G. B. Ergodic Convergence to a Zero of the Sum of Monotone Operators in Hilbert Spaces. Journal of Mathematical Analysis and Applications. 1979. 72. P. 383–390.

[47] Attouch H., Redont P., Soubeyran A. A New Class of Alternating Proximal Minimization Algorithms with Costs-to-Move. SIAM J. Optim. 2007. Vol. 18. No. 3. P. 1061–1081.

[48] Войтова Т. А., Семенов В. В. Метод решения двухэтапных операторных включений. Журнал обчислювальної та прикладної математики. 2010. № 3 (102). С. 34–39.

[49] Денисов С. В. Параллельная схема декомпозиции для поиска седловой точки и равновесия Нэша. Журнал обчислювальної та прикладної математики. 2010. № 3 (102). С. 40–48.

[50] Voitova T. A., Denisov S. V., Semenov V. V. Alternating proximal algorithm for the problem of bilevel convex minimization. Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine. 2012. No. 2. P. 56–62. (In Ukrainian).

[51] Войтова Т. А., Маліцький Ю. В., Семенов В. В. Методи регуляризації та декомпозиції варіаційних задач. Праці міжнародної молодіжної математичної школи «Питання оптимізації обчислень (ПОО–XXXVII)» К.: Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, 2011. С. 30–31.

[52] Лоран П.-Ж. Аппроксимация и оптимизация. М.: Мир, 1975. 496 с.

[53] Экланд И., Темам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир, 1979. 399 с.

[54] Обен Ж.-П., Экланд И. Прикладной нелинейный анализ. М.: Мир, 1988. 510 с.

[55] Гольштейн Е. Г., Третьяков Н. В. Модифицированные функции Лагранжа. Теория и методы оптимизации. Москва: Наука, 1989. 400 с.

[56] Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М. Выпуклый анализ и его приложения. Москва: ЛИБРОКОМ, 2011. 176 с.

[57] Moreau J. J. Proximite et dualite dans un espace hilbertien. Bull. Soc. Math. France. 1965. 93. P. 273–299.

[58] Opial Z. Weak convergence of the sequence of successive approximations for nonexpansive mappings. Bull. Amer. Math. Soc. 1967. 73. P. 591–597.

[59] Семенов В. В. Категорные свойства разрешимости одного класса задач минимизации. Кибернетика и системный анализ. 2011. № 1. С. 106–117.

[60] Семенов В. В. О разрешимости задач максимизации в сопряженных пространствах. Проблемы управления и информатики. 2009. - № 2. С. 89–93.

[61] Семенов В. В., Апостол Р. Я., Войтова Т. А. Варіант принципу Девілля–Годфруа–Зізлера для векторної оптимізації. Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. 2009. Вип. 1. С. 145–148.

[62] Рысай Е. М., Семенов В. В. Типичность разрешимости и обобщенное решение некоторых экстремальных задач. Дифференциальные уравнения

и топология: Международная конференция, посвященная 100-летию со дня рождения Л. С. Понтрягина: Тезисы докладов. М.: Изд. отдел факультета ВМиК МГУ имени М. В. Ломоносова. МАКС Пресс, 2008. С. 396.

[63] Семенов В. В. Типовість розв'язності деяких задач оптимального керування. Доповіді НАН України. 2008. № 8. С. 36–42.

[64] Семенов В. В. Типовість розв'язності деяких неопуклих екстремальних задач. Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. 2007. Вип. 4. С. 191–195.

[65] Окстоби Дж. Мера и категория. М.: Мир, 1974. 157 с.

[66] Стечкин С. Б. Аппроксимативные свойства множеств в линейных нормированных пространствах. Rev. Roum. Math. Pur. et Appl. 1963. Vol. 8. No. 1. P. 5–18.

[67] Конягин С. В. Об аппроксимативных свойствах произвольных замкнутых множеств в банаховых пространствах. Фундаментальная и прикладная математика. 1997. Т. 3. № 4. С. 379–989.

[68] Lau K.-S. Almost Chebyshev Subsets in Reflexive Banach Spaces. Indiana University Mathematics Journal. 1978. Vol. 27. No. 5. P. 791–795.

