Заняття 8. Компактні множини в метричних просторах

1. Доведіть, що компактний метричний простір є повним та сепарабельним.

2. Нехай (X, ρ) — компактний метричний простір, $f \in C(X)$ та для деякого $\lambda \in \mathbb{R}$ множина $\{f \le \lambda\} = \{x \in X : \ f(x) \le \lambda\}$ компактна. Покажіть, що досягається $\inf_X f$.

3. Нехай K — компактна множина метричного простору (X, ρ). Доведіть, що існують такі точки $x, y \in K$, що $\rho(x, y) = \operatorname{diam}(K)$.

4. Нехай (X, d_X), (Y, d_Y) — метричні простори, при цьому (Y, d_Y) — компактний простір. Нехай $f \in C(X \times Y)$ та $g = \max_{y \in Y} f(x, y)$. Довести, що $g \in C(X)$.

5. Нехай (X, ρ) — компактний метричний простір, а відображення $f : X \to X$ задовольняє умову
$$\rho(f(x), f(y)) < \rho(x, y) \quad \forall x, y \in X, \ x \ne y.$$
Довести, що відображення f має єдину нерухому точку.

6. Покажіть, що:
   (a) множина елементів $x_n = \left(\underbrace{\frac{1}{n}, ..., \frac{1}{n}}_{n}, 0, ...\right)$ не є компактною в просторі ℓ_1.
   (b) множина елементів $x_n = \left(\underbrace{\frac{1}{n}, ..., \frac{1}{n}}_{n^2}, 0, ...\right)$ не є компактною в просторі ℓ_2.
   (c) множина елементів $x_n = \left(1, \frac{1}{2}, ..., \frac{1}{n}, 0, ...\right)$ є компактною просторі ℓ_3.

7. (критерій компактності в ℓ_2) Множина $K \subseteq \ell_2$ компактна $\Leftrightarrow$ множина $K \subseteq \ell_2$ замкнена, обмежена та $\forall \epsilon > 0 \ \exists n \in \mathbb{N} \ \forall x \in K \ \sum_{i=n}^{\infty} |x_i|^2 < \epsilon$.

8. Нехай $(\alpha_n) \in \ell_2$, $\alpha_n \ge 0$. Доведіть, що множина $B = \{x \in \ell_2 : \ |x_n| \le \alpha_n\}$ компактна в просторі ℓ_2.

9. Нехай $\alpha_n > 0$, $\alpha_n \to +\infty$. Доведіть, що множина $E = \left\{x \in \ell_2 : \ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n^2 \le 1\right\}$ компактна в ℓ_2.

10. (критерій Асколі–Арцела) Доведіть еквівалентність: множина $K \subseteq C([0, 1])$ компактна $\Leftrightarrow$ множина $K \subseteq C([0, 1])$ замкнена, обмежена та одностайно неперервна.

11. Покажіть, що замкнені кулі просторів ℓ_2 та $C([0, 1])$ (метрика рівномірна) некомпактні.

12. Доведіть ніде не щільність компактних множин просторів ℓ_2 та $C([0, 1])$ (метрика рівномірна).