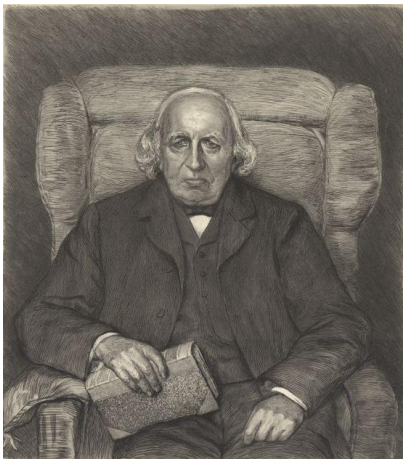
Апроксимаційна теорема Стоуна-Вейєрштрасса

Розглянемо простір $C([a,b])$ неперервних на сегменті $[a,b]$ функцій з рівномірною метрикою

$$\rho_\infty(f,g) = \max_{x\in[a,b]} |f(x)-g(x)|,\ f,g\in C([a,b]).$$

Теорема 1 (теорема Вейєрштрасса, 1885)**.** *Нехай* $f\in C([a,b])$*. Для довільного* $\varepsilon>0$ *існує алгебраїчний поліном* p *такий, що*

$$\rho_\infty(f,p)<\epsilon.$$



Karl Theodor Wilhelm Weierstraß
(1815-1897)

Існує багато різних доведень цієї важливої теореми. На 1-му курсі ми познайомились з конструктивним доведенням С.Н. Бернштейна (1912). Пригадаємо його.

Достатньо довести теорему для сегмента $[0,1]$. Дійсно, якщо теорема справедлива для $[0,1]$, то для функції $f\in C([a,b])$ і заданого $\varepsilon>0$ існує поліном p такий, що

$$\forall t\in[0,1]:\ |f(a+t(b-a))-p(t)|<\varepsilon,$$

і тому

$$\forall x\in[a,b]:\ \left|f(x)-p\left(\frac{x-a}{b-a}\right)\right|<\varepsilon.$$

Нехай $f\in C([0,1])$. Розглянемо поліноми

$$B_n(f,x)=\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)C_n^k x^k(1-x)^{n-k},\ x\in[0,1],n\in\mathbb{N}.$$

Поліном $B_n(f,\cdot)$ називають поліномом Бернштейна функції f.

Лема 1. *Нехай* $x\in[0,1]$*,* $n\in\mathbb{N}$*. Справедливі тотожності*

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k(1-x)^{n-k}=1, \tag{1}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}-x\right)C_n^k x^k(1-x)^{n-k}=0, \tag{2}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2 C_n^k x^k(1-x)^{n-k}=\frac{x(1-x)}{n}. \tag{3}$$

Тотожність (1) випливає безпосередньо з формули бінома Ньютона.

Доведемо тотожність (2). Оскільки $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$, то

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} x^k (1-x)^{n-k} = x \sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^i x^i (1-x)^{n-1-i} = x.$$

Звідси випливає потрібна тотожність.

Перейдемо до доведення (3).Спочатку, як і при доведенні (2), маємо

$$\sum_{k=0}^{n} k(k-1) C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = nx \sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^i i x^i (1-x)^{n-1-i} = n(n-1)x^2.$$

Далі за допомогою (1) і (2) одержимо

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} =$$

$$= \frac{1}{n^2} \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k k(k-1) x^k (1-x)^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k k x^k (1-x)^{n-k} \right) -$$

$$- 2x \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} + x^2 = \frac{n(n-1)}{n^2} x^2 + \frac{nx}{n^2} - 2x^2 + x^2 = \frac{x(1-x)}{n}.$$

Доведемо, що

$$\|f - B_n(f, \cdot)\| \to 0. \tag{4}$$

Нехай $\varepsilon > 0$ задано. За теоремою Кантора існує $\delta > 0$ таке, що для $x', x'' \in [0,1]$

$$|x' - x''| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Використовуючи тотожності леми 1, одержимо

$$\forall x \in [0,1] : \; |f(x) - B_n(f,x)| =$$

$$= \left| \sum_{k=0}^{n} \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \right| \le \sum_{k=0}^{n} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| C_n^k x^k (1-x)^{n-k} =$$

$$= \sum_{k:\left|x-\frac{k}{n}\right|<\delta} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| C_n^k x^k (1-x)^{n-k} + \sum_{k:\left|x-\frac{k}{n}\right|\ge\delta} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| C_n^k x^k (1-x)^{n-k} <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k:\left|x-\frac{k}{n}\right|<\delta} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} + 2\|f\| \sum_{k:\left|x-\frac{k}{n}\right|\ge\delta} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \le$$

$$\le \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} + \frac{2\|f\|}{\delta^2} \sum_{k=0}^{n} \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} =$$

$$= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2\|f\|}{\delta^2} \frac{x(1-x)}{n} \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\|f\|}{2n\delta^2}.$$

Нехай тепер $n_0 \in \mathbb{N}$ таке, що

$$\forall n \ge n_0 : \; \frac{\|f\|}{2n\delta^2} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тоді

$$\forall n \ge n_0 : \; \|f - B_n(f, \cdot)\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тобто, має місце (4). Доведення теореми завершено.