[69] Конягин С. В. Об аппроксимативных свойствах замкнутых множеств в банаховых пространствах и характеризации сильно выпуклых пространств. ДАН СССР. 1980. Т. 251. № 2. С. 276–280.

[70] De Blasi F. S., Myjak J. On a generalized best approximation problem. J. Approx. Theory. 1998. 94. P. 54–72.

[71] Baranger J. Existence de solutions pour des problemes d'optimisation non convexes. J. Math. Pures Appl. 1973. 52. P. 377–406.

[72] Li C., Peng L. H. Porosity of perturbed optimization problems in Banach spaces. J. Math. Anal. Appl. 2006. 324. P. 751–761.

[73] Edelstein M. Farthest points of sets in uniformly convex Banach spaces. Israel J. Math. 1966. 4. P. 171–176.

[74] Asplund E. Farthest points in reflexive locally uniformly rotund Banach spaces. Israel J. Math. 1966. 4. P. 213–216.

[75] Lau K.-S. Farthest points in weakly compact sets. Israel J. Math. 1975. 22. P. 168–174.

[76] Deville R., Zizler V. Farthest points in w*-compact sets. Bull. Austral. Math. Soc. 1988. 38 (3). P. 433–439.

[77] Baranger J., Temam R. Nonconvex optimization problems depending on a parameter. SIAM J. Control. 1975. 13. P. 146–152.

[78] Ekeland I., Lebourg G. Generic Frechet-Differentiability and Perturbed Optimization Problems in Banach Spaces. Trans. AMS. 1976. Vol. 224. No. 2. P. 193–216.

[79] Cobzas S. Nonconvex optimization problems on weakly compact subsets of Banach spaces. Anal. Numer. Theor. Approx. 1980. 9. P. 19–25.

[80] Peng L. H., Li C. Existence and porosity for a class of perturbed optimization problems in Banach spaces. J. Math. Anal. Appl. 2007. 325. P. 987–1002.

[81] Ekeland I. On the variational principle. J. Math. Anal. Appl. 1974. 47. P. 324–353.

[82] Borwein J., Preiss D. Smooth variational principle with applications to subdifferentiability of convex functions. Trans. AMS. 1987. 303. P. 517–527.

[83] Deville R., Godefroy G., Zizler V. A smooth variational principle with applications to Hamilton-Jacobi equations in infinite dimensions. J. Funct. Anal. 1993. 111. P. 197–212.

[84] Tammer Chr. A generalization of Ekeland's variational principle. Optimization. 1992. 25. P. 129–141.

[85] Gopfert A., Tammer Chr., Zalinescu C. On the vectorial Ekeland's variational principle and minimal points in product spaces. Nonlinear Anal. 2000. 39. P. 909–922.

[86] Deville R., Finet C. Vector-valued perturbed minimization principles. Can. Math. Soc. 2000. 27. P. 45–51.

[87] Collier James B. The dual of a space with the Radon-Nikodym property. Pacific J. Math. 1976. Vol. 64. No. 1. P. 103–106.

[88] Asplund E. Frechet differentiability of convex functions. Acta Math. 1968. 121. P. 31–47.

[89] Ni R. X. Derivatives of generalized farthest functions and existence of generalized farthest points. J. Math. Anal. Appl. 2006. 316. P. 642–651.

[90] Дистель Дж. Геометрия банаховых пространств. Киев: Вища школа, 1980. 215 с.

[91] Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 288 с.

[92] Penot J., Thera M. Semi-continuous mappings in general topology. Archiv der Math. 1982. 38. P.158–166.

[93] Zajicek L. On σ-porous sets in abstract spaces. Abstract and Applied Analysis. 2005. No. 5. P. 509–534.

[94] Zajicek L. Porosity and σ-porosity. Real Anal. Exchange. 1987/88. 13. No. 2. P. 314–350.

[95] Deville R., Revalski J. P. Porosity of ill-posed problems. Proc. AMS. 2000. 128. P. 1117–1124.

[96] Furi M., Vignoli F. About well-posed optimization problems for functionals in metric spaces. Journal of optimization theory and applications. 1970. Vol. 5. No. 3. P. 225–229.

[97] Крейн М. Г., Рутман М. А. Линейные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха. Успехи математических наук. 1948. № 1. С. 3–95.