Задача 1. Нехай $f \in C([0,1])$ задовольняє умову: існують $L > 0$, $\alpha \in (0,1]$ такі, що

$$|f(x_1) - f(x_2)| \le L\,|x_1 - x_2|^{\alpha}, \ \ \forall x_1, x_2 \in [0,1].$$

Доведіть, що для всіх $n \in \mathbb{N}$ має місце нерівність

$$\|f - B_n(f,\cdot)\| \le \frac{M}{n^{\alpha/2}},$$

де M – додатня стала, що залежить лише від f.

Задача 2. Нехай $\alpha \in (0,1]$ і $f(x) = \left|x - \frac{1}{2}\right|^{\alpha}$. Доведіть, що для всіх $n \in \mathbb{N}$ має місце нерівність

$$\left| f\left(\frac{1}{2}\right) - B_n\left(f, \frac{1}{2}\right)\right| \ge \frac{1}{4n^{\alpha/2}}.$$

Задача 3. Нехай функція $f \in C([0,1])$ така, що

$$\int_0^1 f(x)x^n dx = 0, \ \ n = 0,1,2,...$$

Доведіть, що $f(x) = 0$ на $[0,1]$.

Задача 4. Нехай $f \in C([0,1]^2)$. Покладемо

$$B_n(x,y) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}, \frac{i}{n}\right) C_n^k C_n^i x^k y^i (1-x)^{n-k}(1-y)^{n-i}, \ \ x,y \in [0,1], n \in \mathbb{N}.$$

Доведіть, що $B_n \to f$ рівномірно на $[0,1]^2$.

Задача 5. Доведіть існування ряду поліномів $\sum p_n$, що має властивість: для довільної функції $f \in C([a,b])$ члени ряду можна так згрупувати (не змінюючи їх порядку), щоб ряд $\sum \left(p_{n_k+1} + ... + p_{n_{k+1}}\right)$ збігався до f рівномірно на $[a,b]$.

Задача 6. Нехай $f \in C([0,1])$. Знайти границю

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\int_0^1\int_0^1 ... \int_0^1}_{n} f(x_1x_2...x_n)dx_1dx_2...dx_n.$$

Перейдемо до вивчення абстрактної ситуації.

Нехай X – компакт. Введемо в просторі $C(X)$ неперервних функцій $X \to \mathbb{R}$ рівномірну метрику

$$\rho_\infty(f,g) = \max_{x\in X}|f(x) - g(x)|, \ \ f,g \in C(X).$$

Метричний простір $(C(X), \rho_\infty)$ — повний.

Означення 1. Нехай $A \subseteq C(X)$. Множину A називають алгеброю, якщо $\forall f,g \in A$ і $\forall \alpha \in \mathbb{R}$: $f+g \in A$, $\alpha f \in A$, $fg \in A$.

Задача 7. Нехай $A \subseteq C(X)$ – алгебра. Доведіть, що $\mathrm{cl}A$ також алгебра.

Означення 2. Нехай $A \subseteq C(X)$. Множина A розділяє точки множини X, якщо

$$\forall x_1, x_2 \in X, \ x_1 \ne x_2 \ \exists f \in A : \ f(x_1) \ne f(x_2).$$

Теорема 2 (теорема Стоуна, 1937)**.** *Нехай X – компакт, $A \subseteq C(X)$. Припустимо, що:*

A1) A – алгебра;

A2) A *розділяє точки множини* X*;*

A3) $1 \in A$*, де* 1 *– функція, визначана рівністю* $1(x) = 1$*,* $x \in X$*.*

Тоді множина A *щільна в* $C(X)$*, тобто* $\mathrm{cl}A = C(X)$*.*

Marshall Harvey Stone
(1903-1989)

Доведення теореми 2. Спочатку доведемо декілька лем.