[98] Семенов В. В. Выпуклая максимизация и условие α Шахермайера. Кибернетика и системный анализ. 2009. № 2. С. 166–169.

[99] Апостол Р. Я., Семенов В. В. Задачі максимізації і умова Лінденштрауссa. Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. 2008. Вип. 4. С. 169–172.

[100] Гриненко А. А., Семенов В. В., Чубенко О. В. Мінімізація на передопуклих множинах: існування розв'язків. Журнал обчислювальної та прикладної математики. 2007. № 2 (95). С. 32–35.

[101] Семенов В. В. Линейный вариационный принцип для выпуклой векторной максимизации. Кибернетика и системный анализ. 2007. № 2. С. 105–114.

[102] Кацев М. В., Семенов В. В. Лінійний варіаційний принцип в опуклій максимізації. Доповіді НАН України. 2007. № 3. С. 51–58.

[103] Ляшко С. И., Кацев М. В., Семенов В. В. Замечания о достижимости супремума выпуклым функционалом. Проблемы управления и информатики. 2006. № 1. С. 81–86.

[104] Семенов В. В. Про щільність множин лінійних операторів та білінійних форм, що досягають норми. Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. 2006. Вип. 3. С.255–259.

[105] Семенов В. В. Линейный вариационный принцип для задачи выпуклой векторной максимизации. Конференция «Математическое программирование и приложения». Информационный бюллетень Ассоциации математического программирования, № 11, Екатеринбург, 2007. С. 257–258.

[106] Стрекаловский А. С. О поиске глобального максимума выпуклого функционала на допустимом множестве. Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 1993. Т. 33. № 3. С. 349–364.

[107] Strekalovsky A. S. Global optimality conditions for nonconvex optimization. Journal of Global Optimization. 1998. V. 12. № 4. P. 415–434.

[108] Стрекаловский А. С., Кузнецова А. А. О сходимости алгоритма глобального поиска в задаче выпуклой максимизации на допустимом множестве. Изв. вузов. Сер. матем. 1999. № 12. С. 74–81.

[109] Стрекаловский А. С. Элементы невыпуклой оптимизации. Новосибирск: Наука, 2003. 355 с.

[110] Стрекаловский А. С., Орлов А. В. Биматричные игры и билинейное программирование. М.: Физматлит, 2007. 223 с.

[111] Hiriart-Urruty J.-B. Conditions for Global Optimality 2. Journal of Global Optimization. 1998. Vol. 13. № 4. P. 349–367.

[112] Dur M., Horst R., Locatelli M. Necessary and sufficient global optimality conditions for convex maximization revisited. J. Math. Anal. Appl. 1998. Vol. 217. P. 637–649.

[113] Wu Z. Y. Sufficient global optimality conditions for weakly convex minimization problems. Journal of Global Optimization. 2007. Vol. 39. № 3. P. 427–440.

[114] Lindenstrauss J. On operators which attain their norm. Israel J. Math. 1963. Vol. 1. P. 139–148.

[115] Zizler V. On some extremal problems in Banach spaces. Math. Scand. 1973. Vol. 32. P. 214–224.

[116] Schachermayer W. Norm attaining operators and renormings of Banach spaces. Israel J. Math. 1983. Vol. 44. No. 3. P. 201–212.

[117] Stegall C. Optimization of functions on certain subsets of Banach spaces. Math. Ann. 1978. 236. P. 171–176.

[118] Acosta M. D., Paya R. Norm attaining and numerical radius attaining operators. Revista Mathematica de la Universidad Complutense de Madrid. 1989. Vol. 2. Numero suplementario. P. 19–25.

[119] Behrends E. New proofs of Rosenthal's theorem and the Josefson-Nissenzweig theorem. Bulletin of the Polish Academy of Sciences. 1995. 43. P. 283–295.

[120] Браттели У., Робинсон Д. Операторные алгебры и квантовая статистическая механика. М.: Мир, 1982. 512 с.

[121] Фелпс Р. Лекции о теоремах Шоке. М.: Мир, 1968. 112 с.

[122] Gopfert A., Tammer Chr., Riahi H., Zalinescu C. Variational Methods in Partially Ordered Spaces. New York / Berlin / Heidelberg: Springer-Verlag, 2003. 350 p.

[123] Дэй М. Нормированные линейные пространства. М.: Изд-во иностр. лит., 1961. 232 с.

[124] Davis W. J., Phelps R. R. The Radon–Nikodym Property and Dentable Sets in Banach Spaces. Proc. AMS. 1974. Vol. 45. No. 1. P. 119–122.

[125] Семенов В. В. Модификация метода условного градиента для решения экстремальных задач на одном классе невыпуклых множеств. Журнал обчислювальної та прикладної математики. 2002. № 1 (87). С. 72–76.

[126] Заботин В. И., Полонский Ю. А. Предвыпуклые множества, отображения и их приложения к экстремальным задачам. Кибернетика. 1981. № 5. С. 71–74.

[127] Вайнберг М. М. Вариационные методы исследования нелинейных операторов. М.: Гостехиздат, 1956. 344 с.

[128] Ляшко С. И. Импульсное оптимальное управление линейными системами с распределенными параметрами. ДАН СССР. 1984. Т. 276. № 2. С. 285–287.

[129] Ляшко С. И. Оптимизация линейных систем с обобщенным воздействием. Обозрение прикладной и промышленной математики. 1995. № 1. С. 70–77.

[130] Lyashko S. I. Generalized optimal control of linear systems with distributed parameters. Boston / Dordrecht / London: Kluwer Academic Publishers, 2002. 466 p.

[131] Ляшко С. И., Редько С. Е. Об управляемости распределенных систем в классе обобщенных воздействий. Кибернетика. 1988. № 6. С. 120–121.

[132] Ляшко С. И., Семенов В. В. Об управляемости линейных распределенных систем в классах обобщенных воздействий. Кибернетика и системный анализ. 2001. № 1. С. 18–41.

[133] Ляшко С. И. Приближенное решение задач импульсного оптимального управления. Доклады АН УССР. Сер. А. физ.-мат. и техн. науки. 1986. № 2. С. 60–62.

[134] Ляшко С. И. Численные методы решения задач оптимального импульсного управления. Журнал вычислительной математики и математической физики. 1987. Т. 27. № 3. С. 470–474.

[135] Ляшко С. И. Дифференцируемость регуляризованного критерия качества при импульсно-точечном управлении псевдопараболическими системами. Кибернетика. 1988. № 3. С. 64–66.

[136] Лисюк В. М., Семенов В. В., Семенов Вік. В., Сорока Ю. Б. Метод послідовної квадратичної оптимізації розв'язання задач на передопуклих множинах. Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. 2006. Вип. 4. С. 186–190.

[137] Денисов С. В., Семенов В. В. Оптимизация и обобщенное решение в задачах сопряжения параболических систем. Проблемы управления и информатики. 2005. № 1. С. 58–74.

[138] Клюшин Д. А., Ляшко Н. И., Номировский Д. А., Семенов В. В. Об одном методе точечной оптимизации. Журнал обчислювальної та прикладної математики. 2005. № 2 (93). С. 79–84.

[139] Ляшко С. І., Номіровський Д. А., Семенов В. В. Дослідження лінійних розподілених систем з узагальненим керуванням. Журнал обчислювальної та прикладної математики. 2004. № 2 (91). С. 31–45.

[140] Семенов В. В. Про глобально оптимальні керування в нелінійних операторних системах. Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. 2003. Вип. 4. С. 294–296.

[141] Семенов В. В. Модификация метода условного градиента для решения экстремальных задач на одном классе невыпуклых множеств. Журнал обчислювальної та прикладної математики. 2002. № 1 (87). С. 72–76.

[142] Ляшко С. І., Семенов В. В., Сергієнко Т. І., Стеля О. Б. До чисельних методів оптимізації розподілених систем з сингулярним керуванням. Вісник Київського університету. Серія: кібернетика. 2002. Вип. 3. С. 52–58.

[143] Семенов В. В. Оптимальное управление и обобщенное решение в параболических системах с условиями сопряжения. Конференция «Математическое программирование и приложения». Информационный бюллетень Ассоциации математического программирования. 2003. № 10. Екатеринбург. С. 210–211.

[144] Березанский Ю. М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев: Наук. думка, 1965. 800 с.

[145] Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971. 371 с.

[146] Картан А. Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. М.: Мир, 1971. 392 с.