Лема 2. *Якщо* $x_1, x_2 \in X$ *і* $a, b \in \mathbb{R}$*, то існує функція* $f \in A$ *така, що*

$$f(x_1) = a\,, \;\; f(x_2) = b.$$

Доведення. Оскільки A розділяє точки X, то існує функція $g \in A$ така, що $g(x_1) \neq g(x_2)$. Покладемо

$$f(x) = a + \frac{b-a}{g(x_2) - g(x_1)}\,(g(x) - g(x_1))\;, \;\; x \in X.$$

Умова A3 гарантує виконання включення $f \in A$. □

Лема 3. *Якщо* $f \in A$*, то* $|f| \in \mathrm{cl}A$*.*

Доведення. Не зменшуючи загальності, вважаємо, що $\max_{x\in X}|f(x)| \leq 1$. За класичною теоремою Вейєрштрасса існує послідовність поліномів p_n, що рівномірно збігається до $t \to |t|$ на сегменті $[-1, 1]$ і така, наприклад, що $|p_n(t) - |t|| < \frac{1}{n}$ для всіх $t \in [0, 1]$. Оскільки $\max_{x\in X}|f(x)| \leq 1$, то звідси випливає нерівність

$$\rho_\infty(p_n(f), |f|) = \max_{x\in X}|p_n(f(x)) - |f(x)|| < \frac{1}{n}\,,$$

тобто $|f| = \lim_{n\to\infty} p_n(f)$. Оскільки алгебра A містить усі константи, то $p_n(f) \in A$. Отже, $|f| \in \mathrm{cl}A$. □

Лема 4. *Якщо* $f_1, f_2, ..., f_n \in A$*, то* $\max\{f_1, f_2, ..., f_n\} \in \mathrm{cl}A$ *і* $\min\{f_1, f_2, ..., f_n\} \in \mathrm{cl}A$*.*

Доведення. Нехай $f_1, f_2 \in A$. Маємо

$$\max\{f_1, f_2\} = \frac{f_1 + f_2 + |f_1 - f_2|}{2},$$

$$\min\{f_1, f_2\} = \frac{f_1 + f_2 - |f_1 - f_2|}{2}.$$

Враховуючи лему 3 і те, що $\mathrm{cl}A$ – алгебра, отримуємо

$$\max\{f_1, f_2\} \in \mathrm{cl}A\,, \;\; \min\{f_1, f_2\} \in \mathrm{cl}A.$$

Далі індукція по n. □

Повернемось до доведення теореми. Нехай $h \in C(X)$. Потрібно перевірити, що для довільного $\varepsilon > 0$ існує функція $f \in \mathrm{cl}A$ така, що $\rho_\infty(f, h) < \varepsilon$. Тоді $h \in \mathrm{cl}A$, тобто $\mathrm{cl}A = C(X)$.

Нехай $x, y \in X$ – довільні точки. За лемою 2 існує функція $f_{xy} \in A$ така, що

$$f_{xy}(x) = h(x)\,, \;\; f_{xy}(y) = h(y).$$

В силу неперервності функцій h і f_{xy} існують такі околи $O_{xy}(x)$ і $O_{xy}(y)$ точок x і y, що

$$h(t) - \varepsilon < f_{xy}(t) < h(t) + \varepsilon \tag{5}$$

для всіх $t \in O_{xy}(x) \cup O_{xy}(y)$. Зафіксуємо точку $y \in X$. З покриття $\{O_{xy}(x) : x \in X\}$ компакта X можна виділити скінченне підпокриття $\{O_{x_1 y}(x_1), ..., O_{x_k y}(x_k)\}$. Покладемо $V_y = \bigcap_{i=1}^{k} O_{x_i y}(y)$ і $f_y = \min\{f_{x_1 y}, f_{x_2 y}, ..., f_{x_k y}\}$. Тоді з (5) випливає, що

$$h(t) - \varepsilon < f_y(t) < h(t) + \varepsilon \tag{6}$$

для довільної точки $t \in V_y$, і

$$f_y(t) < h(t) + \varepsilon \tag{7}$$

для довільної точки $t \in X$. З покриття $\{V_y : y \in X\}$ компакта X виділимо скінченне підпокриття $\{V_{y_1}, ..., V_{y_n}\}$ і покладемо $f = \max\{f_{y_1}, f_{y_2}, ..., f_{y_n}\}$. Тоді з (6) маємо $h - \varepsilon < f$, а з (7) маємо $f < h + \varepsilon$. Отже, $\rho_\infty(f, h) = \max_{x \in X} |f(x) - h(x)| < \varepsilon$, а $f \in \mathrm{cl}A$ згідно з лемою 4. □

Зауваження 1. Теорема Стоуна встановлюючи лише принципову можливість апроксимації довільної функції $f \in C(X)$ функціями з алгебри A, не вказує методу побудови апроксимуючої функції.