[147] Сеа Ж. Оптимизация. Теория и алгоритмы. М.: Мир, 1973. 244 с.

[148] Пшеничный Б. Н., Данилин Ю. М. Численные методы в экстремальных задачах. М.: Наука, 1975. 319 с.

[149] Ермольев Ю. М. Методы стохастического программирования. М.: Наука, 1976. 239 с.

[150] Васильев Ф. П. Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1988. 549 с.

[151] Карманов В. Г. Математическое программирование. М.: Наука, 1986. 286 с.

[152] Мину М. Математическое программирование. М.: Наука, 1990. 485 с.

[153] Измаилов А. Ф., Солодов М. В. Численные методы оптимизации. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. 304 с.

[154] Нурминский Е. А. Численные методы решения детерминированных и стохастических минимаксных задач. Киев: Наук. думка, 1979. 159 с.

[155] Михалевич В. С., Гупал А. М., Норкин В. И. Методы невыпуклой оптимизации. М.: Наука, 1987. 279 с.

[156] Absil P.-A., Gallivan K.-A. Accelerated Line-search and Trust-region Method. SIAM J. Numer. Anal. 2009. Vol. 47. Issue 2. P. 997–1018.

[157] Baker C. G., Absil P.-A., Gallivan K. A. An implicit trust-region method on Riemannian manifolds. IMA J. Numer. Anal. 2008. Vol. 28. P. 665–689.

[158] Colson B., Marcotte P., Savard G. A Trust-Region Method for Nonlinear Bi-level Programming: Algorithm and Computational Experience. Computational Optimization and Applications. 2005. 30. P.211–227.

[159] Heinkenschloss M., Vicente L. N. Analysis of Inexact Trust-Region SQP Algorithms. SIAM J. Optim. 2002 Vol. 12. No. 2. P. 283–302.

[160] Conn R., Gould N. I. M., Sartenaer A., Toint P. L. Global convergence of a class of trust region algorithms for optimization using inexact projections onto convex constraints. SIAM J. Optim. 1993. Vol. 3. P. 164–221.

[161] Заботин В. И., Полонский Ю. А. Предвыпуклые множества, отображения и их приложения к экстремальным задачам. Кибернетика. 1981. № 5. С. 71–74.

[162] Заботин В. И., Черняев Ю. А. Обобщение метода проекции градиента на экстре-мальные задачи с предвыпуклыми ограничениями. Журнал вычислительной математики и математической физики. 2001. Т. 41. № 3. С. 367–373.

[163] Экланд И., Темам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир, 1979. 399 с.

[164] Пшеничный Б. Н. Необходимые условия экстремума. М.: Наука, 1982. 144 с.

[165] Demyanov V. F. Conditions for an Extremum in Metric Spaces. Journal of Global Optimization. 2000. Vol. 17. P. 55–63.

[166] Демьянов В. Ф. Условия экстремума и вариационное исчисление. М.: Высш. шк., 2005. 335 с.

[167] James R. C. Weak compactness and reflexivity. Israel J. Math. 1964. 2. P. 101–119.

[168] Салуквадзе М. Е. Задачи векторной оптимизации в теории управления. Тбилиси: Мецниереба, 1975. 201 с.

[169] Stadler W. A Survey of Multicriteria Optimization or the Vector Maximum Problem, Part I: 1776-1960. Journal of Optimization Theory and Applications. 1979. Vol. 29. No. 1. P. 1–52.

[170] Dauer J. P., Stadler W. A Survey of Vector Optimization in Infinite-Dimensional Spaces, Part 2. Journal of Optimization Theory and Applications. 1986. Vol. 51. No. 2. P. 205–241.

[171] Гороховик В. В. Выпуклые и негладкие задачи векторной оптимизации. Минск: Навука і тэхніка, 1990. 238 с.

[172] Жуковский В. И. Кооперативные игры при неопределенности и их приложения. М.: Эдиториал УРСС, 1999. 336 с.

[173] Gopfert A., Tammer Chr., Riahi H., Zalinescu C. Variational Methods in Partially Ordered Spaces. New York–Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 2003. 350 p.

[174] Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Субдифференциальное исчисление: теория и приложения. М.: Наука, 2007. 560 с.

[175] Подиновский В. В., Ногин В. Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. 2-е изд., испр. и доп. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. 256 с.

[176] Henig M. I. Existence and characterization of efficient decisions with respect to cones. Math. Progr. 1982. Vol. 23. No. 1. P. 111–116.

[177] Loridan P. ϵ-solutions in vector minimization problems. Journal of Optimization Theory and Applications. 1984. 43 (2). P. 265–276.

[178] Jahn J. Existence theorems in vector optimization. Journal of Optimization Theory and Applications. 1986. 50 (3). P. 397–406.

[179] Gorokhovik V. V. Second order optimality conditions for vector optimization problems with geometric constraints. Дифференциальные уравнения и топология: Международная конференция, посвященная 100-летию со дня рождения Л. С. Понтрягина: Тезисы докладов. М.: Изд. отдел факультета ВМиК МГУ имени М.В.Ломоносова; МАКС Пресс, 2008. С. 250–251.

[180] Кутателадзе С. С., Фельдман М. М. Множители Лагранжа в задачах вектор-ной оптимизации. ДАН СССР. 1976. Т. 231. № 1. С. 28–31.

[181] Zhu Q. J. Hamiltonian necessary conditions for a multiobjective optimal control problem with endpoint constraints. SIAM J. Control Optim. 2000. Vol. 39. No. 1. P. 97–112.

[182] Corley H. W. Duality theory for maximizations with respect to cones. J. Math. Anal. Appl. 1981. Vol. 84. No. 2. P. 560–568.

[183] Jahn J. Duality in vector optimization. Math. Progr. 1983. Vol. 25. No. 4. P. 343–353.

[184] Молодцов А. Д. Устойчивость принципов оптимальности. М.: Наука, 1987. 280 с.

[185] Лебедева Т. Т., Семенова Н. В., Сергиенко Т. И. Устойчивость векторных задач целочисленной оптимизации: взаимосвязь с устойчивостью множеств оптимальных и неоптимальных решений. Кибернетика и системный анализ. 2005. Т. 41. № 4. С. 90–100.

[186] Моисеев Н. Н. Математические задачи системного анализа. М.: Наука, 1981. 488 с.

[187] Jahn J. Scalarization in vector optimization. Math. Progr. 1984. Vol. 29. No. 2. P. 203–218.

[188] Eichfelder G. Adaptive Scalarization Methods in Multiobjective Optimization. Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 2008. 241 p.

[189] Fliege J., Svaiter B. F. Steepest descent methods for multicriteria optimization. Mathematical Methods of Operations Research. 2000. Vol. 51. Issue 3. P. 479–494.

[190] Жуковский В. И., Чикрий А. А. Линейно-квадратичные дифференциальные игры. Киев: Наукова Думка, 1994. 320 с.

[191] Ramos A. M., Glowinski R., Periaux J. Nash Equilibria for the Multi-Objective Control of Linear Partial Differential Equations. Journal of Optimization Theory and Applications. 2002. 112 (3). P. 457–498.

[192] Ramos A. M., Glowinski R., Periaux J. Pointwise Control of the Burgers Equation and related Nash Equilibrium Problems: A Computational Approach. Journal of Optimization Theory and Applications. 2002. 112 (3). P. 499–516.

[193] Lions J.-L. Controle de Pareto de Systemes Distribues: Le Cas stationnaire. Comptes Rendus de l'Academie des Sciences, Serie I. 1986. Vol. 302. P. 223–227.

[194] Lions J.-L. Controle de Pareto de Systemes Distribues: Le Cas d'evolution. Comptes Rendus de l'Academie des Sciences, Serie I. 1986. Vol. 302. P. 413–417.

[195] Nakoulima O., Omrane A., Velin J. On the Pareto Control and No-Regret Control for Distributed Systems with Incomplete Data. SIAM Journal on Control and Optimization. 2003. Vol. 42. No. 4. P. 1167–1184.

[196] Бенсусан А., Лионс Ж.-Л., Темам Р. Методы декомпозиции, децентрализации, координации и их приложения. Методы вычислительной математики. Новосибирск: Наука, 1975. С. 144–274.

[197] Семенов В. В., Семенова Н. В. О задаче векторного управления в гильбертовом пространстве. Кибернетика и системный анализ. 2005. № 2. С. 117–130.