Нехай X — компактна підмножина $\mathbb{R}^n$, A — множина всіх поліномів від n змінних, що розглядаються на X. Множина A задовольняє всім умовам теореми Стоуна. Отже, довільна неперервна на X функція суть рівномірна на цьому компакті границя послідовності поліномів від n змінних.

Задача 8. Нехай виконано всі умови теореми 2, крім A3. А замість умови A3 виконується

A3*) $\forall x \in X \; \exists f \in A$: $f(x) \neq 0$.

Доведіть, що тоді також $\mathrm{cl}A = C(X)$.

Задача 9. Нехай X – компактний метричний простір. Доведіть, що простір $C(X)$ сепарабельний.

Задача 10. Нехай $f_n \in C([0,1])$ – послідовність функцій, що розділяє точки $[0,1]$. Доведіть, що

$$\forall f \in C([0,1]) \;\; \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists T \in C(\mathbb{R}^m) : \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - T(f_1(x), f_2(x), ..., f_m(x))| < \varepsilon.$$

Задача 11. Нехай X, Y – компакти, $f \in C(X \times Y)$. Доведіть, що

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \{a_1, ..., a_n\} \subseteq C(X)\,, \ \exists \{b_1, ..., b_n\} \subseteq C(Y) : \ \sup_{x \in X, y \in Y} \left| f(x,y) - \sum_{k=1}^{n} a_k(x) b_k(y) \right| < \varepsilon.$$

Задача 12. Нехай $g \in C([0,1])$. Доведіть, що твердження

$$\forall f \in C([0,1]) \ \ \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \{a_0, a_1, ..., a_n\} \subseteq \mathbb{R} : \ \sup_{x \in [0,1]} \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k g^k(x) \right| < \varepsilon$$

справедливе тоді і лише тоді, коли функція g зростаюча на $[0,1]$.

У наступній задачі пропонується узагальнити теорему Стоуна для локально компактного простору X. Нагадаємо, що простір X локально компактний, якщо довільна точка X має компактний окіл. Позначимо $C_\infty(X)$ – лінійний простір неперервних функцій $X \to \mathbb{R}$, що зникають у нескінченності, тобто $f \in C_\infty(X)$ мають властивість:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \text{ компакт } K \subseteq X : \ |f(x)| < \varepsilon\,, \ \ \forall x \notin K.$$

Простір $C_\infty(X)$ з рівномірною нормою є банаховим.

Задача 13 (теорема Стоуна для локально компактного простору X). Нехай X – локально компактний простір, $A \subseteq C_\infty(X)$. Припустимо, що:

1) A – алгебра;

2) A розділяє точки множини X;

3) $\forall x \in X \ \exists f \in A$: $f(x) \neq 0$.

Тоді множина A щільна в $C_\infty(X)$.

Розглянемо тепер комплексний банахів простір $C_{\mathbb{C}}(X)$ заданих на компакті X неперервних функцій $X \to \mathbb{C}$ (норма рівномірна). Для комплексних алгебр $A \subseteq C_{\mathbb{C}}(X)$ теорема 2 не вірна. Але цю ситуацію можна виправити, якщо вимагати від алгебри A ще одну умову.

Теорема 3. *Нехай X – компакт, $A \subseteq C_{\mathbb{C}}(X)$. Припустимо, що:*

A1) A – алгебра;

A2) A розділяє точки множини X;

A3) $\forall x \in X \ \exists f \in A$: $f(x) \neq 0$;*

A4) $\forall f \in A$ функція $\bar{f}$, визначена рівністю $\bar{f}(x) = \overline{f(x)}$, $x \in X$, належить A.

Тоді множина A щільна в $C_{\mathbb{C}}(X)$, тобто $\mathrm{cl}A = C_{\mathbb{C}}(X)$.

Доведення. Алгебра A разом з кожним своїм елементом $f = u + iv$ містить функції

$$u = \frac{f + \bar{f}}{2} \in C(X)\,, \ \ v = \frac{f - \bar{f}}{2i} \in C(X).$$

Позначимо через $A_{\mathbb{R}}$ алгебру дійснозначних елементів A (розглядаємо множення лише на дійсні числа). Ця алгебра розділяє точки множини X та задовольняє умову A3*. За теоремою Стоуна (див. задачу 8) $\mathrm{cl}A_{\mathbb{R}} = C(X)$, звідки і $\mathrm{cl}A = C_{\mathbb{C}}(X)$. □

Умова A4 про комплексно спряжену функцію грає важливу роль. Нехай, наприклад, $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$. Функції, аналітичні всередині D і неперервні на D, утворюють замкнену алгебру, що розділяє точки і містить одиницю, але відмінну від $C_{\mathbb{C}}(D)$. Однак вона не замкнена відносно комплексного спряження.