[198] Семенов В. В. Задача векторной оптимизации линейных распределенных систем с сингулярным управлением. Доповіді НАН України. 2004. № 10. С. 74–80.

[199] Ляшко С. И., Номировский Д. А., Петунин Ю. И., Семенов В. В. Двадцатая проблема Гильберта. Обобщенные решения операторных уравнений. М.: ООО «И. Д. Вильямс», 2009. 192 с.

[200] Чарин В. С. Линейные преобразования и выпуклые множества. Киев: Вища школа, 1978. 192 с.

[201] Мордухович Б. Ш. Методы аппроксимаций в задачах оптимизации и управления. М.: Наука, 1988. 359 с.

[202] Дубовицкий А. Я., Милютин А. А. Задачи на экстремум при наличии ограничений. Докл. АН СССР. 1963. Т. 149. № 4. С. 759-762.

[203] Antipin A. S. Gradient approach of computing fixed points of equilibrium problems. Journal of Global Optimization. 2002. Vol. 24. No. 3. P. 285–309.

[204] Антипин А. С. Равновесное программирование: проксимальные методы. Журнал вычисл. мат.и мат. физ. 1997. Т. 37. №.11. С. 1327–1339.

[205] Lyashko S. I., Semenov V. V. A New Two-Step Proximal Algorithm of Solving the Problem of Equilibrium Programming. In: Goldengorin B. (ed.) Optimization and Its Applications in Control and Data Sciences. Springer Optimization and Its Applications, 115, Springer, Cham, 2016. P. 315–325.

[206] Tammer Chr. Approximate solutions of vector-valued control-approximation problems. Studies in Locational Analysis. 1996. 10. P. 151–162.

[207] Tammer Chr. A variational principle and applications for vectorial control approximation problems. Reports of the Institute of Optimization and Stochastics. Martin-Luther Universitat Halle-Wittenberg. 1996. No. 9.

[208] Finet C. Perturbed minimization principles in partially ordered Banach spaces. Institut de Mathematique et d'Informatique, Universite de Mons-Hainaut. Preprint 2 (2000). P.1–16.

Інформація про авторів

Ведель Яна Ігорівна — аспірантка кафедри обчислювальної математики факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка **(розділ 2, розділ 6)**;
Григоренко Владислав Анатолійович — аспірант кафедри обчислювальної математики факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка **(розділ 2, розділ 5)**;
Денисов Сергій Вікторович — асистент кафедри обчислювальної математики факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка **(розділ 2, розділ 5)**;
Клюшин Дмитро Анатолійович — доктор фізико-математичних наук, професор кафедри обчислювальної математики факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка **(розділ 2, розділ 5)**;
Ляшко Сергій Іванович — член-кореспондент Національної академії наук України, доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри обчислювальної математики факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка **(передмова, розділ 5, розділ 6)**;
Сандраков Геннадій Вікторович — доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник, провідний науковий співробітних факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка **(розділ 1)**;
Семенов Володимир Вікторович — доктор фізико-математичних наук, професор кафедри обчислювальної математики факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка **(розділ 3, розділ 4, розділ 5, розділ 6)**.

Наукове видання

ЛЯШКО Сергій Іванович
САНДРАКОВ Геннадій Вікторович
СЕМЕНОВ Володимир Вікторович
ВЕДЕЛЬ Яна Ігорівна
ГРИГОРЕНКО Владислав Анатолійович
ДЕНИСОВ Сергій Вікторович
КЛЮШИН Дмитро Анатолійович

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТА ОБЧИСЛЮВАЛЬНА МАТЕМАТИКА

Монографія

Друкується за авторською редакцією

Формат 60x84$^{1/16}$. Ум. друк. арк. 13,0. Наклад 100. Зам. № 220-9862.
Гарнітура Times New Roman. Папір офсетний. Друк офсетний.
Підписано до друку 03.11.20

Видавець і виготовлювач
ВПЦ "Київський університет"
Б-р Тараса Шевченка, 14, м. Київ, 01030
☎ (38044) 239 32 22; (38044) 239 31 72; тел./факс (38044) 239 31 28
e-mail:vpc_div.chief@univ.net.ua; redaktor@univ.net.ua
http: vpc.univ.kiev.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 1103 від 31.10.02